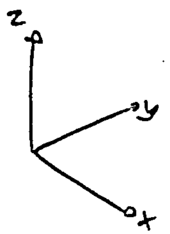
GA 1º/JUN/2023

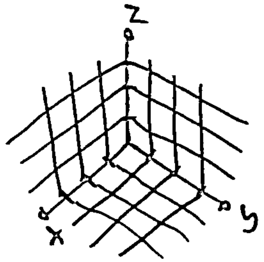
INÍCIO: 14:12

HOJE: INTRODUÇÃO A $\mathbb{R}^3$, E PONTOS, VETORES, RETAS, PLANOS E ESFERAS EM $\mathbb{R}^3$!

PARTE 1 DA AULA

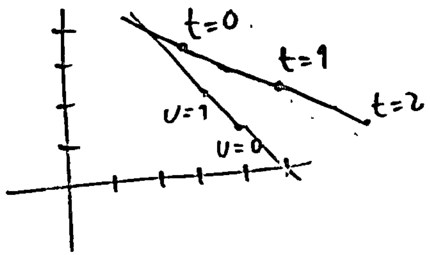
... AGORA FAÇAM UM QUADRICULADO NOS MODELINHOS DE VOCÊS:




SLOGAN: COMECE PELOS PONTOS MAIS FÁCEIS DE CALCULAR!

$$r = \{(3,3) + t\overrightarrow{(2,-1)} \mid t \in \mathbb{R}\}$$
$$s = \{(4,1) + u\overrightarrow{(-1,1)} \mid u \in \mathbb{R}\}$$




ENQUANTO VOCÊS FAZEM OS EXERCÍCIOS DA PRIMEIRA FOLHA QUE EU DISTRIBUÍ EU VOU PÔR UMAS COISAS NA PÁGINA DO CURSO...

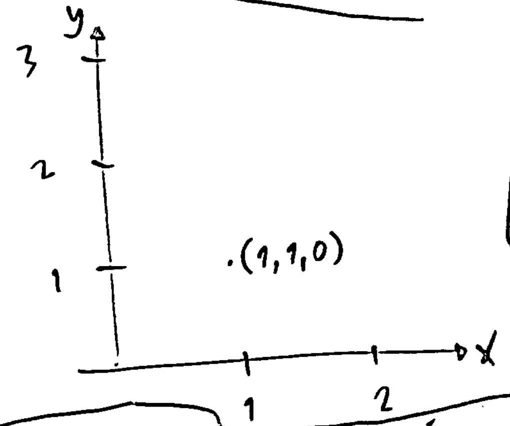
PARTE 5

PRA CASA:
NA FOLHA 4S QUE EU DISTRIBUÍ TEM UNS EXERCÍCIOS DE "VISUALIZE ESTES PLANOS"...
ENTENDA A NOTAÇÃO DESSE EXERCÍCIO E TENTE VISUALIZAR ESTAS INTERSEÇÕES:
a) $E_1 \cap [x=0]$
b) $E_1 \cap [x=1]$
c) $E_1 \cap [x=2]$
d) $E_1 \cap [x=3]$

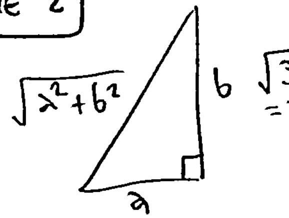
PARTE 3

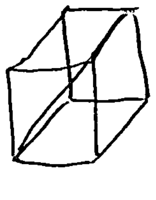
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{(\underbrace{\underbrace{x}_{1} - 4}_{-3})^2}_{9} + \underbrace{(\underbrace{\underbrace{y}_{3} - 3}_{0})^2}_{0} \ldots$$

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \ldots}$$
$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (\ldots$$




PARTE 2



PARTE 4

EXERCÍCIO: USE O MÉTODO DOS "PONTOS ÓBVIOS" QUE EU ACABEI DE EXPLICAR PRA ENCONTRAR OS 6 "PONTOS ÓBVIOS" DESTA ESFERA AQUI:

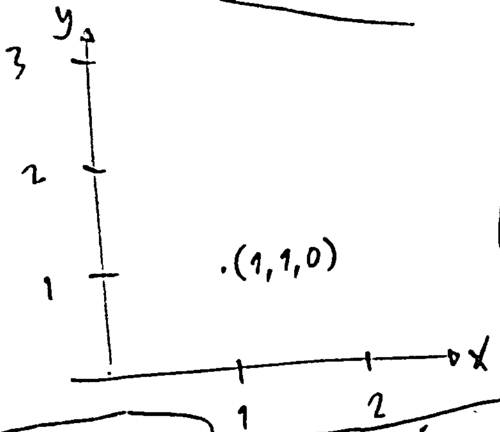
$$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1^2\}$$

E APONTE PRA ESSES PONTOS NOS SEU MODELINHO DE $\mathbb{R}^3$. VEJA SE OS SEUS COLEGAS CONCORDAM COM O QUE VOCÊ ENCONTROU E DEPOIS TENTE DESCOBRIR O CENTRO DESSA ESFERA $E_1$.

PARTE 5

PRA CASA:
NA FOLHA A5 QUE EU DISTRIBUÍ TEM UNS EXERCÍCIOS DO "VISUALIZE ESTES PLANOS"...
ENTENDA A NOTAÇÃO DESSE EXERCÍCIO E TENTE VISUALIZAR ESTAS INTERSECÇÕES:

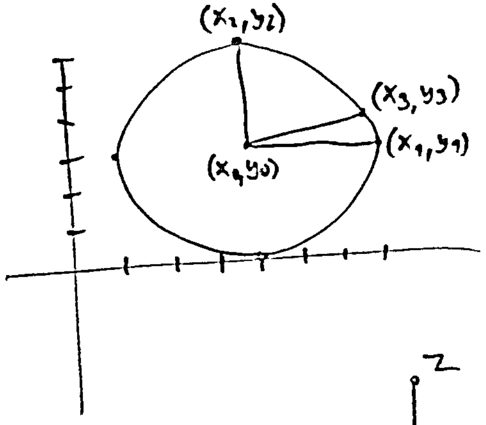
a) $E_1 \cap [x=0]$
b) $E_1 \cap [x=1]$
c) $E_1 \cap [x=2]$
d) $E_1 \cap [x=3]$




PARTE 3

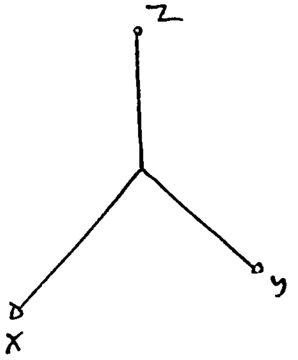
$$C = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \underbrace{(\underbrace{x}_{1} - 4)^2}_{\underbrace{-3}_{9}} + \underbrace{(\underbrace{y}_{3} - 3)^2}_{\underbrace{0}_{0}} = 9 \right\}$$

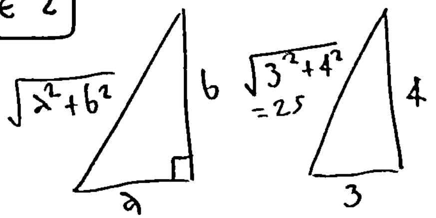
$$E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = R \right\}$$
$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2 \right\}$$

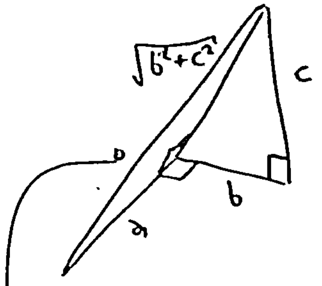



$x_1 - x_0 = R$
$y_1 - y_0 = 0$
$x_2 - x_0 = 0$
$y_2 - y_0 = R$

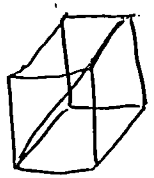
PARTE 2




$$\sqrt{a^2 + \left(\sqrt{b^2+c^2}\right)^2} = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$



PARTE 4

EXERCÍCIO: USE O MÉTODO DOS "PONTOS ÓBVIOS" QUE EU ACABEI DE EXPLICAR PRA ENCONTRAR OS 6 "PONTOS ÓBVIOS" DESTA ESFERA AQUI:

$$E_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1^2 \right\}$$

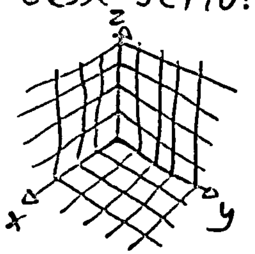
E APONTE PRA ESSES PONTOS NOS SEU MODELINHO DE $\mathbb{R}^3$. VEJA SE OS SEUS COLEGAS CONCORDAM COM O QUE VOCÊ ENCONTROU E DEPOIS TENTE DESCOBRIR O CENTRO DESSA ESFERA $E_1$.

GA 15/JUN/2023

INÍCIO: 14:08

TODO O MATERIAL QUE EU VOU USAR HOJE ESTÁ NA MINHA PÁGINA...
http://anggtwu.net/2023.1-GA.html

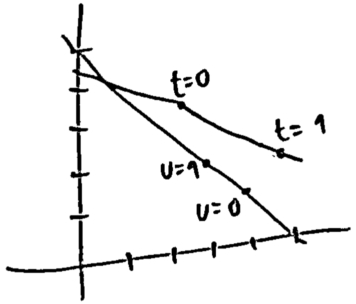
FAÇAM OS EIXOS NO MODELINHO DE PAPEL DESSE JEITO:




O PLANO DE CURSO DO DENIS DIZ QUE HOJE É PRA GENTE VER RETAS E PLANOS PARAMETRIZADOS, E ELE DÁ COMO REFERÊNCIA O LIVRO DO VENTURI... EU PUS UM LINK PRO LIVRO DO VENTURI NA MINHA PÁGINA, MAS EU ACHEI O DFES2 - DELGADO, FRENSEL, ESPÍRITO SANTO, VOL. 2 - MELHOR... ENTÃO VOU USAR MAIS O DFES2, MAS EM CASA VOCÊS VÃO TER QUE ESTUDAR PELO VENTURI TAMBÉM.

NA OUTRA AULA QUE EU DEI EU USEI A PÁGINA 17 DO MPG... EU TROUXE ALGUMAS CÓPIAS DELA.

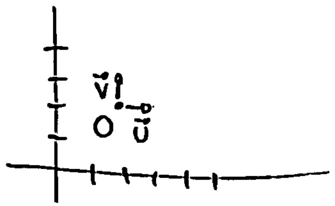
SEJAM: $r = \{(3,3) + t\overrightarrow{(2,1)} \mid t \in \mathbb{R}\}$
$= \{(3+2t, 3+t) \mid t \in \mathbb{R}\}$,
$s = \{(4,1) + u\overrightarrow{(-1,1)} \mid u \in \mathbb{R}\}$
$= \{(4-u, 4+u \mid u \in \mathbb{R}\}$




DAQUI A POUCO A GENTE VAI VER PLANOS PARAMETRIZADOS EM $\mathbb{R}^3$... MAS VAMOS COMEÇAR COM UNS EXERCÍCIOS EM $\mathbb{R}^2$ - MUDANÇA DE COORDENADAS EM $\mathbb{R}^2$ TEM MUITAS IDÉIAS EM COMUM COM PLANOS PARAMETRIZADOS.

LINK: MPG 18.

b)




DIGAMOS QUE:

$$P = O + a\vec{u} + b\vec{v}$$

NESSA FIGURA TEMOS:

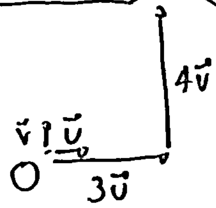
$O = (2,2)$,
$\vec{u} = \overrightarrow{(1,0)}$ ⇐ UNITÁRIO, PRA DIREITA
$\vec{v} = \overrightarrow{(0,1)}$ ⇐ UNITÁRIO, PRA CIMA.

$a$ E $b$ NÃO ESTÃO DEFINIDOS - SÃO VARIÁVEIS.

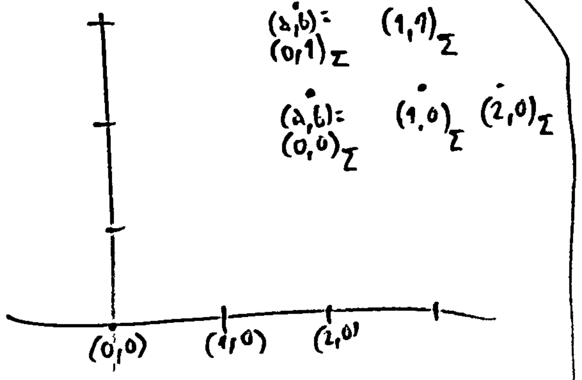
TEM UMA [illegible] DEFINIÇÃO NÃO TÁ NA PÁGINA 18... O EXERCÍCIO 1 DELA PEDE:

$$((a,b)_\Sigma = O + a\vec{u} + b\vec{v}) \begin{bmatrix} a:=3 \\ b:=4 \end{bmatrix}$$
$$= ((3,4)_\Sigma = O + 3\vec{u} + 4\vec{v})$$

<u>NESSA FOLHA</u> A GENTE VAI CONSIDERAR QUE $O$ É ALGO QUE DEPENDE DO CONTEXTO - NEM SEMPRE $O = (0,0)$.




$O + 3\vec{u} + 4\vec{v}$




$(a,b)_\Sigma = O + a\vec{u} + b\vec{v}$

VAI VALER SEMPRE.

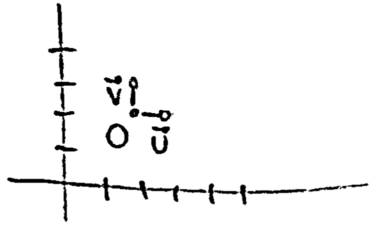
O EXERCÍCIO 2 É ISSO AQUI:

$((a,b)_\Sigma = O + a\vec{u} + b\vec{v})$ [

$= ((a,b)_\Sigma = (3,1) + a\overline{(2}$

... A POUCO A
... VAI VER
... PARAMETRIZADOS
... $^3$ ... MAS VAMOS
...ÇAR COM UNS
...ÍCIOS EM $\mathbb{R}^2$ -
...ANÇA DE COORDENADAS
... $\mathbb{R}^2$ TEM MUITAS
...IAS EM COMUM COM
...OUI PARAMETRIZADOS.
...INK: MPG 18.

b)




DIGAMOS QUE:

$$P = O + a\vec{u} + b\vec{v}$$

NESSA FIGURA TEMOS:

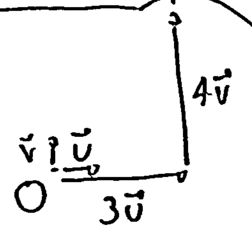
$O = (2,2)$,
$\vec{u} = \overrightarrow{(1,0)}$ ⇐ UNITÁRIO, PRA DIREITA
$\vec{v} = \overrightarrow{(0,1)}$ ⇐ UNITÁRIO, PRA CIMA.

a e b NÃO ESTÃO DEFINIDOS - SÃO VARIÁVEIS.

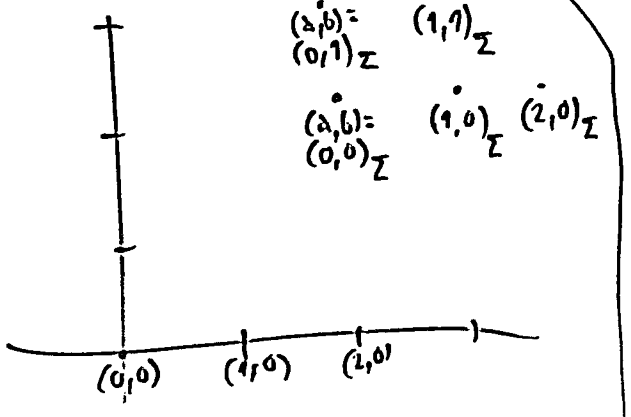
TEM UMA COISA QUE NÃO TÁ NA PÁGINA 18...
O EXERCÍCIO 1 DELA PEDE:

$$\left((a,b)_\Sigma = O + a\vec{u} + b\vec{v}\right)\begin{bmatrix} a:=3 \\ b:=4 \end{bmatrix}$$
$$= \left((3,4)_\Sigma = O + 3\vec{u} + 4\vec{v}\right)$$

NESSA FOLHA A GENTE VAI CONSIDERAR QUE O É ALGO QUE DEPENDE DO CONTEXTO - NEM SEMPRE $O = (0,0)$.




$O + 3\vec{u} + 4\vec{v}$




NESSA PÁGINA A DEFINIÇÃO

$$(a,b)_\Sigma = O + a\vec{u} + b\vec{v}$$

VAI VALER SEMPRE.
O EXERCÍCIO 2 É ISSO AQUI:

$$\left((a,b)_\Sigma = O + a\vec{u} + b\vec{v}\right)\begin{bmatrix} O:=(3,1) \\ \vec{u}:=\overrightarrow{(2,1)} \\ \vec{v}:=\overrightarrow{(-1,1)} \end{bmatrix}$$
$$= \left((a,b)_\Sigma = (3,1) + a\overrightarrow{(2,1)} + b\overrightarrow{(-1,1)}\right)$$

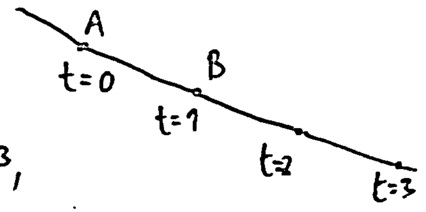
DEPOIS QUE VOCÊS TERMINAREM ~~...~~ LINK DEFS2 p55.
ELE VAI PRA "AULA 5" DO DEFS2. LEMBREM QUE EM CASA VOCÊS VÃO TER QUE ENTENDER ESSE CAPÍTULO!
ELE DIZ:

$$\boxed{r = \{P \mid P = A + t\overrightarrow{AB},\ t\in\mathbb{R}\}} \quad (5.20)$$

ISSO É EQUIVALENTE A:

$$r = \{A + t\overrightarrow{AB} \mid t\in\mathbb{R}\}$$

E ISSO GERA UMA RETA ASSIM:




DEPOIS ELE PASSA PRA $\mathbb{R}^3$, E DEFINE:

$$r = \begin{cases} x = a + tu_1 \\ y = b + tu_2 \\ z = c + tu_3 \end{cases},\ t\in\mathbb{R}$$

ISSO É EQUIVALENTE A:

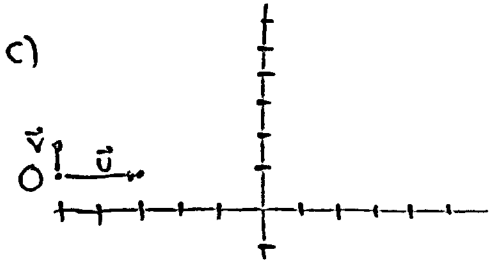
$$r = \{(a+tu_1, b+tu_2, c+tu_3) \mid t\in\mathbb{R}\}$$
$$= \{\underbrace{(a,b,c)}_{A} + t\underbrace{\overrightarrow{(u_1,u_2,u_3)}}_{\overrightarrow{AB}} \mid t\in\mathbb{R}\}$$

GA 15/JUN/2023

INÍCIO: 14:08

TODO O MATERIAL QUE EU VOU USAR HOJE ESTÁ NA MINHA PÁGINA...
http://anggtwu.net/2023.1-GA.html

c)

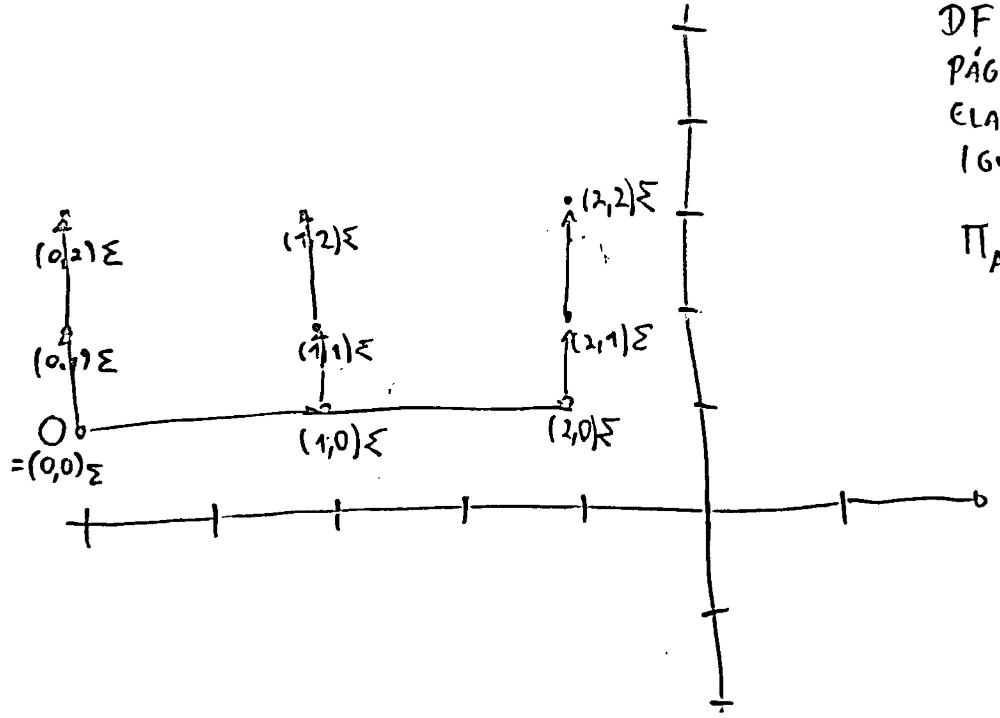


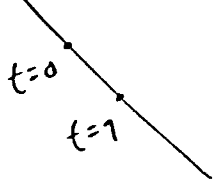

AQUI TEMOS:

$O = (-5,1)$,
$\vec{u} = \overrightarrow{(2,0)}$,
$\vec{v} = \overrightarrow{(0,1)}$.

4c) REPRESENTE GRAFICAMENTE ESTES PONTOS NUM GRÁFICO SÓ:

$(0,0)_\Sigma = (-5,1) + a(0,0) + b(0,0)$
$(1,0)_\Sigma$ ✓
$(2,0)_\Sigma$ ✓
$(0,1)_\Sigma$ ✓
$(1,1)_\Sigma$ ✓
$(2,1)_\Sigma$ ✓
$(0,2)_\Sigma$ ✓
$(1,2)_\Sigma$ ✓
$(2,2)_\Sigma$ ✓




AGORA VOCÊ ~~VÃO~~ TENTAR ENTENDER A DEFINIÇÃO 5.25 DO DFES2. ELA ESTÁ NA PÁGINA 59 DO PDF E ELA É A PRIMEIRA IGUALDADE DAQUI:

$$\Pi_{ABC} = \{D \mid D = A + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC},\ r,s \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{A + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} \mid r,s \in \mathbb{R}\}$$

NOSSO PRIMEIRO CASO CONCRETO VAI SER ESTE AQUI:

$A = (0,0,1)$
$B = (2,0,1)$
$C = (0,2,1)$

E AÍ VAMOS TER:

$$\Pi_{ABC} = \{\underbrace{\underbrace{A}_{(0,0,1)} + r\underbrace{\overrightarrow{AB}}_{\overrightarrow{(2,0,0)}} + s\underbrace{\overrightarrow{AC}}_{\overrightarrow{(0,2,0)}}}_{(r,s)_\Sigma} \mid r,s \in \mathbb{R}\}$$

DEF:
$$(r,s)_\Sigma = (0,0,1) + r\overrightarrow{(2,0,0)} + s\overrightarrow{(0,2,0)}$$

APONTE PRA ESTES PONTOS NO MODELINHO:

$(0,2)_\Sigma$ $(1,2)_\Sigma$ $(2,2)_\Sigma$
$(0,1)_\Sigma$ $(1,1)_\Sigma$ $(2,1)_\Sigma$
$(0,0)_\Sigma$, $(1,0)_\Sigma$, $(2,0)_\Sigma$

~~AGORA~~ ... VOCÊS CONSEGUIRAM VISUALIZA[R] O QUE $(r,s)_\Sigma$ E $\Pi$[...] QUEREM DIZER, VEJA SE VOCÊ CONSEGUE RESPONDER ESSAS PERGUNTAS USAN[DO] O MÁXIMO POSSÍ[VEL] DE OLHÔMETRO [E O] MÍNIMO POSSÍVE[L] DE CONTAS...

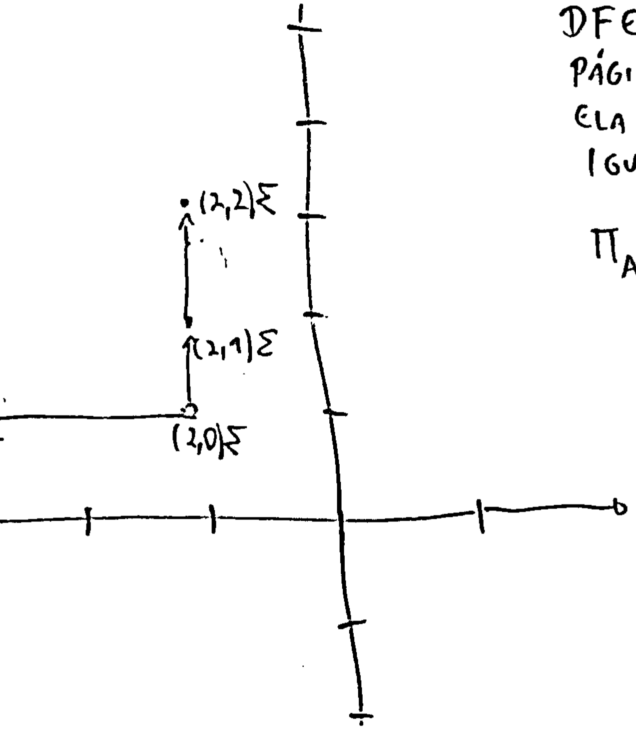
a) O PONTO ([...] PERTENCE A [...] $\Pi_{ABC}$? QU[...] O r E O s [...] A ELE?

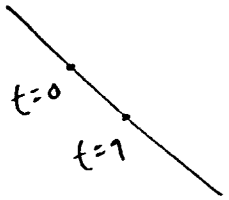
b) E O PON[TO ...]

c) E O PON[TO ...]

d) E O PON[TO ...]

AGORA FAÇAM [...] DA PÁGINA 64[...]
OBS: ISSO É A [...] E É A [...]




AGORA VOCÊS VÃO TENTAR ENTENDER A DEFINIÇÃO 5.25 DO DFES2. ELA ESTÁ NA PÁGINA 59 DO PDF E ELA É A PRIMEIRA IGUALDADE DAQUI:

$$\Pi_{ABC} = \{ D \mid D = A + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC},\ r,s \in \mathbb{R} \}$$
$$= \{ A + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} \mid r,s \in \mathbb{R} \}$$

NOSSO PRIMEIRO CASO CONCRETO VAI SER ESTE AQUI:

$A = (0,0,1)$

$B = (2,0,1)$

$C = (0,2,1)$

E AÍ VAMOS TER:

$$\Pi_{ABC} = \{ \underbrace{\underbrace{A}_{(0,0,1)} + r\underbrace{\overrightarrow{AB}}_{\overrightarrow{(2,0,0)}} + s\underbrace{\overrightarrow{AC}}_{\overrightarrow{(0,2,0)}}}_{(r,s)_\Sigma} \mid r,s \in \mathbb{R} \}$$

DEF:
$$(r,s)_\Sigma = (0,0,1) + r\overrightarrow{(2,0,0)} + s\overrightarrow{(0,2,0)}$$

APONTE PRA ESTES PONTOS NO MODELINHO:

$(0,2)_\Sigma \quad (1,2)_\Sigma \quad (2,2)_\Sigma$
$(0,1)_\Sigma \quad (1,1)_\Sigma \quad (2,1)_\Sigma$
$(0,0)_\Sigma, \quad (1,0)_\Sigma, \quad (2,0)_\Sigma$

AGORA QUE VOCÊS CONSEGUIRAM VISUALIZAR O QUE $(r,s)_\Sigma$ E $\Pi_{ABC}$ QUEREM DIZER, VEJA SE VOCÊ CONSEGUE RESPONDER ESSAS PERGUNTAS USANDO O MÁXIMO POSSÍVEL DE OLHÔMETRO E O MÍNIMO POSSÍVEL DE CONTAS...

a) O PONTO $(2,2,1)$ PERTENCE AO PLANO $\Pi_{ABC}$? QUAIS SÃO O r E O s ASSOCIADOS A ELE?

b) E O PONTO $(1,1,1)$?

c) E O PONTO $(1,0,1)$?

d) E O PONTO $(0,0,4)$?

AGORA FAÇAM O EXERCÍCIO 5 DA PÁGINA 64 DO DFES2.
OPS: ISSO É A PÁGINA 64 DO PDF E É A PÁGINA 62 DO LIVRO.

COMO VER SE UM PONTO PERTENCE A UM PLANO PARAMETRIZADO?

LEMBRE QUE SE $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ SÃO TRÊS VETORES EM $\mathbb{R}^3$ E
$$\vec{u} = \overrightarrow{(u_1,u_2,u_3)},\quad \vec{v} = \overrightarrow{(v_1,v_2,v_3)},\quad \vec{w} = \overrightarrow{(w_1,w_2,w_3)}$$

ENTÃO PODEMOS MONTAR UMA MATRIZ 3×3 COM ESSES VETORES E CALCULAR O DETERMINANTE DESSA MATRIZ...

EU USO ESSA NOTAÇÃO AQUI, $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$, QUE NÃO É PADRÃO, PRA ESTA MATRIZ:

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

E O DETERMINANTE DELA VAI SER:

$$|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]| = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$
$$= u_1v_2w_3 + u_2v_3w_4 + u_3v_4w_5 - u_3v_2w_1 - u_4v_3w_2 - u_5v_4w_3$$
$$= u_1v_2w_3 + u_2v_3w_1 + u_3v_1w_2 - u_3v_2w_1 - u_1v_3w_2 - u_2v_1w_3$$

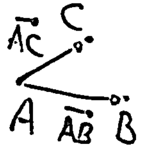
GA ...

INÍCIO: 14:08

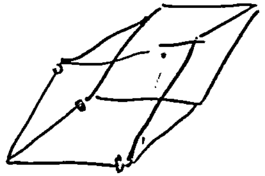
TODO O MATERIAL
QUE EU VOU USAR HOJE
ESTÁ NA MINHA PÁGINA...
http://anggtwu.net/2023.1-GA.html

LEMBRE QUE DETERMINANTES
EM $\mathbb{R}^3$ CALCULAM VOLUMES
(COM SINAL !!)...

NO EXERCÍCIO 5 QUE VOCÊS
ACABARAM DE FAZER
VOCÊS LIDARAM COM UM
PLANO QUE CONTÉM OS
PONTOS A, B E C...
EM ALGUNS ITENS A
GENTE MONTAVA ESSE
PLANO A PARTIR DISSO
AQUI:




SERÁ QUE O PLANO $\Pi_{ABC}$ DAQUI
CONTÉM ESTE PONTO?
$D=(0,0,4)$
UM JEITO DE TESTAR É CALCULAR
ESTE DETERMINANTE: $\delta=[\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}]$
EXERCÍCIO: CALCULE $\delta$.



AGORA VOCÊS ~~VÃO~~
TENTAR ENTENDER A
DEFINIÇÃO 5.25 DO
DFES2. ELA ESTÁ NA
PÁGINA 59 DO PDF E
ELA É A PRIMEIRA
IGUALDADE DAQUI:

$$\Pi_{ABC}=\{D \mid D=A+r\vec{AB}+s\vec{AC},\ r,s\in\mathbb{R}\}$$
$$=\{A+r\vec{AB}+s\vec{AC} \mid r,s\in\mathbb{R}\}$$

NOSSO PRIMEIRO CASO CONCRETO
VAI SER ESTE AQUI:

$A=(0,0,1)$

$B=(2,0,1)$

$C=(0,2,1)$

E AÍ VAMOS TER:

$$\Pi_{ABC}=\{\underbrace{\underbrace{A}_{(0,0,1)}+r\underbrace{\vec{AB}}_{(2,0,0)}+s\underbrace{\vec{AC}}_{(0,2,0)}}_{(r,s)_\Sigma} \mid r,s\in\mathbb{R}\}$$

DEF:
$$(r,s)_\Sigma=(0,0,1)+r\overrightarrow{(2,0,0)}+s\overrightarrow{(0,2,0)}$$

APONTE PRA ESTES PONTOS NO MODELINHO:

$(0,2)_\Sigma$ $(1,2)_\Sigma$ $(2,2)_\Sigma$
$(0,1)_\Sigma$ $(1,1)_\Sigma$ $(2,1)_\Sigma$
$(0,0)_\Sigma$, $(1,0)_\Sigma$, $(2,0)_\Sigma$

AGORA QUE VO...
CONSEGUIRAM VE...
O QUE $(r,s)_\Sigma$...
QUEREM DIZER...
SE VOCÊ CO...
RESPONDER...
PERGUNTAS...
O MÁXIM...
DE OLHAR...
MÍNIMO ...
DE CONT...
a) O PO...
PERTE...
$\Pi_{ABC}$...
O r ...
A ELE...
b) $\in$ ...
c) $\in$ ...
d) $\in$ ...

AGORA ...
DA PÁGI...
OPS: ISSO...
$\in$ ...