Capítulo 10

Equação da reta e do plano no espaço

1. Equações paramétricas da reta no espaço

Sejam A e B dois pontos distintos no espaço e seja r a reta que os contém. Então,

$$\boxed{P \in r \iff \text{existe } t \in \mathbb{R} \text{ tal que } \overrightarrow{AP} = t\,\overrightarrow{AB}}$$

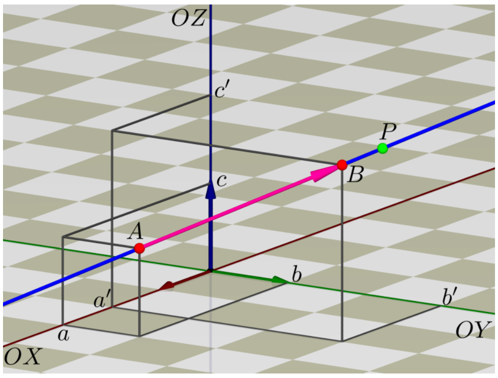

Figura 1: Reta r passando por A e B.

O ponto P pode ser visto como sendo a translação do ponto A pelo vetor $\overrightarrow{AP}$, isto é, $P = A + \overrightarrow{AP}$. Portanto,

$$P \in r \iff \text{existe } t \in \mathbb{R} \text{ tal que } P = A + t\overrightarrow{AB}.$$

Assim, a reta r é caracterizada pela equação

$$\boxed{r : P = A + t\,\overrightarrow{AB}\ ; \quad t \in \mathbb{R}}$$

chamada **equação paramétrica** da reta r com **parâmetro** t.

Equação paramétrica da reta em coordenadas

Seja $OXYZ$ um sistema de eixos ortogonais no espaço e considere os pontos A e B em coordenadas: $A = (a, b, c)$ e $B = (a', b', c')$.

Escrevendo o ponto P em coordenadas, temos que:

$$\begin{aligned}
& P = (x, y, z) \in r \\
\iff \ & (x, y, z) = (a, b, c) + t(a' - a, b' - b, c' - c)\,, \quad t \in \mathbb{R} \\
\iff \ & (x, y, z) = (a + t(a' - a), b + t(b' - b), c + t(c' - c))\,, \quad t \in \mathbb{R} \\
\iff \ & x = a + t(a' - a)\,, \quad y = b + t(b' - b)\,, \quad z = c + t(c' - c)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

Isto é, $P = (x, y, z) \in r$ se, e somente se, suas coordenadas x, y e z satisfazem as **equações paramétricas** da reta r que passa por $A = (a, b, c)$ e $B = (a', b', c')$:

$$\boxed{r : \begin{cases} x = a + t\,(a' - a) \\ y = b + t\,(b' - b) \\ z = c + t\,(c' - c) \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}}$$

Exemplo 1

Determine as equações paramétricas da reta r que contém os pontos $A = (1, 0, 0)$ e $B = (0, 1, 1)$.

Solução.

O vetor $\overrightarrow{AB}$ tem coordenadas $\overrightarrow{AB} = (0 - 1, 1 - 0, 1 - 0) = (-1, 1, 1)$.
Logo,

$$r : \begin{cases} x = 1 + t(-1) \\ y = 0 + t(1) \\ z = 0 + t(1) \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R} \quad , \quad \text{ou seja} \quad , \quad r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}$$

são as equações paramétricas da reta r. □

Definição 1

Dizemos que um vetor $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ *é paralelo a uma reta* r *quando, para quaisquer dois pontos* A *e* B *de* r*, o vetor* $\overrightarrow{AB}$ *é múltiplo de* $\overrightarrow{v}$*.*

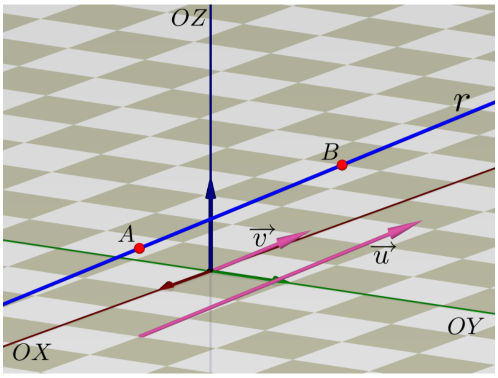

Figura 2: Vetor $\overrightarrow{v}$ paralelo à reta r.

Assim, um ponto P pertence à reta r que passa por A e é paralela ao vetor $\overrightarrow{v}$ se, e somente se, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{AP} = t\,\overrightarrow{v}$, ou seja,

$$\boxed{r : P = A + t\overrightarrow{v}; \quad t \in \mathbb{R}}$$

Em termos de coordenadas, se $A = (a, b, c)$ e $\overrightarrow{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$, as equações paramétricas de r são:

$$\boxed{r : \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & = & a & + & \alpha\, t \\ y & = & b & + & \beta\, t\ ; \quad t \in \mathbb{R} \\ z & = & c & + & \gamma\, t \end{array} \right.}$$

Exemplo 2

Determine se os pontos $P = (1, 1, 1)$ *e* $Q = (0, -1, 0)$ *pertencem à reta* r *que passa pelo ponto* $A = (1, 1, -1)$ *e é paralela ao vetor* $\overrightarrow{v} = (1, 2, -1)$*.*

Solução.

As equações paramétricas da reta r são:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \quad ; \, t \in \mathbb{R}\,. \\ z = -1 - t \end{array} \right.$$

Logo, $P = (1, 1, 1) \in r$ se, e somente se, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$(1, 1, 1) = (1 + t, 1 + 2t, -1 - t),$$

isto é, se, e somente se, existe $t \in \mathbb{R}$ que satisfaz às identidades

$$1 = 1 + t,\ 1 = 1 + 2t \text{ e } 1 = -1 - t,$$

simultaneamente. Das duas primeiras obtemos $t = 0$, mas este valor é incompatível com a terceira identidade, pois implicaria na identidade $1 = -1$.

Portanto, $P \notin r$.

Analogamente, $Q = (0, -1, 0) \in r$ se, e somente se, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$(0, -1, 0) = (1 + t, 1 + 2t, -1 - t),$$

isto é, se, e somente se, existe $t \in \mathbb{R}$ que satisfaz, simultaneamente, às identidades

$$0 = 1 + t, \quad -1 = 1 + 2t \quad \text{e} \quad 0 = -1 - t,$$

Da primeira identidade, obtemos $t = -1$, valor que satisfaz as outras duas identidades.

Portanto, $Q \in r$. $\square$

2. Equação simétrica da reta no espaço

Consideremos as equações paramétricas da reta r que passa pelo ponto $A = (a, b, c)$ e é paralela ao vetor $\overrightarrow{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$:

$$r : \begin{cases} x = a + \alpha t \\ y = b + \beta t \\ z = c + \gamma t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Quando as três coordenadas do vetor direção $\overrightarrow{v}$ são diferentes de zero, podemos colocar em evidência o parâmetro t em cada uma das equações:

$$t = \frac{x - a}{\alpha}, \qquad t = \frac{y - b}{\beta} \qquad \text{e} \qquad t = \frac{z - c}{\gamma}.$$

Portanto, $P = (x, y, z) \in r$ se, e somente se, as coordenadas de P satisfazem:

$$\boxed{r : \frac{x - a}{\alpha} = \frac{y - b}{\beta} = \frac{z - c}{\gamma}}$$

Esta expressão é chamada **equação simétrica** da reta r.

Quando a reta r é dada por dois de seus pontos $A = (a, b, c)$ e $B = (a', b', c')$, o vetor $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = (a' - a, b' - b, c' - c)$, paralelo a r, terá suas três coordenadas não nulas se, e somente se, os pontos A e B não pertencerem a um plano paralelo a um dos planos coordenados (isto é, $a' \neq a$, $b' \neq b$ e $c' \neq c$).

Neste caso, podemos expressar a reta r por meio de sua equação simétrica:

$$\boxed{r : \frac{x-a}{a'-a} = \frac{y-b}{b'-b} = \frac{z-c}{c'-c}}$$

Atenção!

Se a reta r é paralela a algum dos planos coordenados, então ela não pode ser representada por uma equação simétrica.

Exemplo 3

Determine, caso seja possível, a forma simétrica da equação da reta r que passa pelos pontos dados.

(a) $A = (1, 2, 3)$ *e* $B = (2, 3, 4)$.

(b) $A = (1, 0, 1)$ *e* $B = (1, 2, 3)$.

Solução.

(a) Como o vetor $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1)$ tem todas suas coordenadas diferentes de zero, a reta r pode ser expressa pela equação simétrica:

$$r : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1},$$

ou seja,

$$r : x - 1 = y - 2 = z - 3 .$$

(b) Como o vetor $\overrightarrow{AB} = (0, 2, 2)$ é paralelo ao plano π_{YZ}, pois tem a primeira coordenada igual a zero, a reta r não pode ser representada por uma equação simétrica.

As equações paramétricas de r são:

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 + 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases} ; \ t \in \mathbb{R}, \qquad \text{ou seja,} \qquad r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases} ; \ t \in \mathbb{R} .$$

Neste exemplo, observe que o vetor $\overrightarrow{v} = (0, 1, 1) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ é também paralelo à reta r. Portanto,

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

são também equações paramétricas para a mesma reta r. □

Exemplo 4

Seja r a reta que passa pelos pontos $A = (1, 0, 0)$ e $B = (0, 0, 1)$ e seja $\mathcal{S}$ a superfície definida pela equação $\mathcal{S} : z = x^2 + y^2$. Determine os pontos de r pertencentes a $\mathcal{S}$.

Solução.

Como $\overrightarrow{AB} = (-1, 0, 1)$, a equação paramétrica da reta r é:

$$r : P = A + t\,\overrightarrow{AB} \;;\; t \in \mathbb{R}\,, \qquad \text{ou seja,} \qquad r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \;;\; t \in \mathbb{R}\,.$$

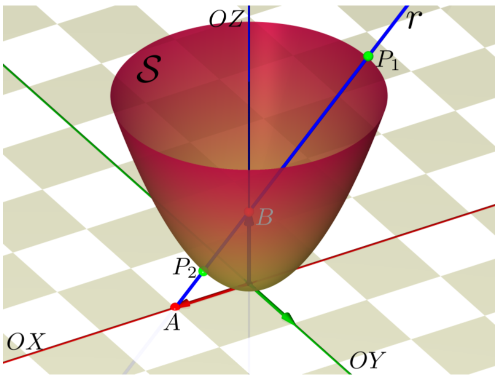

Figura 3: Interseção $r \cap \mathcal{S} = \{P_1, P_2\}$.

Agora, $P \in r \cap \mathcal{S}$ se, e somente se, as coordenadas de P satisfazem as equações paramétricas de r e a equação de $\mathcal{S}$ simultaneamente.

Como $P \in r \iff P = (1 - t, 0, t)$, para algum $t \in \mathbb{R}$, temos que:

$$\begin{aligned} & P = (1 - t, 0, t) \in \mathcal{S} \\ \iff\; & t = (1 - t)^2 \\ \iff\; & t = 1 - 2t + t^2 \\ \iff\; & t^2 - 3t + 1 = 0 \\ \iff\; & t = \frac{1}{2}\left(3 \pm \sqrt{9 - 4}\right) = \frac{1}{2}\left(3 \pm \sqrt{5}\right)\,. \end{aligned}$$

Temos, portanto, duas soluções:

$$P \in r \cap \mathcal{S} \iff \begin{cases} P = \left(1 - \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}, 0, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \\ \text{ou} \\ P = \left(1 - \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, 0, \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} P = \left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}, 0, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \\ \text{ou} \\ P = \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, 0, \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases}.$$

Logo, a reta r intersecta a superfície $\mathcal{S}$ em dois pontos. □

3. Equações paramétricas do plano no espaço

Sejam A, B e C três pontos não colineares no espaço e seja π o plano que os contém. Então, pelo teorema **??**,

$$P \in \pi \iff \text{existem } s, t \in \mathbb{R} \text{ tais que } \overrightarrow{AP} = s\,\overrightarrow{AB} + t\,\overrightarrow{AC}.$$

Isto é, $P \in \pi$ se, e somente se, satisfaz à seguinte **equação paramétrica** do plano π:

$$\boxed{P = A + s\,\overrightarrow{AB} + t\,\overrightarrow{AC}\,; \quad s, t \in \mathbb{R}}$$

Observação 1

A equação paramétrica de uma reta é determinada a partir da variação de um parâmetro ($t \in \mathbb{R}$), enquanto a equação paramétrica de um plano é caracterizada pela variação de dois parâmetros ($s, t \in \mathbb{R}$). Por isso dizemos que a reta é **unidimensional** e o plano é **bidimensional**.

Equação paramétrica do plano em coordenadas

Consideremos um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ no espaço no qual os pontos A, B e C têm coordenadas: $A = (a, b, c)$, $B = (a', b', c')$ e $C = (a'', b'', c'')$.

Substituindo as coordenadas dos pontos $P = (x, y, z)$ e $A = (a, b, c)$ e dos vetores $\overrightarrow{AB} = (a' - a, b' - b, c' - c)$ e $\overrightarrow{AC} = (a'' - a, b'' - b, c'' - c)$ na equação paramétrica do plano π, obtemos que:

$$(x, y, z) = (a, b, c) + s(a' - a, b' - b, c' - c) + t(a'' - a, b'' - b, c'' - c) \ ; \ s, t \in \mathbb{R}.$$

Ou seja, as **equações paramétricas** do plano π são:

$$\boxed{\pi : \begin{cases} x &= a &+ s\,(a' - a) &+ t\,(a'' - a) \\ y &= b &+ s\,(b' - b) &+ t\,(b'' - b) \ ; \quad s, t \in \mathbb{R} \\ z &= c &+ s\,(c' - c) &+ t\,(c'' - c) \end{cases}}$$

Exemplo 5

Determine as equações paramétricas do plano π que contém os pontos $A = (1, 0, 0)$, $B = (1, 1, 0)$ e $C = (0, 0, 1)$.

Solução.

Temos $\overrightarrow{AB} = (0, 1, 0)$ e $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 1)$. Logo,

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + 0s + (-1)t \\ y = 0 + 1s + 0t \\ z = 0 + 0s + 1t \end{cases} \ ; \ s, t \in \mathbb{R} \quad \text{,ou seja,} \quad \pi : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = s \\ z = t \end{cases} \ ; \quad s, t \in \mathbb{R}\,.$$

são as equações paramétricas do plano π. □

Definição 2

Dizemos que o vetor $\overrightarrow{v} \neq 0$ é **paralelo** *ao plano π quando, para qualquer ponto $P \in \pi$, a reta r que passa por P e é paralela ao vetor $\overrightarrow{v}$ está contida no plano π.*

Em particular, se $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PQ}$ e $P \in \pi$ então $Q \in \pi$.

Sabemos que a equação paramétrica do plano π que passa pelos pontos não colineares A, B e C é dada por:

$$\pi : P = A + s\,\overrightarrow{AB} + t\,\overrightarrow{AC} \ ; \quad s, t \in \mathbb{R}\,.$$

Seja $P_0 = A + s_0\,\overrightarrow{AB} + t_0\,\overrightarrow{AC}$ um ponto pertencente a π. Como todos os pontos da forma

$$P = P_0 + s\,\overrightarrow{AB} = A + (s + s_0)\,\overrightarrow{AB} + t_0\,\overrightarrow{AC}\,,\ s \in \mathbb{R},$$

pertencem ao plano π, a reta que passa por P_0 e é paralela ao vetor $\overrightarrow{AB}$ está contida em π. Sendo $P_0 \in \pi$ arbitrário, obtemos que o vetor $\overrightarrow{AB}$ é paralelo ao plano π.

De forma análoga, verificamos que o vetor $\overrightarrow{AC}$ é paralelo ao plano π.

Além disso, como A, B e C são pontos não colineares, os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ não são múltiplos um do outro, isto é, não são colineares.

Com isso, vemos que um plano π é determinado se conhecermos um ponto pertencente a π e duas direções não colineares paralelas a π.

Assim, a **equação paramétrica** do plano π que passa por A e é paralelo aos vetores não colineares $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ é

$$\boxed{\pi : P = A + s\,\overrightarrow{u} + t\,\overrightarrow{v}\,; \quad s, t \in \mathbb{R}}$$

Escrevendo em coordenadas, $A = (a, b, c)$, $\overrightarrow{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$, $\overrightarrow{v} = (\alpha', \beta', \gamma')$ e $P = (x, y, z)$, obtemos as seguintes equações paramétricas de π:

$$\boxed{\pi : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & = & a & + & \alpha\, s & + & \alpha'\, t \\ y & = & b & + & \beta\, s & + & \beta'\, t\,; \\ z & = & c & + & \gamma\, s & + & \gamma'\, t \end{array} \right. \quad s, t \in \mathbb{R}}$$

Exemplo 6

Determine as equações paramétricas do plano π que passa por $A = (1, 1, 1)$ e $B = (1, 0, 1)$ e é paralelo à reta r que passa por $D = (2, 0, 1)$ e $E = (0, 0, 2)$.

Solução.

Para determinar as equações paramétricas do plano π é necessário conhecer um ponto A pertencente a π e:

- dois outros pontos de π não colineares com A, **ou**
- dois vetores não colineares paralelos a π.

Em nosso caso, o vetor $\overrightarrow{DE} = (-2, 0, 1)$ paralelo à reta r e, portanto, paralelo

a π, não é múltiplo do vetor $\overrightarrow{AB} = (0, -1, 0)$ paralelo a π.
Então π é o plano que passa por $A = (1, 1, 1)$ e é paralelo aos vetores $\overrightarrow{AB} = (0, -1, 0)$ e $\overrightarrow{CD} = (-2, 0, 1)$ tendo, portanto, as equações paramétricas:

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + (0)s + (-2)t \\ y = 1 + (-1)s + (0)t \\ z = 1 + (0)s + (1)t \end{cases} ; \; s, t \in \mathbb{R}, \text{ ou seja, } \pi : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 - s \\ z = 1 + t \end{cases} ; \quad s, t \in \mathbb{R}\,.$$

□

Exemplo 7

Determine, caso exista, o ponto onde o plano π, que passa pelos pontos $A = (1, 2, 3)$, $B = (2, 3, 1)$ e $C = (3, 2, 1)$, intersecta o eixo$-OX$.

Solução.
Determinemos, primeiro, as equações paramétricas do plano π.
Os vetores $\overrightarrow{AB} = (1, 1, -2)$ e $\overrightarrow{AC} = (2, 0, -2)$ não são colineares e são paralelos a π. Logo,

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + s + 2t \\ y = 2 + s \\ z = 3 - 2s - 2t \end{cases} ; \quad s, t \in \mathbb{R}\,.$$

O ponto da interseção de π com o eixo$-OX$ deve ser um ponto com a segunda e terceira coordenadas iguais a zero. Isto é,

$$P = (x, y, z) \in \pi \cap \text{eixo} - OX \iff \begin{cases} y = 2 + s = 0 \\ z = 3 - 2s - 2t = 0\,. \end{cases}$$

Da primeira equação do sistema, vemos que $s = -2$ e, substituindo este valor na segunda equação, obtemos $t = \dfrac{3 - 2(-2)}{2} = \dfrac{7}{2}$.

Portanto, $P_0 = \left(1 + (-2) + 2 \times \dfrac{7}{2}, 0, 0\right) = (6, 0, 0)$ é o ponto de interseção de π com o eixo-OX. □

4. Equação cartesiana do plano

Agora vamos aplicar a noção de produto interno para determinar a equação cartesiana de um plano no espaço.

Definição 3

Dizemos que um vetor $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ é **perpendicular** ou **normal** a um plano π, e escrevemos $\overrightarrow{u} \perp \pi$, quando $\overrightarrow{u}$ é perpendicular a qualquer vetor paralelo ao plano π. Isto é, $\overrightarrow{u} \perp \pi$ se, e somente se, $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{AB}$ para quaisquer $A, B \in \pi$.

Se π é o plano que passa pelo ponto A e é normal ao vetor $\overrightarrow{u}$, então:

$$\boxed{P \in \pi \iff \overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{u} \iff \langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{u} \rangle = 0}$$

Escrevendo a última condição em termos das coordenadas dos elementos envolvidos:

$$A = (x_0, y_0, z_0)\,, \quad \overrightarrow{v} = (a, b, c) \quad \text{e} \quad P = (x, y, z)\,,$$

obtemos:

$$\begin{aligned} P = (x, y, z) \in \pi \quad &\iff \quad \langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{u} \rangle = 0 \\ &\iff \quad \langle (x - x_0, y - y_0, z - z_0), (a, b, c) \rangle = 0 \\ &\iff \quad a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) + c\,(z - z_0) = 0 \\ &\iff \quad ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0\,. \end{aligned}$$

Portanto, $P = (x, y, z) \in \pi$ se, e somente se, suas coordenadas satisfazem à **equação cartesiana** de π:

$$\boxed{\pi : ax + by + cz = d}$$

onde $\overrightarrow{u} = (a, b, c) \perp \pi$ e d é calculado sabendo que π passa por $A = (x_0, y_0, z_0)$:

$$\boxed{d = ax_0 + by_0 + cz_0}$$

Exemplo 8

Determine a equação cartesiana do plano π que passa pelo ponto $A = (1, 1, 2)$ e é normal ao vetor $\overrightarrow{u} = (1, 2, -3)$.

Solução.
Como $\overrightarrow{u} = (1, 2, -3) \perp \pi$, temos $\pi : 1\,x + 2\,y + (-3)\,z = d$, onde
$$d = 1\,(1) + 2\,(1) + (-3)\,(2) = -3.$$
Portanto,
$$\pi : x + 2y - 3z = -3$$
é a equação cartesiana do plano π. □

Exemplo 9

Determine as equações paramétricas do plano $\pi : x + 3y - z = 2$.

Solução.
Para determinar as equações paramétricas do plano π, devemos encontrar três pontos de π que não sejam colineares.
Tomando $y = z = 0$ na equação cartesiana de π, obtemos $x = 2$. Portanto, o ponto $A = (2, 0, 0)$ pertence ao plano π.
Tomando agora $x = y = 0$ na equação de π, obtemos $z = -2$. Portanto, o ponto $B = (0, 0, -2)$ pertence ao plano π.
Finalmente, tomando $x = 0$ e $y = 1$, obtemos $z = 1$. Portanto, $C = (0, 1, 1) \in \pi$.
Devemos verificar agora que A, B e C não são colineares.
Para isso, consideremos os vetores $\overrightarrow{AB} = (-2, 0, -2)$ e $\overrightarrow{AC} = (-2, 1, 1)$.
Como $\det \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$, concluímos que A, B e C não são colineares.
Logo, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são vetores não colineares paralelos a π.
Assim, como o plano π passa por $A = (2, 0, 0)$ e é paralelo aos vetores $\overrightarrow{AB} = (-2, 0, -2)$ e $\overrightarrow{AC} = (-2, 1, 1)$,
$$\pi : \begin{cases} x = 2 - 2s - 2t \\ y = t \\ z = -2s + t \end{cases} \quad ; \quad s, t \in \mathbb{R}\,,$$
são equações paramétricas do plano π. □

Observação 2

Seja $ax + by + cz = d$ a equação cartesiana do plano π que passa por três pontos A, B e C não colineares.

Como o vetor $\overrightarrow{w} = (a, b, c)$ deve ser penpendicular ao plano π, ou seja, aos vetores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AC}$, basta tomar $\overrightarrow{w} = (a, b, c) = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$.

O número real d é calculado sabendo que os pontos $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$ e $C = (x_3, y_3, z_3)$ pertencem ao plano π. Isto é:

$$d = ax_1 + by_1 + cz_1 = ax_2 + by_2 + cz_2 = ax_3 + by_3 + cz_3.$$

Exemplo 10

Determine a equação cartesiana e as equações paramétricas do plano π que contém os pontos $A = (1, -1, 3)$, $B = (4, 0, 1)$ e $C = (2, 1, 3)$.

Solução.

Como $\overrightarrow{AB} = (3, 1, -2)$ e $\overrightarrow{AC} = (1, 2, 0)$ são vetores paralelos ao plano π e não são múltiplos um do outro, pois $\det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 5 \neq 0$, obtemos que:

$$\pi : P = A + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}\ ; \quad s, t \in \mathbb{R}\,.$$

Isto é,

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + 3s + t \\ y = -1 + s + 2t\ ; \quad s, t \in \mathbb{R}\,, \\ z = 3 - 2s \end{cases}$$

são equações paramétricas do plano π.

Para determinar a equação cartesiana de π, devemos achar um vetor perpendicular a π.

Sendo, pela observação **??**,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) \\ &= (4, -2, 5)\,, \end{aligned}$$

um vetor normal ao plano π, a equação cartesiana de π tem a forma:

$$4x - 2y + 5z = d\,,$$

onde d é calculado sabendo que $A = (1, -1, 3) \in \pi$:

$$d = 4(1) - 2(-1) + 5(3) = 21\,.$$

Portanto,

$$4x - 2y + 5z = 21\,,$$

é a equação cartesiana do plano π que procurávamos. $\square$

Exemplo 11

Determine a equação cartesiana do plano

$$\pi : \begin{cases} x = -1 + s + 2t \\ y = 1 - s + t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \quad ; \quad s, t \in \mathbb{R}\,.$$

Solução.

Das equações paramétricas de π, obtemos um ponto $A = (-1, 1, 3)$ pertencente a π e os vetores $\overrightarrow{v} = (1, -1, 0)$ e $\overrightarrow{w} = (2, 1, 2)$ não colineares e paralelos ao plano π.

Para determinar a equação cartesiana de π, como já sabemos que $A \in \pi$, basta achar um vetor $\overrightarrow{u}$ perpendicular a π.

Como $\overrightarrow{u} \perp \pi$ se, e somente se, $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{w}$, basta tomar, pela observação **??**,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} &= \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) \\ &= (-2, -2, 3). \end{aligned}$$

Assim, a equação cartesiana de π tem a forma:

$$\pi : -2x - 2y + 3z = d\,,$$

onde o valor d é calculado sabendo que $A = (-1, 1, 3) \in \pi$:

$$d = -2(-1) - 2(1) + 3(3) = 9\,.$$

Portanto,

$$\pi : -2x - 2y + 3z = 9\,,$$

é a equação cartesiana do plano π. $\square$

Observação 3

Seja r a reta dada pela interseção de dois planos $\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ e

$\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ concorrentes. Ou seja,

$$r : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$$

Como $\overrightarrow{v_1} = (a_1, b_1, c_1) \perp \pi_1$ e $\overrightarrow{v_2} = (a_2, b_2, c_2) \perp \pi_2$ e $r = \pi_1 \cap \pi_2$, temos que $\overrightarrow{v_1} \perp r$ e $\overrightarrow{v_2} \perp r$. Portanto, $\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$ é um vetor paralelo à reta r.

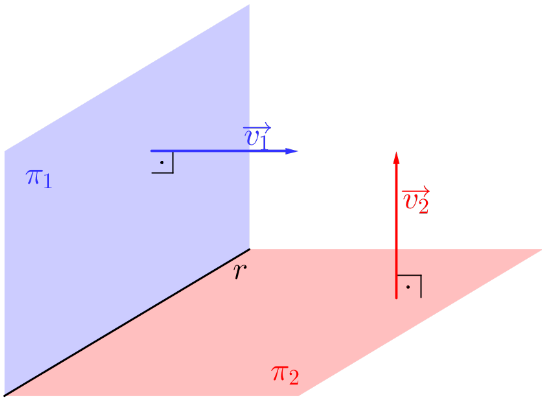

Figura 4: Reta r dada pela interseção de dois planos.

Para determinar a equação paramétrica de r, temos também de encontrar um ponto A que satisfaz ao sistema (**??**). Feito isso, $r = \{A + t\,(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})\,;\, t \in \mathbb{R}\}$.

Exemplo 12

Determine a equação paramétrica da reta:

$$r : \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 5 \end{cases}$$

Solução.

Pela observação acima, $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} \parallel r$, onde $\overrightarrow{u} = (1, 1, -2)$ e $\overrightarrow{v} = (2, 3, -4)$ são os vetores normais aos planos $x + y - 2z = 1$ e $2x + 3y - 4z = 5$, respectivamente.

Sendo,

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \left(\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \right) = (2, 0, 1),$$

obtemos que o vetor $(2, 0, 1)$ é paralelo à reta r.

Fazendo $x = 0$ no sistema (**??**), segue que $P = (0, y, z) \in r$ se, e somente se, y e z satisfazem ao sistema:

$$\begin{cases} y - 2z = 1 \\ 3y - 4z = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} 3y - 6z = 3 \\ 3y - 4z = 5 \end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, chegamos que $2z = 2 \iff z = 1$ e, portanto, $y = 1 + 2z = 3$. Assim, $P = (0, 3, 1) \in r$ e

$$r : \begin{cases} x = 2t \\ y = 3 \\ z = t + 1 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

é uma equação paramétrica de r. $\square$

Exemplo 13

Determine, caso exista, $m \in \mathbb{R}$ de modo que a reta r seja perpendicular ao plano $\pi : x - z = 0$, onde

$$r : \begin{cases} mx + y + 2z = 1 \\ x + my + z = 2 \end{cases}$$

Caso afirmativo, determine o ponto P de interseção da reta r com o plano π.

Solução.

Sabemos que a reta r é paralela ao vetor

$$\overrightarrow{u} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ m & 1 & 2 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ m & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} m & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} \right)$$
$$= (1 - 2m, -m + 2, m^2 - 1) .$$

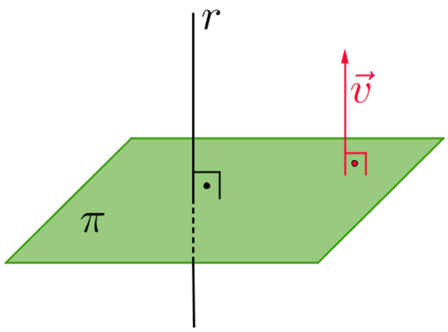

Figura 5: Reta r perpendicular ao plano π.

Para que r seja perpendicular a π, o vetor $\overrightarrow{u}$ deve ser múltiplo do vetor $\overrightarrow{v} = (1, 0, -1)$, normal ao plano π. Logo, $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, ou seja,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} &= \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ 1-2m & -m+2 & m^2-1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\
&= (m-2, -1+2m-m^2+1, m-2) \\
&= (m-2, m(2-m), m-2) = (0,0,0)\,.
\end{aligned}$$

Segue que $m = 2$ e $\overrightarrow{u} = (1-4, -2+2, 4-1) = (-3, 0, 3)$.

Fazendo $x = 0$ e $m = 2$ em (**??**), obtemos o sistema

$$\begin{cases} y + 2z = 1 \\ 2y + z = 2 \end{cases},$$

cuja solução é $y = 1$ e $z = 0$.

Logo, $A = (0, 1, 0) \in r$ e as equações paramétricas de r são

$$r : \begin{cases} x = -3t \\ y = 1 \\ z = 3t \end{cases} ;\, t \in \mathbb{R}\,.$$

Seja $r \cap \pi = \{P\}$. Então $P = (-3t, 1, 3t)$ e

$$x - z = -3t - 3t = 0 \implies t = 0.$$

Assim, $P = A = (0, 1, 0)$ é o ponto de interseção de r com π. $\square$

Capítulo 11

Ângulos e distâncias no espaço

1. Ângulo entre duas retas no espaço

Definição 1

O **ângulo** $\angle(r_1, r_2)$ **entre duas retas** r_1 **e** r_2 *é assim definido:*

• *Se* r_1 *e* r_2 *são coincidentes, então* $\angle(r_1, r_2) = 0$.

• *Se as retas são concorrentes, isto é,* $r_1 \cap r_2 = \{P\}$*, então* $\angle(r_1, r_2)$ *é o menor dos ângulos positivos determinados pelas retas no plano que as contém.*

Em particular, $0 < \angle(r_1, r_2) \leq \pi/2$.

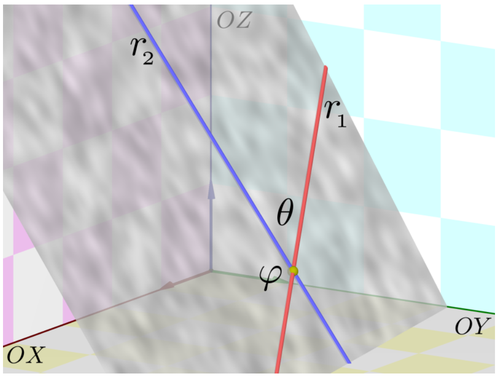

Figura 1: Retas concorrentes: $\theta = \angle(r_1, r_2) < \varphi$.

• *Se* $r_1 \cap r_2 = \varnothing$*, temos duas situações a considerar:*

◦ se $r_1 \parallel r_2$, então $\angle(r_1, r_2) = 0$;

◦ *se* r_1 *e* r_2 *não são paralelas e não se intersectam, dizemos que as retas são* **reversas**. *Neste caso, seja* $P \in r_1$ *e seja* r_2' *a paralela a* r_2 *que passa por* P. *Então as retas* r_1 *e* r_2' *são concorrentes e definimos*

$$\boxed{\angle(r_1, r_2) = \angle(r_1, r_2')}$$

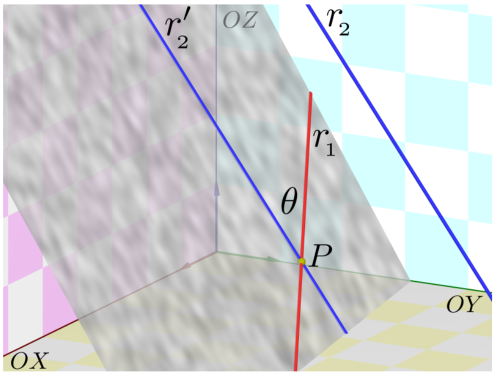

Figura 2: *Retas reversas:* $\theta = \angle(r_1, r_2)$.

Além disso, pelo paralelismo, $\angle(r_1, r_2)$ *independe do ponto* P *escolhido.*

A medida dos ângulos pode ser dada em graus ou radianos.

Sejam $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ vetores paralelos às retas concorrentes (ou reversas) r_1 e r_2, respectivamente. Como $\angle(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) = \angle(r_1, r_2)$ ou $\angle(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) = \pi - \angle(r_1, r_2)$, segue que:

$$\boxed{\cos\angle(r_1, r_2) = |\cos\angle(v_1, v_2)| = \frac{|\langle\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\rangle|}{\|\overrightarrow{v_1}\|\,\|\overrightarrow{v_2}\|}\,, \qquad 0 < \angle(r_1, r_2) \leq \pi/2.}$$

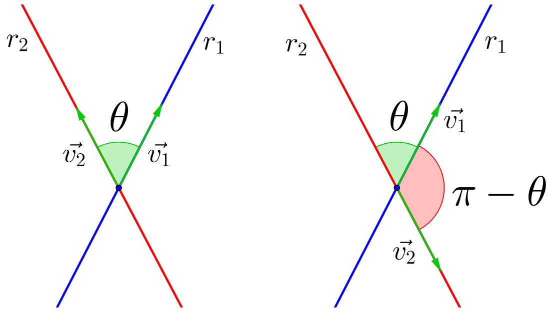

Figura 3: $\angle(r_1, r_2) = \theta$

A fórmula vale também quando r_1 e r_2 são paralelas ou coincidentes, isto é, quando $\angle(r_1, r_2) = 0$, pois

$$\overrightarrow{v_1} = \lambda\overrightarrow{v_2} \Longrightarrow \frac{|\langle\lambda\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2}\rangle|}{\|\lambda\overrightarrow{v_2}\|\,\|\overrightarrow{v_2}\|} = \frac{|\lambda|\,|\langle\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2}\rangle|}{|\lambda|\,\|\overrightarrow{v_2}\|\,\|\overrightarrow{v_2}\|} = 1 = \cos 0 = \cos\angle(r_1, r_2)\,.$$

Exemplo 1

Calcule o ângulo entre as retas

$$r_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{2} \qquad e \qquad r_2 : x+2 = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3}\,.$$

Mostre, também, que estas retas são reversas.

Solução.

Temos que $\overrightarrow{v_1} = (2,2,2) \parallel r_1$ e $\overrightarrow{v_2} = (1,2,3) \parallel r_2$. Logo,

$$\cos\angle(r_1,r_2) = \frac{|\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\rangle|}{\|\overrightarrow{v_1}\|\,\|\overrightarrow{v_2}\|} = \frac{|2+4+6|}{\sqrt{12}\,\sqrt{14}} = \frac{12}{\sqrt{12\times 14}} = \sqrt{\frac{6}{7}}\,.$$

Assim, o ângulo entre r_1 e r_2 é o ângulo entre 0 e $\frac{\pi}{2}$ cujo cosseno é igual a $\sqrt{\frac{6}{7}}$.

Para verificar que as retas r_1 e r_2 são reversas, observamos primeiro que os vetores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ não são múltiplos, pois

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 4-2 = 2 \neq 0.$$

Portanto, as retas não podem ser coincidentes e nem paralelas, podendo ser concorrentes ou reversas.

Para concluir que r_1 e r_2 são reversas, devemos mostrar que elas não se intersectam. As equações paramétricas de r_1 são:

$$r_1 : \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -1+2t \\ z = 2t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Seja $P = (1+2t, -1+2t, 2t)$ um ponto de r_1. Vamos tentar determinar o valor do parâmetro t, de modo que P esteja também em r_2:

$$\begin{aligned} P \in r_2 \quad &\Longleftrightarrow \quad (1+2t)+2 = \frac{(-1+2t)-1}{2} = \frac{2t-2}{3} \\ &\Longleftrightarrow \quad 3+2t = \frac{-2+2t}{2} = \frac{2t-2}{3} \\ &\Longleftrightarrow \quad 3+2t = -1+t = \frac{2}{3}(t-1). \end{aligned}$$

Da segunda igualdade, obtemos $t-1=0$, ou seja, $t=1$. Porém, substituindo este valor na primeira igualdade, obtemos a identidade impossível $5=0$.

Portanto, não existe $P \in r_1 \cap r_2$. Isto é, as retas não são concorrentes e sim reversas. $\square$

2. Ângulo entre dois planos

Definição 2

Sejam $\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ e $\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ dois planos no espaço.

*O **ângulo entre os planos π_1 e π_2**, representado por $\angle(\pi_1, \pi_2)$, se define da seguinte maneira:*

- *se os planos são paralelos ($\pi_1 \parallel \pi_2$) ou coincidentes ($\pi_1 = \pi_2$), então $\angle(\pi_1, \pi_2) = 0$,*
- *se π_1 e π_2 não são paralelos nem coincidentes, então se intersectam ao longo de uma reta r.*

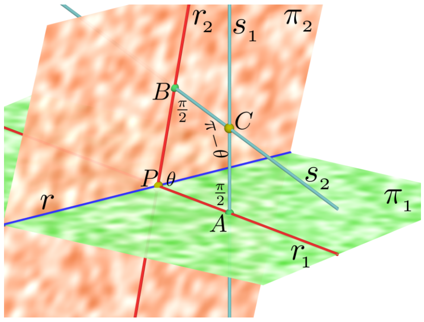

Figura 4: $\angle(\pi_1, \pi_2) = \theta$.

Sejam $P \in r$ um ponto qualquer, r_1 a reta perpendicular a r contida em π_1, que passa por P e r_2 a perpendicular a r contida em π_2, que passa por P. Definimos:

$$\boxed{\angle(\pi_1, \pi_2) = \angle(r_1, r_2)}$$

Tomando $A \in r_1$ e $B \in r_2$, $\angle(\pi_1, \pi_2)$ é o menor ângulo positivo cujo cosseno é

$$\boxed{\cos\angle(\pi_1, \pi_2) = \cos\angle(r_1, r_2) = |\cos\angle(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB})| = \frac{\left|\langle\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}\rangle\right|}{\|\overrightarrow{PA}\|\,\|\overrightarrow{PB}\|}}$$

Seja agora s_1 a reta perpendicular ao plano π_1, que passa pelo ponto A, e seja s_2 a reta perpendicular ao plano π_2, que passa por B.

As retas s_1 e s_2 se intersectam em um ponto C.

Como os ângulos $\angle(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB})$ e $\angle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ são suplementares (a sua soma é π), temos:

$$\cos\angle(\pi_1, \pi_2) = \left|\cos\angle(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB})\right| = \left|\cos\angle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})\right| .$$

Além disso, como $\overrightarrow{v_1} = (a_1, b_1, c_1) \perp \pi_1$ e $\overrightarrow{v_2} = (a_2, b_2, c_2) \perp \pi_2$, os ângulos $\angle(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ e $\angle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ são iguais ou suplementares. Logo,

$$\boxed{\cos\angle(\pi_1,\pi_2) = |\cos\angle(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2})| = \frac{|\langle\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}\rangle|}{\|\overrightarrow{v_1}\|\,\|\overrightarrow{v_2}\|}}$$

A fórmula vale também quando os planos são paralelos ou coincidentes.

Observação 1

Pela fórmula acima, dois planos π_1 e π_2 são perpendiculares se, e só se, os vetores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ normais aos planos π_1 e π_2, respectivamente, são ortogonais.

Exemplo 2

Calcule o ângulo entre os planos $\pi_1 : -y + 1 = 0$ *e* $\pi_2 : y + z + 2 = 0$.

Solução.
Temos que $\overrightarrow{v_1} = (0,-1,0) \perp \pi_1$ e $\overrightarrow{v_2} = (0,1,1) \perp \pi_2$. Logo, $\angle(\pi_1,\pi_2)$ é o menor ângulo positivo cujo cosseno é

$$\begin{aligned}\cos\angle(\pi_1,\pi_2) &= |\cos\angle(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2})| = \frac{|\langle\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}\rangle|}{\|\overrightarrow{v_1}\|\,\|\overrightarrow{v_2}\|} \\ &= \frac{|\langle(0,-1,0),(0,1,1)\rangle|}{\|(0,-1,0)\|\,\|(0,1,1)\|} = \frac{|-1|}{(1)\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

Portanto, $\angle(\pi_1,\pi_2) = 45^o = \dfrac{\pi}{4}$. $\square$

3. Ângulo entre uma reta r e um plano π

Definição 3

Sejam r uma reta e π um plano no espaço. Sejam $\overrightarrow{w}$ um vetor normal ao plano π e $\overrightarrow{v}$ um vetor paralelo à reta r.

Seja θ o menor ângulo não negativo entre r e w $(0 \leq \theta \leq \pi/2)$. O **ângulo entre r e π** *é, por definição, o complementar do ângulo θ.*

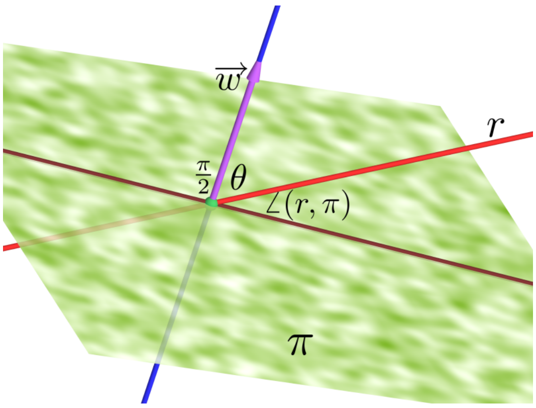

Figura 5: $\angle(r,\pi) = \frac{\pi}{2} - \theta$.

Isto é,

$$\boxed{\angle(r,\pi) = \frac{\pi}{2} - \theta}$$

Logo,

$$\boxed{\operatorname{sen} \angle(r,\pi) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta = \frac{|\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle|}{\|\overrightarrow{v}\|\,\|\overrightarrow{w}\|}}$$

Exemplo 3

Calcule o seno do ângulo entre a reta r e o plano π, onde

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 2t - 1\ ; \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 4 \end{cases} \qquad e \qquad \pi : x - 2y + 3 = 0\,.$$

Solução.

Temos que $\overrightarrow{v} = (1, 2, 0) \parallel r$ e $\overrightarrow{w} = (1, -2, 0) \perp \pi$. Logo,

$$\operatorname{sen} \angle(r,\pi) = \frac{|\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle|}{\|\overrightarrow{v}\|\,\|\overrightarrow{w}\|} = \frac{|\langle (1,2,0), (1,-2,0) \rangle|}{\|(1,2,0)\|\,\|(1,-2,0)\|} = \frac{|1 - 4 + 0|}{\sqrt{5}\,\sqrt{5}} = \frac{3}{5}\,.$$

□

4. Distância de um ponto P_0 a um plano π

Definição 4

A **distância do ponto P_0 ao plano π**, *designada $d(P_0, \pi)$ é, por definição, a menor das distâncias de P_0 aos pontos $P \in \pi$. Isto é,*

$$\boxed{d(P_0, \pi) = \min\{\, d(P_0, P) \mid P \in \pi \,\}}$$

Seja $P^\star$ o ponto de interseção de π com a reta r, que passa por P_0 e é perpendicular a π.

Se P é um ponto qualquer no plano π, diferente de $P^\star$, obtemos, pelo teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo retângulo $\triangle P_0 P^\star P$, que:

$$d(P_0, P)^2 = d(P_0, P^\star)^2 + d(P^\star, P)^2 > d(P_0, P^\star)^2.$$

Logo, $d(P_0, P) > d(P_0, P^\star)$ e, portanto, $d(P_0, P^\star) = \min\{\, d(P_0, P) \mid P \in \pi \,\}$.

Isto é,

$$\boxed{d(P_0, \pi) = d(P_0, P^\star)}$$

Se $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $\pi : ax+by+cz = d$, então $\overrightarrow{w} = (a, b, c) \parallel r$ e as equações paramétricas de r são:

$$r : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \quad ; \quad t \in \mathbb{R}\,. \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

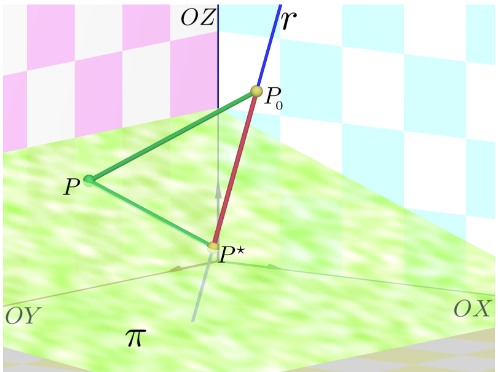

Figura 6: Cálculo de $d(P_0, \pi)$.

Como $P^\star \in r$, temos $P^\star = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$, para algum valor $t \in \mathbb{R}$ a determinar.

Além disso, $P^\star \in \pi$. Logo,

$$a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c(z_0 + ct) = d\,,$$

ou seja,

$$(a^2 + b^2 + c^2)t = d - ax_0 - by_0 - cz_0 \iff t = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 - d}{a^2 + b^2 + c^2}\,.$$

Assim,

$$\begin{aligned} d(P_0, P^\star) &= \|\overrightarrow{P_0P^\star}\| = \|(at, bt, ct)\| = \|t(a, b, c)\| = |t|\, \|(a, b, c)\| \\ &= \left| -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 - d}{a^2 + b^2 + c^2} \right| \|(a, b, c)\| \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\|(a, b, c)\|^2} \|(a, b, c)\| \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\|(a, b, c)\|}. \end{aligned}$$

Logo, a distância do ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ao plano $\pi : ax+by+cz = d$ é

$$\boxed{d(P_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

Exemplo 4

Calcule a distância do ponto $A = (1, 2, 3)$ *ao plano* $\pi : 2x + y - 5z = 4$ *.*

Solução.

(a) Usando a fórmula:

$$d(A, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|2(1) + 1(2) - 5(3) - 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-5)^2}} = \frac{15}{\sqrt{30}} = \sqrt{\frac{15}{2}}\,.$$

(b) Sem usar a fórmula:

A reta r que passa por $A = (1, 2, 3)$ e é paralela ao vetor $\overrightarrow{w} = (2, 1, -5) \perp \pi$, é dada por:

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - 5t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Seja $\{B\} = r \cap \pi$. As coordenadas de $B = (1 + 2t, 2 + t, 3 - 5t)$ satisfazem à equação de π:

$$2(1 + 2t) + (2 + t) - 5(3 - 5t) = 4\,,$$

ou seja,

$$2 + 4t + 2 + t - 15 + 25t = 4 \Longrightarrow 30t = 15 \Longrightarrow t = \frac{1}{2}\,.$$

Logo, $B = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{w}$, isto é, $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{w} = \frac{1}{2}(2, 1, -5)$ e, portanto,

$$d(A, \pi) = d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{w}\| = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 1 + 25} = \frac{\sqrt{30}}{2} = \sqrt{\frac{15}{2}}$$

é a distância procurada.$\square$

5. Distância entre dois planos

Definição 5

A **distância entre os planos** π_1 **e** π_2*, designada* $d(\pi_1, \pi_2)$*, é, por definição, a menor dentre as distâncias dos pontos de* π_1 *aos pontos de* π_2*. Isto é,*

$$\boxed{d(\pi_1, \pi_2) = \min\{\, d(P, Q) \mid P \in \pi_1 \text{ e } Q \in \pi_2 \,\}}$$

Note que,

- se π_1 e π_2 são coincidentes, isto é, $\pi_1 = \pi_2$, então $d(\pi_1, \pi_2) = 0$;
- se π_1 e π_2 são concorrentes, isto é, $\pi_1 \cap \pi_2$ é uma reta, então $d(\pi_1, \pi_2) = 0$;
- suponhamos agora que π_1 e π_2 são planos paralelos dados pelas equações:

$$\begin{aligned} \pi_1 &: \quad ax + by + cz = d_1 \\ \pi_2 &: \quad ax + by + cz = d_2. \end{aligned}$$

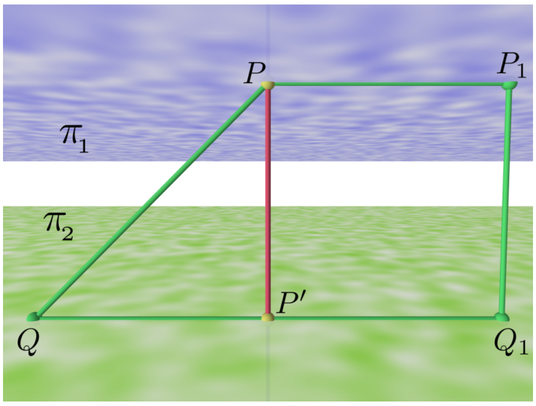

Figura 7: Cálculo de $d(\pi_1, \pi_2)$.

Sejam $P_1 \in \pi_1$ e Q_1 o pé da perpendicular baixada do ponto P_1 sobre o plano π_2.

Sejam $P \in \pi_1$, $Q \in \pi_2$ e P' o pé da perpendicular baixada do ponto P sobre o plano π_2.

Então, como $P_1Q_1Q'P$ é um retângulo,

$$d(P, Q) \geq d(P, P') = d(P_1, Q_1)\,.$$

Assim,

$$\boxed{d(\pi_1, \pi_2) = d(P_1, Q_1) = d(P_1, \pi_2)\,, \qquad \text{qualquer que seja } P_1 \in \pi_1}$$

Se $P_1 = (x_1, y_1, z_1) \in \pi_1$, então $ax_1 + by_1 + cz_1 = d_1$, então:

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(P_1, \pi_2) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\,.$$

Isto é, a distância entre os planos $\pi_1 : ax+by+cz = d_1$ e $\pi_2 : ax+by+cz = d_2$ é dada por:

$$\boxed{d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

Exemplo 5

Calcule a distância entre os planos $\pi_1 : x+2y+z = 2$ *e* $\pi_2 : 2x+4y+2z = 6$.

Solução.

Como $\pi_2 : x + 2y + z = 3$, $\pi_1 \parallel \pi_2$; logo, $\quad d(\pi_1, \pi_2) = \dfrac{|3-2|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

□

6. Distância entre uma reta e um plano

Definição 6

A **distância entre uma reta** r **e um plano** π *é o número* $d(r, \pi)$ *dado por:*

$$\boxed{d(r,\pi) = \min\{\, d(P,Q) \mid P \in r \quad e \quad Q \in \pi\,\}}$$

Note que, se $r \cap \pi \neq \varnothing$ ($r \subset \pi$ ou $r \cap \pi = \{P\}$), então $d(r, \pi) = 0$.

O caso interessante a considerar ocorre quando $r \cap \pi = \varnothing$, isto é, $r \parallel \pi$.

Sejam $P_1 \in r$ e Q_1 o pé da perpendicular baixada do ponto P_1 sobre o plano π.

Sejam $P \in r$ e $Q \in \pi$ pontos arbitrários e P' o pé da perpendicular baixada do ponto P sobre o plano π. Então,

$$d(P, Q) \geq d(P, P') = d(P_1, Q_1)\,,$$

pois $P_1Q_1P'P$ é um retângulo. Logo,

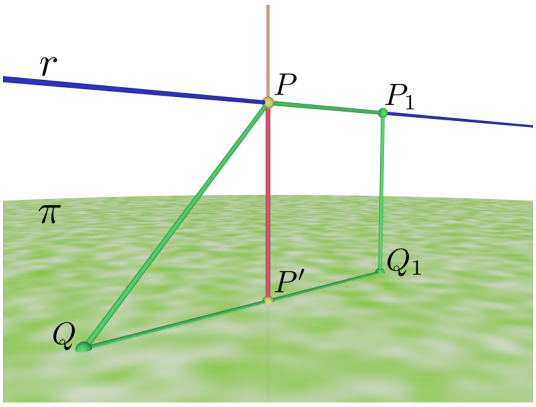

Figura 8: Cálculo de $d(r, \pi_2)$.

$$\boxed{d(r,\pi) = d(P_1, Q_1) = d(P_1, \pi)\,, \qquad \text{qualquer que seja } P_1 \in r}$$

Exemplo 6

Mostre que a reta r *é paralela ao plano* π*, onde*

$$r : \frac{x+2}{6} = \frac{3y+1}{-6} = \frac{1-z}{3} \qquad \text{e} \qquad \pi : 2x - 3y + 6z = -3\,.$$

Calcule também $d(r, \pi)$.

Solução.
A equação simétrica de r pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$r : \frac{x+2}{6} = \frac{y+\frac{1}{3}}{-2} = \frac{z-1}{-3}\,.$$

Logo, a reta r passa pelo ponto $A = (-2, -\frac{1}{3}, 1)$ e é paralela ao vetor $\overrightarrow{v} = (6, -2, -3)$, e o plano π é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{w} = (2, -3, 6)$.
Temos $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{w}$, pois:

$$\begin{array}{rcl} \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle & = & \langle (6, -2, -3), (2, -3, 6) \rangle \\ & = & (6)(2) + (-2)(-3) + (-3)(6) = 12 + 6 - 18 = 0 \end{array}.$$

Logo, r é paralela ao plano π ou r está contida no plano π.
Para mostrar que $r \not\subset \pi$, basta verificar que um ponto de r não pertence a π.
De fato, $A = (-2, -\frac{1}{3}, 1) \notin \pi$, pois

$$2(-2) - 3(-\tfrac{1}{3}) + 6(1) = -4 + 1 + 6 = 3 \neq -3\,.$$

Portanto, $r \cap \pi = \varnothing$, isto é, $r \parallel \pi$. Além disso,

$$d(r, \pi) = d(A, \pi) = \frac{\left|\, 2(-2) - 3(-\frac{1}{3}) + 6(1) + 3 \,\right|}{\sqrt{4 + 9 + 36}} = \frac{6}{7}\,.$$

□

7. Distância de um ponto a uma reta

Definição 7

Sejam P um ponto e r uma reta no espaço. A **distância do ponto P à reta r**, *designada $d(P, r)$, é o número*

$$\boxed{d(P, r) = \min\{\, d(P, Q) \mid Q \in r \,\}}$$

Seja P' o pé da perpendicular baixada do ponto P sobre a reta r.

Para todo ponto $Q \in r$, $Q \neq P'$, temos, pelo teorema de Pitágoras, que:

$$\begin{array}{rcl} d(P, Q)^2 & = & d(P, P')^2 + d(P', Q)^2 \\ & > & d(P, P')^2. \end{array}$$

Logo, $d(P, Q) > d(P, P')$ e, portanto,

$$\boxed{d(P, r) = d(P, P')}$$

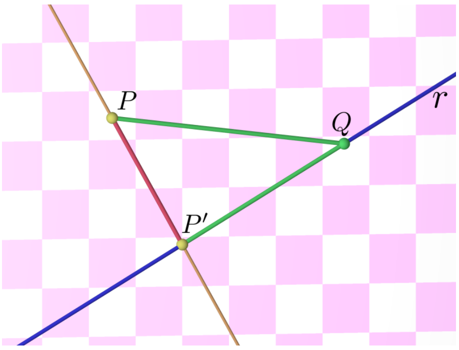

Figura 9: Cálculo de $d(P, r)$.

Assim, para calcular a distância de P a r devemos:

- determinar o ponto P', pé da perpendicular baixada de P sobre a reta r;
- calcular $d(P, P') = \|\overrightarrow{PP'}\|$.

Exemplo 7

Calcule a distância entre $P = (2, 5, -1)$ e a reta r que passa por $P_0 = (1, -1, 2)$ e é paralela ao vetor $\overrightarrow{v} = (1, 0, 1)$.

Solução.

Seja Q o pé da perpendicular baixada do ponto P sobre a reta r e seja $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $Q = P_0 + t_0\overrightarrow{v}$.

Então, $\overrightarrow{PQ}$ é perpendicular à reta r se, e somente se,

$$0 = \langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{PP_0} + t_0\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{PP_0}, \overrightarrow{v} \rangle + t_0\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle .$$

Como $\overrightarrow{PP_0} = (-1, -6, 3)$ e $\overrightarrow{v} = (1, 0, 1)$:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \overrightarrow{PP_0}, \overrightarrow{v} \rangle + t_0\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle \\ &= \langle (-1, -6, 3), (1, 0, 1) \rangle + t_0\langle (1, 0, 1), (1, 0, 1) \rangle \\ &= (-1 + 3) + t_0(1 + 1) = 2 + 2t_0 . \end{aligned}$$

Logo, $t_0 = -1$ e, portanto,

$$Q = P_0 + t_0\overrightarrow{v} = (1,-1,2) - (1,0,1) = (0,-1,1)\,.$$

Assim,

$$\begin{aligned} d(P,r) &= d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(2-0)^2 + (5-(-1))^2 + (-1-1)^2} \\ &= \sqrt{4+36+4} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}\,. \end{aligned}$$

□

Exemplo 8

Determine o conjunto $\mathcal{S}$ dos pontos do espaço que estão a distância 2 da reta r, paralela ao vetor $\overrightarrow{v} = (1,2,1)$ que passa pela origem.

Solução.

Temos que $Q \in \mathcal{S}$ se, e somente se, existe $P \in r$ tal que $\overrightarrow{PQ} \perp r$ e $\|\overrightarrow{PQ}\| = 2$.
Sejam $P = (t, 2t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, um ponto de r e $Q = (x,y,z)$.
Então,

$$\overrightarrow{PQ} \perp r \iff \overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{v} \iff \langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{v} \rangle = 0,$$

se, e somente se,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle (x-t, y-2t, z-t), (1,2,1) \rangle \\ &= x - t + 2y - 4t + z - t = x + 2y + z - 6t\,. \end{aligned}$$

Isto é,

$$t = \frac{x+2y+z}{6}\,.$$

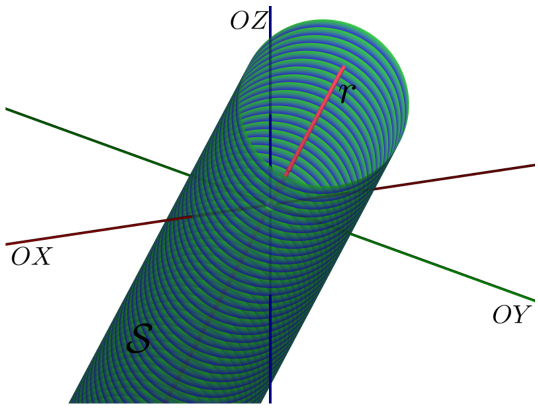

Figura 10: Exemplo ??.

Suponhamos, agora, que $\|\overrightarrow{PQ}\| = 2$. Como

$$P = \left(\frac{x+2y+z}{6}, \frac{2(x+2y+z)}{6}, \frac{x+2y+z}{6} \right),$$

obtemos

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \left(x - \frac{x+2y+z}{6}, y - \frac{2(x+2y+z)}{6}, z - \frac{x+2y+z}{6} \right) \\ &= \left(\frac{5x-2y-z}{6}, \frac{-2x+2y-2z}{6}, \frac{-x-2y+5z}{6} \right).\end{aligned}$$

Logo, $d(Q,r) = d(Q,P) = \|\overrightarrow{PQ}\| = 2$ se, e somente se, $\|\overrightarrow{PQ}\|^2 = 4$, isto é, se, e somente se,

$$4 = \|\overrightarrow{PQ}\|^2 = \frac{(5x-2y-z)^2}{36} + \frac{(-2x+2y-2z)^2}{36} + \frac{(-x-2y+5z)^2}{36},$$

se e somente se,

$$(5x-2y-z)^2 + (-2x+2y-2z)^2 + (-x-2y+5z)^2 = 4(36).$$

Desenvolvendo os quadrados e simplificando, obtemos a equação de $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S} : 30x^2 + 12y^2 + 30z^2 - 24xy - 12xz - 24yz - 144 = 0.$$

O conjunto $\mathcal{S}$ é o cilindro circular reto de raio 2 cujo eixo é a reta r. $\square$

Exemplo 9

Determine o conjunto dos pontos do plano $\pi : x + y + 2z = 1$ que estão a distância três da reta r que passa pelos pontos $A = (1,0,1)$ e $B = (2,-1,1)$.

Solução.

A reta r é paralela ao vetor $\overrightarrow{AB} = (1,-1,0)$ e o plano π é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{w} = (1,1,2)$.

Como $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{w} \rangle = \langle (1,-1,0), (1,1,2) \rangle = 1 - 1 = 0$, e $A \notin \pi$ (note que as coordenadas de $A = (1,0,1)$ não satisfazem a equação de π) obtemos que $r \parallel \pi$.

Sejam $P = A + t\overrightarrow{AB} = (1+t, -t, 1) \in r$ e $Q = (x,y,z) \in \pi$ tais que $\overrightarrow{PQ} \perp r$ e $d(Q,r) = d(P,Q) = 3$. Então,

$$\begin{aligned}\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{AB} \rangle &= \langle (x-1-t, y+t, z-1), (1,-1,0) \rangle \\ &= x - 1 - t - y - t = x - y - 2t - 1 = 0\end{aligned},$$

ou seja,

$$x - y = 2t + 1\,.$$

Como $Q \in \pi$, as suas coordenadas x, y e z satisfazem ao sistema formado pela equação acima e pela equação de π:

$$\begin{cases} x - y = 2t + 1 \\ x + y = -2z + 1\,. \end{cases}$$

Somando as equações, obtemos $2x = 2 + 2t - 2z$, ou seja, $x = 1 + t - z$, e subtraindo a primeira equação da segunda, obtemos $2y = -2z - 2t \iff y = -t - z$. Então, as coordenadas de um ponto $Q = (x, y, z)$ do plano π que se projeta perpendicularmente sobre o ponto $P = (1 + t, -t, 1) \in r$, satisfazem

$$\begin{cases} x = 1 + t - z \\ y = -t - z\,. \end{cases}$$

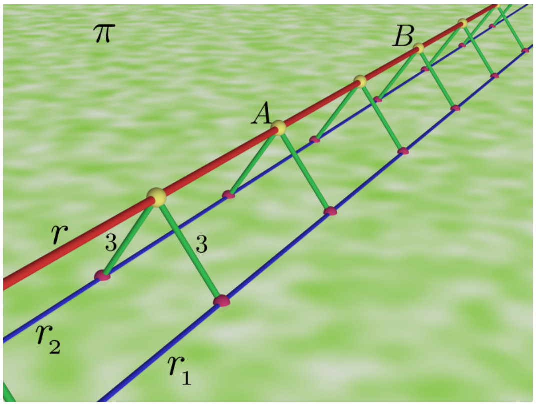

Figura 11: Exemplo **??**.

Além disso, devemos ter $d(P, Q) = 3$, ou seja,

$$\begin{aligned} 9 &= d(P, Q)^2 = (x - (1 + t))^2 + (y - (-t))^2 + (z - 1)^2 \\ &= (-z)^2 + (-z)^2 + (z - 1)^2 = 3z^2 - 2z + 1\,. \end{aligned}$$

Resolvendo a equação $3z^2 - 2z + 1 = 9$, ou seja, $3z^2 - 2z - 8 = 0$, obtemos as raízes $z = 2$ e $z = -\frac{4}{3}$.

Substituindo estas raízes no sistema (**??**), obtemos as retas

$$r_1 : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -2 - t \ ; \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 2 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad r_2 : \begin{cases} x = \dfrac{7}{3} + t \\ y = \dfrac{4}{3} - t \ ; \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

paralelas à reta r, contidas no plano π e cujos pontos estão a distância três de r. $\square$

Capítulo 12

Distâncias entre retas no espaço

Sejam $r_1 = \{ P_1 + t\overrightarrow{v_1} \mid t \in \mathbb{R}\}$ e $r_2 = \{ P_2 + t\overrightarrow{v_2} \mid t \in \mathbb{R}\}$ duas retas no espaço. Se $r_1 \neq r_2$, sabemos que r_1 e r_2 são concorrentes (isto é, $r_1 \cap r_2 \neq \varnothing$) ou não se intersectam. Quando a segunda possibilidade ocorre, temos ainda duas situações a considerar: as retas podem ser **paralelas** ou **reversas**.

Definição 1

A **distância entre** r_1 **e** r_2 *é o número* $d(r_1, r_2)$ *dado por:*

$$\boxed{d(r_1, r_2) = \min d(P, Q) \mid P \in r_1 \quad e \quad Q \in r_2\}}$$

Se as retas se intersectam, por definição, $d(r_1, r_2) = 0$. Assim, os casos importantes a considerar ocorrem quando $r_1 \cap r_2 = \varnothing$.

1. Distância entre duas retas paralelas no espaço

Suponhamos que $r_1 \parallel r_2$. Então, $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ são colineares, $r_1 \cap r_2 = \varnothing$ e existe um plano π que contém ambas as retas. Seja $P_1 \in r_1$ e R_1 o pé da perpendicular baixada de P_1 sobre a reta r_2. Então,

$$d(P, Q) \geq d(P, R) = d(P_1, R_1)\,.$$

quaisquer que sejam os pontos $P \in r_1$ e $Q \in r_2$, onde R é o pé da perpendicular baixada de P sobre a reta r_2, pois P_1R_1RP é um retângulo contido no plano π.

Logo, qualquer que seja o ponto $P_1 \in r_1$, temos que (figura ??):

$$d(r_1, r_2) = d(P_1, R_1) = d(P_1, r_2).$$

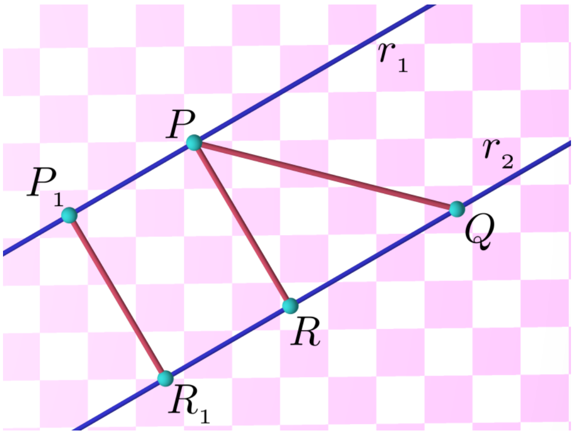

Figura 1: $d(P, Q) \geq d(r_1, r_2)$, para todo $Q \in r_2$ e $P \in r_1$.

Exemplo 1

Mostre que a reta r_1, que passa por $A_1 = (1, 2, 1)$ e $B_1 = (2, 1, 0)$, é paralela à reta r_2 que passa por $A_2 = (0, 1, 2)$ e $B_2 = (1, 0, 1)$. Calcule a distância entre r_1 e r_2.

Solução.

Temos:

$$\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{A_1B_1} = (1, -1, -1) \parallel r_1 \qquad \text{e} \qquad \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{A_2, B_2} = (1, -1, -1) \parallel r_2.$$

Logo, $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v_2}$ e as retas r_1 e r_2 são:

$$\begin{aligned} r_1 &= \{A_1 + t\,\overrightarrow{v_1} \,|\, t \in \mathbb{R}\} &= \{(1+t, 2-t, 1-t) \,|\, t \in \mathbb{R}\}\,, \\ r_2 &= \{A_2 + s\,\overrightarrow{v_2} \,|\, s \in \mathbb{R}\} &= \{(s, 1-s, 2-s) \,|\, s \in \mathbb{R}\}\,. \end{aligned}$$

Para verificar que $r_1 \parallel r_2$ basta verificar que um ponto de r_2 não pertence a r_1, pois já sabemos que $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ são múltiplos. Por exemplo, vejamos que $B_2 = (1, 0, 1) \notin r_1$.

De fato, se $B_2 = (1, 0, 1) \in r_1$, então deveria existir um valor $t \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{cases} 1 + t = 1 \\ 2 - t = 0 \\ 1 - t = 1\,. \end{cases}$$

Da segunda destas identidades obtemos $t = 2$, e substituindo este valor de t na primeira identidade, obtemos $3 = 1 + 2 = 1$, um absurdo.

Portanto, $B_2 \notin r_1$ e as retas r_1 e r_2 são, efetivamente, paralelas.

Para calcular a distância $d(r_1, r_2)$, basta calcular a distância de um ponto de r_1 a r_2. Por exemplo, calculemos $d(A_1, r_2)$.
Seja $C = (s, 1-s, 2-s) \in r_2$, tal que o vetor

$$\overrightarrow{A_1C} = (-1+s, -1-s, 1-s)$$

é perpendicular à reta r_2, isto é, ao vetor $\overrightarrow{v_2} = (1, -1, -1)$.
Temos:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_1C} \perp \overrightarrow{v_1} \iff & 0 = \langle \overrightarrow{A_1C}, \overrightarrow{v_1} \rangle \\ & \quad = \langle (-1+s, -1-s, 1-s), (1, -1, -1) \rangle \\ & \quad = -1+s+1+s-1+s = 3s-1 \\ \iff & s = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} d(r_1, r_2) &= d(A_1, C) = \|\overrightarrow{A_1C}\| \\ &= \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}\sqrt{24} \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{6} \end{aligned}$$

é a distância procurada. □

2. Distância entre duas retas reversas no espaço

Sejam $r_1 = \{\, P_1 + t\overrightarrow{v_1} \mid t \in \mathbb{R}\}$ e $r_2 = \{\, P_2 + t\overrightarrow{v_2} \mid t \in \mathbb{R}\}$ duas retas **reversas** no espaço (isto é, $r_1 \cap r_2 = \varnothing$ e os vetores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ não colineares). Por definição, a distância entre r_1 e r_2 é a menor das distâncias entre um ponto de r_1 e um ponto de r_2:

$$d(r_1, r_2) = \min\{d(P, Q) \mid P \in r_1 \ \text{ e } \ Q \in r_2\}.$$

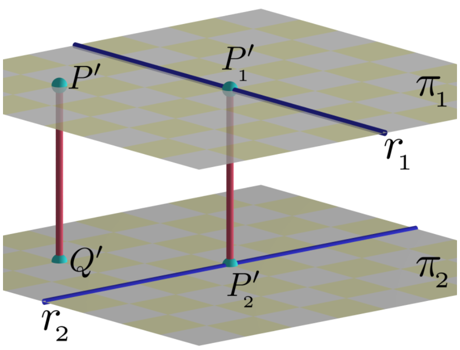

Figura 2: Retas reversas r_1 e r_2.

Sejam π_1 e π_2 os planos paralelos aos vetores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ que contêm, respectivamente, os pontos P_1 e P_2.

Já sabemos que

$$d(\pi_1,\pi_2) = \min\{d(P,Q)\,|\,P\in\pi_1 \;\text{ e }\; Q\in\pi_2\} = d(P',Q')\,,$$

onde $P'\in\pi_1$ é um ponto arbitrário e $Q'\in\pi_2$ é o pé da perpendicular baixada desde o ponto P' sobre o plano π_2. Isto é, $\overrightarrow{P'Q'}\perp\pi_2$ (ou a π_1).

Pela própria definição, temos

$$d(r_1,r_2)\geq d(\pi_1,\pi_2)\,,$$

pois $r_1\subset\pi_1$ e $r_2\subset\pi_2$.

Afirmamos que

$$\boxed{d(r_1,r_2) = d(\pi_1,\pi_2)}$$

Para isto, basta mostrar que existem $P_1'\in r_1$ e $P_2'\in r_2$, tais que, $\overrightarrow{P_1'P_2'}$ é perpendicular a r_1 e a r_2, isto é, perpendicular aos vetores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$.

Consideremos

$$P_1' = P_1 + t\overrightarrow{v_1}\in r_1 \text{ e } P_2' = P_2 + s\overrightarrow{v_2}\in r_2.$$

Como $\overrightarrow{P_1'P_2'} = \overrightarrow{P_1P_2} + s\overrightarrow{v_2} - t\overrightarrow{v_1}$,

$$\overrightarrow{P_1'P_2'}\perp\overrightarrow{v_1} \iff \langle\overrightarrow{P_1'P_2'},\overrightarrow{v_1}\rangle = \langle\overrightarrow{P_1P_2} + s\overrightarrow{v_2} - t\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_1}\rangle = 0\,,$$

$$\overrightarrow{P_1'P_2'}\perp\overrightarrow{v_2} \iff \langle\overrightarrow{P_1'P_2'},\overrightarrow{v_2}\rangle = \langle\overrightarrow{P_1P_2} + s\overrightarrow{v_2} - t\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}\rangle = 0\,.$$

Desenvolvendo os produtos internos acima, obtemos que $\overrightarrow{P_1'P_2'}$ é perpendicular aos vetores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$, simultaneamente, se, e somente se,

$$\begin{cases} \langle\overrightarrow{P_1P_2},\overrightarrow{v_1}\rangle + s\langle\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_1}\rangle - t\langle\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_1}\rangle = 0\\ \langle\overrightarrow{P_1P_2},\overrightarrow{v_2}\rangle + s\langle\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_2}\rangle - t\langle\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}\rangle = 0\,,\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} s\langle\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_1}\rangle - t\langle\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_1}\rangle = -\langle\overrightarrow{P_1P_2},\overrightarrow{v_1}\rangle\\ s\langle\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_2}\rangle - t\langle\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}\rangle = -\langle\overrightarrow{P_1P_2},\overrightarrow{v_2}\rangle\,.\end{cases}$$

Como

$$\begin{aligned}(\langle\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_1}\rangle,\langle\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_2}\rangle)s &+ (-\langle\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_1}\rangle,-\langle\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}\rangle)t\\ &= (-\langle\overrightarrow{P_1P_2},\overrightarrow{v_1}\rangle,-\langle\overrightarrow{P_1P_2},\overrightarrow{v_2}\rangle),\end{aligned}$$

o sistema possui uma única solução se, e só se, os vetores

$$(\langle \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1}\rangle, \langle \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2}\rangle) \quad \text{e} \quad (-\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1}\rangle, -\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\rangle)$$

não são múltiplos, isto é, se e só, e somente, o determinante

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} \langle \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1}\rangle & -\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1}\rangle \\ \langle \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2}\rangle & -\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\rangle \end{pmatrix} &= -\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\rangle^2 + \langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1}\rangle\langle \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2}\rangle \\
&= \|\overrightarrow{v_1}\|^2\|\overrightarrow{v_2}\|^2 - \langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\rangle^2 \\
&= \|\overrightarrow{v_1}\|^2\|\overrightarrow{v_2}\|^2 - \|\overrightarrow{v_1}\|^2\|\overrightarrow{v_2}\|^2 \cos^2 \angle(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) \\
&= \|\overrightarrow{v_1}\|^2\|\overrightarrow{v_2}\|^2 \left(1 - \cos^2 \angle(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})\right) \\
&= \|\overrightarrow{v_1}\|^2\|\overrightarrow{v_2}\|^2 \operatorname{sen}^2 \angle(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}),
\end{aligned}$$

é diferente de zero.

Sendo $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ vetores não nulos e não colineares, temos que $0 < \angle(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) < \pi$ e, em particular, $\operatorname{sen}\angle(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) \neq 0$.

Portanto, o determinante anterior é diferente de zero e o sistema em questão possui uma única solução para s e t. Estes valores determinam um único par de pontos $P_1' \in r_1$ e $P_2' \in r_2$, tais que, $\overrightarrow{P_1'P_2'}$ é perpendicular a r_1 e a r_2, simultaneamente. Então, a distância entre r_1 e r_2 é

$$\boxed{d(r_1, r_2) = d(P_1', P_2')}$$

Exemplo 2

Mostre que as retas

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 0 \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R} \qquad e \qquad r_2 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 \\ z = 1 + t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}$$

são reversas, calcule $d(r_1, r_2)$ e determine a única reta r_3 que intersecta r_1 e r_2 perpendicularmente.

Solução.

Temos que $r_1 \parallel \overrightarrow{v_1} = (1, 2, 0)$ e $r_2 \parallel \overrightarrow{v_2} = (1, 0, 1)$. Como $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ não são colineares, as retas podem ser concorrentes ou reversas.

Para mostrar que r_1 e r_2 são reversas, basta verificar que $r_1 \cap r_2 = \varnothing$.
Suponhamos, por absurdo, que $r_1 \cap r_2 \neq \varnothing$. Então deveriam existir valores $s, t \in \mathbb{R}$, tais que

$$(1+t, 2t, 0) = (2+s, 3, 1+s)\,.$$

Igualando as coordenadas, obtemos:

$$\begin{aligned} 1+t &= 2+s \\ 2t &= 3 \\ 0 &= 1+s\,. \end{aligned}$$

Da segunda identidade, temos $t = \dfrac{3}{2}$ e da terceira, $s = -1$. Estes valores são incompatíveis com a primeira identidade, pois $1+t = 1+\dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{2} \neq 1 = 2+(-1)$ $= 1+s$. Assim, o sistema não tem solução e os valores procurados para s e t não existem.
Logo, as retas r_1 e r_2 não se intersectam e são, portanto, reversas.

Vamos determinar pontos $P_1' = (1+t, 2t, 0) \in r_1$ e $P_2' = (2+s, 3, 1+s) \in r_2$ tais que o vetor $\overrightarrow{P_1'P_2'} = (1+s-t, 3-2t, 1+s)$ seja perpendicular a $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$, simultaneamente.
Devemos achar valores $s, t \in \mathbb{R}$, tais que,

$$\left\{\begin{array}{rcl} \langle \overrightarrow{P_1'P_2'}, \overrightarrow{v_1}\rangle &=& 0 \\ \langle \overrightarrow{P_1'P_2'}, \overrightarrow{v_2}\rangle &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \langle (1+s-t, 3-2t, 1+s), (1,2,0)\rangle &=& 0 \\ \langle (1+s-t, 3-2t, 1+s), (1,0,1)\rangle &=& 0 \end{array}\right.$$

ou seja,

$$\left\{\begin{array}{rcl} s-5t &=& -7 \\ 2s-t &=& -2\,. \end{array}\right.$$

Substituindo $t = 2+2s$ da segunda equação, na primeira, obtemos $s-10-10s = -7$. Então, $s = -\dfrac{1}{3}$, $t = 2+2\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{4}{3}$,

$$P_1' = \left(\frac{7}{3}, \frac{8}{3}, 0\right)\,, \quad P_2' = \left(\frac{5}{3}, 3, \frac{2}{3}\right) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{P_1'P_2'} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\,.$$

Assim, a distância entre r_1 e r_2 é

$$d(r_1, r_2) = \|\overrightarrow{P_1', P_2'}\| = \frac{1}{3}\sqrt{4+1+4} = 1$$

e

$$r_3 = \left\{ P_1' + t\overrightarrow{P_1'P_2'} \,|\, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \left(\frac{7}{3} - \frac{2}{3}t\,,\, \frac{8}{3} + \frac{1}{3}t\,,\, \frac{2}{3}t \right) \,\Big|\, t \in \mathbb{R} \right\},$$

é a reta procurada. □

Exemplo 3

Sejam r_1 a reta que passa pelo ponto $P_1 = (1,1,2)$ e é paralela ao vetor $\overrightarrow{v_1} = (1,1,0)$ e r_2 a reta de interseção dos planos $\pi_1 : x + 2y + z = 4$ e $\pi_2 : x + z = 2$.

(a) *Mostre que r_1 e r_2 são retas reversas.*

(b) *Calcule a distância entre r_1 e r_2.*

(c) *Determine a única reta r que intersecta r_1 e r_2 perpendicularmente.*

Solução.

(a) A reta r_1 é dada por

$$r_1 = \{P_1 + t\overrightarrow{v_1} \,|\, t \in \mathbb{R}\} = \{(1+t, 1+t, 2) \,|\, t \in \mathbb{R}\}.$$

Determinemos a equação paramétrica da reta r_2.

Sabemos que a reta r_2 é paralela ao vetor $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}$, onde $\overrightarrow{u} = (1,2,1) \perp \pi_1$ e $\overrightarrow{w} = (1,0,1) \perp \pi_2$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w} &= \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) \\ &= (2, 0, -2). \end{aligned}$$

Para achar um ponto $P_2 \in r_2$, tomamos $x = 2$, por exemplo, nas equações dos planos π_1 e π_2:

$$\begin{cases} 2 + 2y + z = 4 \\ 2 + z = 2 \end{cases} \Longrightarrow z = 0 \Longrightarrow y = 1 \Longrightarrow \quad P_2 = (2,1,0) \in r_2\,.$$

Logo, r_2 é a reta que passa pelo ponto $P_2 = (2,1,0)$ e é paralela ao vetor $\overrightarrow{v_2} = (1,0,-1)$, ou seja:

$$r_2 = \{P_1' + s\overrightarrow{v_2} \,|\, s \in \mathbb{R}\} = \{(s, 1, 2-s) \,|\, s \in \mathbb{R}\}.$$

Como os vetores $\overrightarrow{v_1} = (1,1,0)$ e $\overrightarrow{v_2} = (1,0,-1)$ não são colineares, as retas r_1 e r_2 são concorrentes ou reversas.

Suponhamos que $r_1 \cap r_2 = \{Q\}$. Então $Q = (1+t, 1+t, 2) = (s, 1, 2-s)$ para certos valores $s, t \in \mathbb{R}$, que tentaremos determinar.
Devemos ter $1+t = s$, $1+t = 1$ e $2 = 2-s$. Da segunda identidade, obtemos $t = 0$ e, da terceira, $s = 0$. No entanto, estes valores não são compatíveis com a primeira identidade, pois $1+t = 1+0 \neq 0 = s$.
Assim, o ponto $Q \in r_1 \cap r_2$ não existe. Isto é, $r_1 \cap r_2 = \varnothing$ e, portanto, as retas são reversas.

(b) e **(c)** Devemos determinar $P \in r_1$ e $P' \in r_2$, tais que $\overrightarrow{PP'} \perp \overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{PP'} \perp \overrightarrow{v_2}$, simultaneamente.

Como $P = (1+t, 1+t, 2)$, $P' = (s, 1, 2-s)$ e $\overrightarrow{PP'} = (s-t-1, -t, -s)$, as condições de perpendicularidade, em termos do produto interno, são:

$$\begin{cases} \langle \overrightarrow{PP'}, \overrightarrow{v_1} \rangle &= 0 \\ \langle \overrightarrow{PP'}, \overrightarrow{v_2} \rangle &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \langle (s-t-1, -t, -s), (1,1,0) \rangle = 0 \\ \langle (s-t-1, -t, -s), (1,0,-1) \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} s-t-1-t &= 0 \\ s-t-1+s &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} s-2t &= 1 \\ 2s-t &= 1 \end{cases}$$

Substituindo $s = 2t+1$ da primeira equação, na segunda, obtemos $4t+2-t = 1$ ou seja, $t = -\dfrac{1}{3}$ e $s = 2\left(-\dfrac{1}{3}\right) + 1 = \dfrac{1}{3}$.

Portanto,

$$P = (1+t, 1+t, 2) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 2\right) \; ; \quad P' = (s, 1, 2-s) = \left(\frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}\right) \; ;$$

e

$$\overrightarrow{PP'} = (s-t-1, -t, -s) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}(-1, 1, -1)\,.$$

Assim,

$$d(r_1, r_2) = \|\overrightarrow{PP'}\| = \frac{1}{3}\sqrt{1+1+1} = \frac{\sqrt{3}}{3}\,.$$

A única reta r que intersecta r_1 e r_2 perpendicularmente é a a reta que passa por P e é paralela ao vetor $\overrightarrow{PP'}$, ou seja, paralela ao vetor $\overrightarrow{v} = (-1, 1, -1)$. Logo,

$$r = \{P + t\overrightarrow{v} \,|\, t \in \mathbb{R}\} = \left\{ \left(\frac{2}{3} - t\,,\, \frac{2}{3} + t\,,\, 2 - t\right) \,\Big|\, t \in \mathbb{R} \right\}$$

é a reta procurada. □

Capítulo 13

Exemplos de revisão

Exemplo 1

Considere os pontos $A = (1, 2, 2)$, $B = (2, 4, 3)$, $C = (-1, 4, 2)$, $D = (7, 1, 3)$ *e* $E = (-4, 16, 5)$.

(a) *Mostre que* A, B *e* C *não são colineares.*

(b) *Determine a equação paramétrica e a equação cartesiana do plano* π *que contém os pontos* A, B *e* C.

(c) *Determine a área do paralelogramo que possui* A, B *e* C *como vértices.*

(d) *Mostre que* A, B, C *e* D *não são coplanares.*

(e) *Determine o volume do paralelepípedo de vértices* A, B, C *e* D.

(f) *Escreva o vetor* $\overrightarrow{AE}$ *como combinação linear de* $\overrightarrow{AB}$ *e* $\overrightarrow{AC}$.

(g) *Determine a distância do ponto* D *à reta que passa pelos pontos* A *e* B.

(h) *Determine o ponto simétrico do ponto* C *em relação à reta que passa pelos pontos* A *e* B.

(i) *Determine a intersecção da reta que passa por* A *e* B *com a reta* $\ell = \{(7t-7, t-1, 2t-1); t \in \mathbb{R}\}$.

Solução.

(a) Sabemos que:

$$\begin{aligned} A,\ B \text{ e } C \text{ são não colineares } &\iff \overrightarrow{AB} \text{ e } \overrightarrow{AC} \text{ não são múltiplos}\\ &\iff \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{0}\,. \end{aligned}$$

Como $\overrightarrow{AB} = (1,2,1)$, $\overrightarrow{AC} = (-2,2,0)$ e

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \right) \\ &= (-2,-2,6) \neq (0,0,0) = \overrightarrow{0}\,, \end{aligned}$$

concluímos que A, B e C são não colineares.

(b) Temos $\pi = \{A + t\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} \mid t,s \in \mathbb{R}\}$, ou seja, as equações paramétricas de π são:

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + t - 2s \\ y = 2 + 2t + 2s \ ;\ t,s \in \mathbb{R}. \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Para determinar a equação cartesiana de π, sabemos que $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-2,-2,6)$ é perpendicular a π. Logo, a equação cartesiana de π tem a forma

$$\pi : x + y - 3z = d\,,$$

onde

$$d = 1 + 2 - 3(2) = -3\,,$$

pois $A = (1,2,2) \in \pi$.

Portanto, a equação cartesiana de π é

$$\pi : x + y - 3z = -3\,.$$

(c) Seja $\mathcal{R}$ o paralelogramo que possui A, B e C como vértices. Então,

$$\text{área}\,(\mathcal{R}) = \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \|\,(-2,-2,6)\,\| = \sqrt{4+4+36} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}\,.$$

(d) Sabemos que:

$$\begin{aligned} A,\ B,\ C, \text{ e } D \text{ são não coplanares } &\iff \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \text{ e } \overrightarrow{AD} \text{ são LI}\\ &\iff \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}\right] \neq \overrightarrow{0}\,. \end{aligned}$$

Como $\overrightarrow{AD} = (6,-1,1)$, e

$$\begin{aligned} \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right] &= \langle \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \rangle = \langle (-2,-2,6), (6,-1,1) \rangle \\ &= -12 + 2 + 6 = -4 \neq 0\,, \end{aligned}$$

concluímos que A, B, C e D não são coplanares.

(e) Seja $\mathcal{P}$ o paralelepípedo que tem os pontos A, B, C e D por vértices. Então:

$$\text{Vol}\,(\mathcal{P}) = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]\right| = |-4| = 4\,.$$

(f) Temos que $\overrightarrow{AE} = (-5, 14, 3)$. Devemos achar números reais x e y tais que:

$$\overrightarrow{AE} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}\,.$$

Ou seja,

$$(-5, 14, 3) = x(1, 2, 1) + y(-2, 2, 0)\,.$$

Igualando as coordenadas, temos:

$$\begin{cases} -5 = x - 2y \\ 14 = 2x + 2y \\ 3 = x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 2y = 5 + x = 5 + 3 = 8 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}.$$

Observe que os valores encontrados são compatíveis com a segunda equação: $2x + 2y = 2(3) + 2(4) = 6 + 8 = 14$.

Portanto, $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}$ e, em particular, $E \in \pi$.

(g) A reta r que passa por A e B é

$$r = \{A + t\overrightarrow{AB}\,|\, t \in \mathbb{R}\}.$$

Ou seja, as equações paramétricas de r são:

$$r : \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 2 + 2s\ ; \quad s \in \mathbb{R}\,. \\ z = 2 + s \end{cases}$$

Seja $M = (1 + s, 2 + 2s, 2 + s) \in r$ o pé da perpendicular baixada do ponto $D = (7, 1, 3)$ sobre a reta r.

Devemos achar $s \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{DM} \perp \overrightarrow{AB} \iff \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM} \rangle = 0$, onde $\overrightarrow{DM} = (s - 6, 2s + 1, s - 1)$.

Calculando, temos:

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM} \rangle = \ & \langle (1, 2, 1), (s - 6, 2s + 1, s - 1) \rangle = 0 \\ \iff \ & s - 6 + 2(2s + 1) + s - 1 = 0 \\ \iff \ & 2s - 7 + 4s + 2 = 0 \\ \iff \ & 6s = 5 \quad \iff \quad \boxed{s = \frac{5}{6}} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\overrightarrow{DM} = \left(\frac{5}{6} - 6, 2\cdot\frac{5}{6} + 1, \frac{5}{6} - 1\right) = \left(-\frac{31}{6}, \frac{16}{6}, -\frac{1}{6}\right)$$

e

$$d(D, r) = \|\overrightarrow{DM}\| = \frac{1}{6}\sqrt{31^2 + 16^2 + 1^2} = \frac{1}{6}\sqrt{1218}.$$

(h) Seja $N = (1+s, 2+2s, 2+s) \in r$ o pé da perpendicular baixada do ponto $C = (-1, 4, 2)$ sobre a reta r.

Sendo $\overrightarrow{CN} = (s+2, 2s-2, s)$ e $\overrightarrow{AB} = (1, 2, 1)$, temos que $\overrightarrow{CN} \perp \overrightarrow{AB}$ se, e só se:

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{CN}, \overrightarrow{AB} \rangle &= \langle (s+2, 2s-2, s), (1,2,1) \rangle \\ &= s + 2 + 2(2s-2) + s = 6s - 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{s = \frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Logo, $N = \left(1 + \frac{1}{3}, 2 + 2\cdot\frac{1}{3}, 2 + \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \frac{7}{3}\right)$

Seja C' o simétrico de C em relação à reta r.

Como $N = \frac{1}{2}(C + C')$, temos que:

$$\begin{aligned} C' &= 2N - C = 2\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \frac{7}{3}\right) - (-1, 4, 2) \\ &= \left(\frac{8}{3} + 1, \frac{16}{3} - 4, \frac{14}{3} - 2\right). \end{aligned}$$

Portanto, $C' = \left(\frac{11}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$.

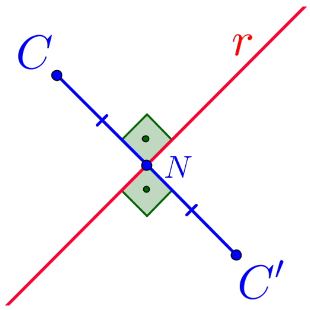

Figura 1: Exemplo ??.

(i) Para determinar a interseção das retas

$r = \{(1+s, 2+2s, 2+s) \mid s \in \mathbb{R}\}$ e $\ell = \{(7t-7, t-1, 2t-1) \mid t \in \mathbb{R}\}$,

devemos resolver o sistema obtido igualando as coordenadas dos pontos de r e de ℓ:

$$r \cap \ell : \begin{cases} 1 + s = 7t - 7 \\ 2 + 2s = t - 1 \\ 2 + s = 2t - 1. \end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação do dobro da terceira, obtemos:

$$\begin{array}{rl} & 4 + 2s = 4t - 2 \\ - & 2 + 2s = t - 1 \\ \hline & 2 \qquad = 3t - 1. \end{array}$$

Ou seja, $t = 1$. Substituindo este valor na terceira equação, obtemos $s = 2t-3 = 2(1) - 3 = -1$. Como os valores $t = 1$ e $s = -1$ também satisfazem à primeira equação, pois $1 + s = 1 + (-1) = 0 = 7(1) - 7 = 7t - 7$, podemos concluir que $(0,0,1)$ é o único ponto de interseção das retas r e ℓ. $\square$

Exemplo 2

Considere as retas

$$r_1 : \begin{cases} x = t+3 \\ y = t+4 \\ z = -t-1 \end{cases} ;\ t \in \mathbb{R} \qquad e \qquad r_2 : \begin{cases} x = s+4 \\ y = -s \\ z = -3s-1 \end{cases} ;\ s \in \mathbb{R}\,.$$

(a) *Mostre que r_1 e r_2 são reversas.*

(b) *Determine a reta r que intersecta r_1 e r_2 perpendicularmente.*

(c) *Determine o plano π tal que $d(\pi, r_1) = \dfrac{1}{3}\, d(r_1, r_2)$ e $d(\pi, r_2) = \dfrac{2}{3}\, d(r_1, r_2)$.*

Solução.

(a) Temos que $\overrightarrow{v_1} = (1,1,-1) \parallel r_1$ e $\overrightarrow{v_2} = (1,-1,-3) \parallel r_2$.

As retas r_1 e r_2 são reversas, pois:

- $\overrightarrow{v}_1$ e $\overrightarrow{v}_2$ não são colineares.

De fato,

$$\overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2 = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) = (-4, 2, -2) \neq (0,0,0)\,;$$

- $r_1 \cap r_2 = \varnothing$.

De fato,

$$\begin{cases} t+3 = s+4 \\ t+4 = -s \\ -t-1 = -3s-1. \end{cases}$$

Somando as duas primeiras equações, obtemos $2t + 7 = 4 \Longrightarrow t = -\dfrac{3}{2}$.

Substituindo na segunda equação, temos $-s = -\dfrac{3}{2} + 4 = \dfrac{5}{2} \Longrightarrow s = -\dfrac{5}{2}$.

No entanto, substituindo $t = -\dfrac{3}{2}$ e $s = -\dfrac{5}{2}$ em ambos os lados da terceira equação, vemos que

$$-t-1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \quad \text{e } -3s-1 = -3\left(-\frac{5}{2}\right) - 1 = \frac{13}{2}\,.$$

Como estes números são diferentes, concluímos que o sistema não tem solução. Isto é, nenhum ponto de r_1 pertence a r_2. Ou seja, $r_1 \cap r_2 = \varnothing$. Portanto, r_1 e r_2 são retas reversas.

(b) Vamos determinar os números $t, s \in \mathbb{R}$ de modo que $P_1 = (t+3, t+4, -t-1) \in r_1$ e $P_2 = (s+4, -s, -3s-1)$ satisfaçam:

$$\overrightarrow{P_1P_2} \perp \overrightarrow{v_1}\,, \qquad \overrightarrow{P_1P_2} \perp \overrightarrow{v_2}\,,$$

onde $\overrightarrow{P_1P_2} = (s+4-t-3, -s-t-4, -3s-1+t+1) = (s-t+1, -s-t-4, -3s+t)$. Assim:

$$\begin{aligned} \bullet\ \langle \overrightarrow{P_1P_2}\,, \overrightarrow{v_1} \rangle &= \langle (s-t+1, -s-t-4, -3s+t), (1,1,-1) \rangle = 0 \\ \iff & \quad s-t+1-s-t-4+3s-t = 0 \\ \iff & \quad 3s-3t = 3 \iff s-t = 1\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet\ \langle \overrightarrow{P_1P_2}\,, \overrightarrow{v_2} \rangle &= \langle (s-t+1, -s-t-4, -3s+t), (1,-1,-3) \rangle = 0 \\ \iff & \quad s-t+1+s+t+4+9s-3t = 0 \\ \iff & \quad 11s-3t = -5\,. \end{aligned}$$

Temos, então, o sistema:

$$\begin{cases} s-t=1 \\ 11s-3t=-5 \end{cases} \quad \text{,ou seja,} \quad \begin{cases} -11s+11t=-11 \\ 11s-3t=-5. \end{cases}$$

Somando estas equações, obtemos: $8t = -16 \iff t = -2$.
Substituindo $t = -2$ na primeira equação, segue que: $s-(-2) = 1 \iff s = -1$.
Portanto,

$$\begin{aligned} P_1 &= (t+3, t+4, -t-1) = (-2+3, -2+4, 1) = (1,2,1)\,, \\ P_2 &= (s+4, -s, -3s-1) = (-1+4, -(-1), -3(-1)-1) = (3,1,2)\,, \\ \overrightarrow{P_1P_2} &= (2,-1,1)\,. \end{aligned}$$

Logo,

$$r : \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-t \\ z = 1+t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}$$

é a única reta que intersecta r_1 e r_2 perpendicularmente.

(c) Como $d(r_1, r_2) = d(P_1, P_2) = \|\overrightarrow{P_1P_2}\| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$, temos que $d(\pi, r_1) = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ e $d(\pi, r_2) = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$. Portanto,

$$\pi \parallel r_1 \quad \text{e} \quad \pi \parallel r_2\,, \qquad \text{pois} \ \ d(\pi, r_1) \neq 0 \ \text{ e } d(\pi, r_1) \neq 0.$$

Logo, $\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) = (-4, 2, -2) \parallel (-2, 1, -1)$, é um vetor perpendicular a π, o que implica que $\pi : 2x - y + z = d$ para algum $d \in \mathbb{R}$.

Sendo,

- $d(\pi, r_1) = d(P_1, \pi) = \dfrac{|2 - 2 + 1 - d|}{\sqrt{4+1+1}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3} \iff |d - 1| = \dfrac{6}{3} = 2$

$$\iff d - 1 = \pm 2 \iff \begin{cases} d = 3 \\ \text{ou} \\ d = -1\,, \end{cases}$$

- $d(\pi, r_2) = d(P_2, \pi) = \dfrac{|6 - 1 + 2 - d|}{\sqrt{4+1+1}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3} \iff |d - 7| = \dfrac{2 \cdot 6}{3} = 4$

$$\iff d - 7 = \pm 4 \iff \begin{cases} d = 11 \\ \text{ou} \\ d = 3\,, \end{cases}$$

concluímos que $d = 3$ e, portanto, $\pi : 2x - y + z = 3$. $\square$

Exemplo 3

Considere os pontos $A = (1, 1, 2)$, $B = (3, 2, 2)$ e $C = (4, 5, 3)$, e a reta

$$r : \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} = z - 1\,.$$

(a) *Determine a equação cartesiana do plano π que contém os pontos A, B e C.*

(b) *Mostre que a reta r é paralela ao plano π.*

(c) *Calcule $d(r, \pi)$*

Solução.

(a) Como A, B, $C \in \pi$, $\overrightarrow{AB} = (2, 1, 0)$ e $\overrightarrow{AC} = (3, 4, 1)$ são vetores paralelos ao plano π. Logo,

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \right) = (1, -2, 5)$$

é perpendicular ao plano π.

Assim, $\pi : x - 2y + 5z = d$, onde $d = 1 - 2 + 10 = 9$, pois $A = (1, 1, 2) \in \pi$.

Isto é,

$$\pi : x - 2y + 5z = 9.$$

(b) Como $\overrightarrow{v} = (3,4,1) \parallel r$, $\overrightarrow{w} = (1,-2,5) \perp \pi$ e $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = 3 - 8 + 5 = 0$, temos que :

$$r \parallel \pi \quad \text{ou} \quad r \subset \pi.$$

Para mostrar que $r \parallel \pi$, basta verificar que o ponto $P = (1,2,1) \in r$ não pertence ao plano π.

De fato, substituindo as coordenadas de P na equação do plano π, obtemos:

$$1 - 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 2 \neq 9 \quad \Longrightarrow \quad P \notin \pi\,.$$

(c) Calculando, temos: $d(r,\pi) = d(P,\pi) = \dfrac{|1 - 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 - 9|}{\sqrt{1+4+25}} = \dfrac{7}{\sqrt{30}}$. $\square$

Exemplo 4

Considere os pontos $A = (2,3,1)$, $B = (1,4,2)$ e $C = (3,1,2)$ e a reta r paralela ao vetor $\overrightarrow{v} = (1,-1,3)$ que passa pelo ponto $P = (1,3,0)$.

(a) *Verifique que A, B e C não são colineares.*

(b) *Determine a equação paramétrica e a equação cartesiana do plano π que contém os pontos A, B e C.*

(c) *Determine os vértices R, S e T de um triângulo tal que $\{R\} = \pi \cap r$, $S \in r$, $T \in \pi$, $\|\overrightarrow{ST}\| = \dfrac{4}{\sqrt{14}}$ e $\overrightarrow{ST} \perp \pi$.*

Solução.

(a) Temos $\overrightarrow{AB} = (-1,1,1)$ e $\overrightarrow{AC} = (1,-2,1)$.

Os pontos A, B e C não são colineares, pois $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ não são múltiplo um do outro. De fato,

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \right) = (3,2,1) \neq (0,0,0).$$

(b) A equação paramétrica do plano π que passa pelo ponto $A = (2,3,1)$ e é paralelo aos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ é

$$\pi : \begin{cases} x = 2 - t + s \\ y = 3 + t - 2s \ ; \quad t, s \in \mathbb{R}\,. \\ z = 1 + t + s \end{cases}$$

Como o plano π é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ e passa pelo ponto A, a sua equação cartesiana é

$$\pi : 3x + 2y + z = 6 + 6 + 1 \iff \pi : 3x + 2y + z = 13.$$

(c) A equação paramétrica da reta r é

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - t \ ; \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = 3t \end{cases}$$

Como R é o ponto de interseção de r com o plano π, $R = (1 + t, 3 - t, 3t)$, onde $t \in \mathbb{R}$ é tal que as coordenadas de R satisfazem à equação cartesiana de π:

$$\begin{aligned} 3(1+t) + 2(3-t) + 3t = 13 &\implies 3 + 3t + 6 - 2t + 3t = 13 \\ &\implies 9 + 4t = 13 \\ &\implies 4t = 4 \\ &\implies t = 1 \\ &\implies R = (2, 2, 3)\,. \end{aligned}$$

Sejam $S = (1 + t, 3 - t, 3t) \in r$ e $T \in \pi$, tais que $\overrightarrow{ST} \perp \pi$ e $\|\overrightarrow{ST}\| = \dfrac{4}{\sqrt{14}}$.

Então,

$$\begin{aligned} d(S, \pi) = \|\overrightarrow{ST}\| = \frac{4}{\sqrt{14}} &\implies \frac{|3(1+t) + 2(3-t) + 3t - 13|}{\sqrt{9+4+1}} = \frac{4}{\sqrt{14}} \\ &\implies \frac{|4t - 4|}{\sqrt{14}} = \frac{4}{\sqrt{14}} \\ &\implies |t - 1| = 1 \implies t - 1 = \pm 1 \\ &\implies \begin{cases} t = 2 \implies S_1 = (3, 1, 6) \\ \quad \text{ou} \\ t = 0 \implies S_2 = (1, 3, 0)\,. \end{cases} \end{aligned}$$

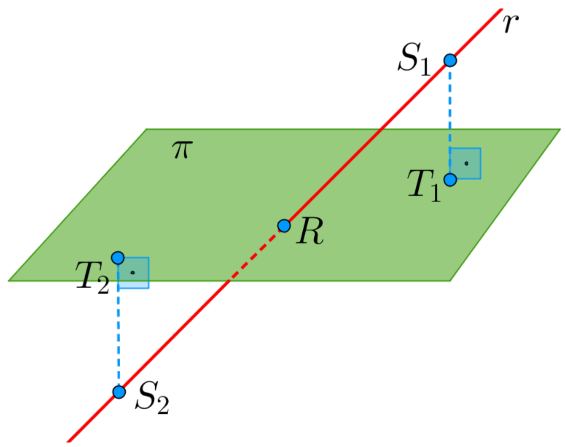

Figura 2: Exemplo ??.

Assim, os pontos S_1 e S_2 são os pontos da reta r que estão à distância $\dfrac{4}{\sqrt{14}}$ do plano π.

Para achar os correspondentes pontos T_1 e T_2 tais que $\triangle RT_1S_1$ e $\triangle RT_2S_2$ são triângulos retângulos em T_1 e T_2, respectivamente, projetamos os pontos S_1 e S_2 perpendicularmente sobre o plano π.

- Seja ℓ_1 a reta perpendicular ao plano π que passa por S_1. Então,

$$\ell_1 : \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = 6 + t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad \{T_1\} = \ell_1 \cap \pi.$$

Como $T_1 \in \ell_1 \cap \pi$, $T_1 = (3 + 3t, 1 + 2t, 6 + t)$ e:

$$3(3 + 3t) + 2(1 + 2t) + (6 + t) = 13 \Longrightarrow 14t + 17 = 13 \Longrightarrow t = -\frac{2}{7}$$
$$\Longrightarrow \quad T_1 = \left(3 - \frac{6}{7}, 1 - \frac{4}{7}, 6 - \frac{2}{7}\right) \Longrightarrow T_1 = \left(\frac{15}{7}, \frac{3}{7}, \frac{40}{7}\right).$$

- Seja ℓ_2 a reta perpendicular ao plano π que passa por S_2. Então,

$$\ell_2 : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 3 + 2t \\ z = t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R} \qquad \Longrightarrow \qquad \{T_2\} = \ell_2 \cap \pi.$$

Como $T_2 \in \ell_2 \cap \pi$, $T_2 = (1 + 3t, 3 + 2t, t)$ e:

$$3(1 + 3t) + 2(3 + 2t) + t = 13 \Longrightarrow 14t + 9 = 13 \Longrightarrow t = \frac{2}{7}$$
$$\Longrightarrow \quad T_2 = \left(1 + \frac{6}{7}, 3 + \frac{4}{7}, \frac{2}{7}\right) \Longrightarrow T_2 = \left(\frac{13}{7}, \frac{25}{7}, \frac{2}{7}\right).$$

□

Exemplo 5

Considere os planos

$$\pi_1 : mx - ny + z = 2 \qquad \text{e} \qquad \pi_2 : nx - my + nz = 4,$$

onde $m, n \in \mathbb{R}$.

(a) *Determine* $m, n \in \mathbb{R}$, *de modo que* π_1 *e* π_2 *sejam paralelos.*

(b) *Determine* $m, n \in \mathbb{R}$, *de modo que* $\pi_1 \cap \pi_2$ *seja uma reta perpendicular ao vetor* $\overrightarrow{v} = (2, 1, -1)$ *que passa pelo ponto* $A = (0, 0, 2)$.

Solução.

(a) Das equações dos planos, temos $\overrightarrow{v_1} = (m, -n, 1) \perp \pi_1$ e $\overrightarrow{v_2} = (n, -m, n) \perp \pi_2$. Logo,

$$\pi_1 \parallel \pi_2 \iff \overrightarrow{v_1} \text{ e } \overrightarrow{v_2} \text{ são colineares} \iff \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{0}.$$

Isto é, se, e somente se,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} &= \left(\begin{vmatrix} -n & 1 \\ -m & n \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} m & 1 \\ n & n \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} m & -n \\ n & -m \end{vmatrix} \right) \\ &= (-n^2 + m, -mn + n, -m^2 + n^2) = (0, 0, 0) \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{cases} -n^2 + m = 0 \\ -nm + n = 0 \\ -m^2 + n^2 = 0\,. \end{cases}$$

Da terceira identidade, obtemos: $n^2 = m^2 \iff n = \pm m$. Substituindo na primeira identidade, temos: $-m^2 + m = 0 \iff m(-m + 1) = 0 \iff m = 0$ ou $m = 1$.

Se $m = 0$, $n = m = 0$ e $\overrightarrow{v_2}$ seria o vetor nulo, uma contradição.

Assim, devemos ter, necessariamente, $m = 1$ e, portanto, $n = \pm 1$. Verifique que a segunda identidade também é satisfeita para estes valores.

As soluções são: $\begin{cases} m = 1 \quad \text{e} \quad n = 1; \\ m = 1 \quad \text{e} \quad n = -1. \end{cases}$

(b) Seja $r = \pi_1 \cap \pi_2$. Como $A = (0, 0, 2) \in r$, temos $A \in \pi_1$ e $A \in \pi_2$.

Em particular, $A \in \pi_2 \iff n \cdot 0 + m \cdot 0 + n \cdot 2 = 4 \iff n = 2$.

Como $\overrightarrow{v}_1 = (m, -2, 1) \perp \pi_1$, $\overrightarrow{v_2} = (2, -m, 2) \perp \pi_2$ e $r = \pi_1 \cap \pi_2$, segue que

$\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} \parallel r$, onde:

$$\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = \left(\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -m & 2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} m & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} m & -2 \\ 2 & -m \end{vmatrix} \right) = (-4+m, -2m+2, -m^2+4).$$

Sendo $\overrightarrow{v} = (2, 1, -1) \perp r$, devemos ter $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} \rangle = 0$. Isto é,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} \rangle \\ &= \langle (2,1,-1), (-4+m, -2m+2, -m^2+4) \rangle \\ &= -8 + 2m - 2m + 2 + m^2 - 4 \\ &= m^2 - 10\,. \end{aligned}$$

Portanto, $m = \pm\sqrt{10}$. $\square$

Exemplo 6

Considere as retas

$$r_1 : \begin{cases} 2x - y - z = 8 \\ -x + y = -4 \end{cases} \qquad e \qquad r_2 : x = y - 1 = z - 2\,.$$

(a) *Mostre que r_1 e r_2 são paralelas.*

(b) *Determine a equação cartesiana do plano que contém as retas r_1 e r_2.*

(c) *Calcule $d(r_1, r_2)$.*

Solução.

(a) Basta mostrar que as retas r_1 e r_2 são paralelas a uma mesma direção e que um ponto de uma das retas não pertence à outra.

Como $r_1 = \pi_1 \cap \pi_2$, onde $\pi_1 : 2x - y - z = 8$ e $\pi_2 : -x + y = -4$, temos que $\overrightarrow{v_1} = (2, -1, -1) \perp r_1$ e $\overrightarrow{v_2} = (-1, 1, 0) \perp r_1$.

Logo, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} \parallel r_1$, onde:

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = \left(\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (1, 1, 1)\,.$$

Da forma simétrica da equação de r_2, vemos que $r_2 \parallel \overrightarrow{v} = (1, 1, 1)$.

Portanto, $r_1 \parallel r_2$ ou $r_1 = r_2$.

Determinemos um ponto $A \in r_1$.

Tomando $y = 0$ nas equações dos planos que definem r_1, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} 2x - z = 8 \\ -x = -4 \end{cases} \implies x = 4 \text{ e } z = 2 \cdot 4 - 8 = 0 \implies A = (4, 0, 0) \in r_1 .$$

Para mostrar que $r_1 \parallel r_2$, vamos verificar que $A \notin r_2$. De fato, substituindo as coordenadas de A na equação de r_2, obtemos a identidade impossível $4 = 0 - 1 = 0 - 2$.

Logo, $A \notin r_2$ e, portanto, $r_1 \parallel r_2$.

(b) Para determinar a equação cartesiana do plano π que contém as retas r_1 e r_2, devemos conhecer um ponto de π e um vetor perpendicular a π.

Como $r_1 \subset \pi$, segue que $A = (4, 0, 0) \in \pi$ e $\overrightarrow{v} = (1, 1, 1) \parallel \pi$.

Uma vez que $r_1 \cap r_2 = \varnothing$, o vetor $\overrightarrow{AB}$ é um vetor paralelo a π que não é colinear com $\overrightarrow{v}$, para todo ponto $B \in r_2$.

Tomando $x = 0$ na equação de r_2, obtemos $y - 1 = 0$ e $z - 2 = 0$, ou seja, $y = 1$ e $z = 2$. Logo, $B = (0, 1, 2) \in r_2$ e, portanto, $\overrightarrow{AB} = (-4, 1, 2) \parallel \pi$.

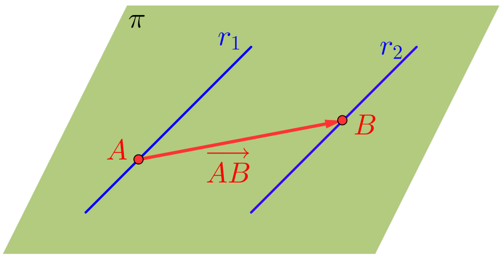

Figura 3: Exemplo ??.

Como $\overrightarrow{v} \parallel \pi$ e $\overrightarrow{AB} \parallel \pi$, concluímos que $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{AB} \perp \pi$, onde:

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{AB} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} \right) = (1, -6, 5) .$$

Assim, $\pi : x - 6y + 5z = d$, onde $d = 4 - 6 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 4$, pois $A = (4, 0, 0) \in \pi$.

(c) Como $r_1 \parallel r_2$, temos que $d(r_1, r_2) = (B, r_1)$, onde $B = (0, 1, 2) \in r_2$. Seja $Q = (t + 4, t, t) \in r_1$ o pé da perpendicular a r_1 baixada do ponto B.

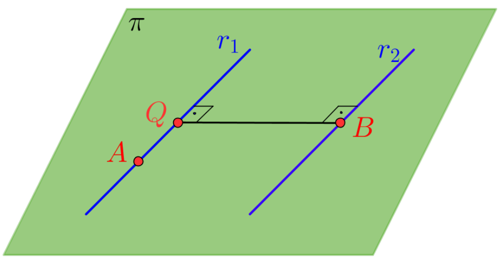

Figura 4: Exemplo ??.

Sendo $\overrightarrow{BQ} = (t+4, t-1, t-2) \perp r_1$, temos $\overrightarrow{BQ} = (t+4, t-1, t-2) \perp \overrightarrow{v} = (1, 1, 1)$, ou seja,

$$\begin{aligned}\langle \overrightarrow{BQ}, \overrightarrow{v} \rangle &= t+4+t-1+t-2 = 3t+1 = 0\\ &\Longrightarrow \quad t = -\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Então, $d(B, r_1) = d(B, Q)$.
Logo,

$$\overrightarrow{BQ} = \left(-\frac{1}{3}+4, -\frac{1}{3}-1, -\frac{1}{3}-2\right) = \left(\frac{11}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{7}{3}\right)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} d(r_1, r_2) &= d(B, Q) = \|\overrightarrow{BQ}\|\\ &= \sqrt{\left(\frac{11}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(-\frac{7}{3}\right)^2}\\ &= \frac{1}{3}\sqrt{121+16+49} = \frac{1}{3}\sqrt{186}\,. \end{aligned}$$

□

Exemplo 7

Considere o ponto $A = (1, 2, 1)$ e a reta

$$r : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}.$$

(a) *Determine a equação paramétrica da reta r.*

(b) *Determine a equação cartesiana do plano π que contém a reta r e o ponto A.*

(c) *Determine as retas paralelas à reta r contidas no plano π que distam $\sqrt{6}$ de r.*

Solução.

(a) Temos:

$$\left.\begin{array}{r}(1,-1,1) \perp r\\ (2,1,0) \perp r\end{array}\right\} \Longrightarrow (1,-1,1)\times(2,1,0) = (-1,2,3) = \overrightarrow{v} \parallel r\,.$$

Tomando $y = 0$ nas equações que definem r, obtemos que $B = (x, 0, z) \in r$ se, e só se,

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ 2x = 2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z = 1 - x \\ x = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow B = (1, 0, 0)\,.$$

Logo, a equação paramétrica de r é:

$$r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

(b) Temos $\overrightarrow{v} = (-1, 2, 3) \parallel \pi$ e $\overrightarrow{BA} = (0, 2, 1) \parallel \pi$, pois $\overrightarrow{v} \parallel r$, $r \subset \pi$ e $A, B \in r$. Logo,

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{BA} = (-4, 1, -2) \perp \pi.$$

Como $B = (1, 0, 0) \in \pi$, obtemos

$$\pi : 4x - y + 2z = 4\,.$$

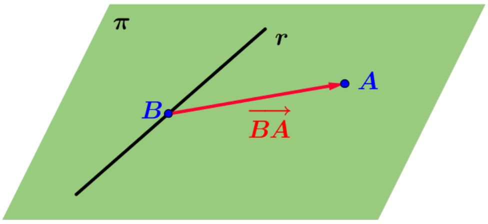

Figura 5: Exemplo ??.

(c) Seja $\ell \subset \pi$ tal que $\ell \perp r$ e $B \in \ell$. Então,

$$\begin{aligned} & (4, -1, 2) \perp \ell \;\text{ e }\; (-1, 2, 3) \perp \ell \\ \Longrightarrow\; & (4, -1, 2) \times (-1, 2, 3) = \\ & (-7, -14, 7) \parallel \ell \\ \Longrightarrow\; & (1, 2, -1) \parallel \ell\,. \end{aligned}$$

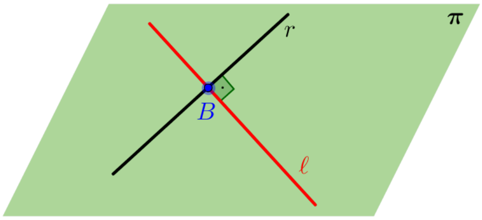

Figura 6: Exemplo ??.

Como $B = (1, 0, 0) \in \ell$, obtemos as equações paramétricas de ℓ:

$$\ell : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Seja $P = (1 + t, 2t, -t) \in \ell$ tal que $d(P, B) = \sqrt{6}$. Então:

$$d(P, B)^2 = 6 \Longleftrightarrow t^2 + 4t^2 + t^2 = 6 \Longleftrightarrow t^2 = 1 \Longleftrightarrow t = \pm 1$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} t = 1 \Longrightarrow P_1 = (2, 2, -1) \\ \quad \text{ou} \\ t = -1 \Longrightarrow P_2 = (0, -2, 1)\,. \end{cases}$$

Para $P_1 = (2, 2, -1)$, obtemos a reta

$$r_1 : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}$$

e para $P_2 = (0, -2, 1)$, a reta

$$r_2 : \begin{cases} x = -t \\ y = -2 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

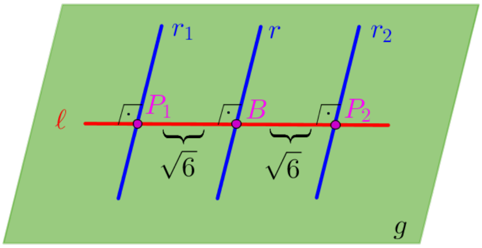

Figura 7: Exemplo **??**.

Assim, r_1 e r_2 são as retas paralelas à reta r contidas no plano π que distam $\sqrt{6}$ de r. $\square$

Exemplo 8

Determine as equações das esferas de raio $\sqrt{17}$ *que contêm os pontos* $A = (2, 3, 1)$ *e* $B = (4, 1, 3)$, *com centro no plano* $\pi : 2x + y + z = 3$.

Solução.

O centro das esferas procuradas deve ser um ponto equidistante de A e B. Seja $\overline{\pi}$ o conjunto dos pontos eqüidistantes de A e B. Já provamos que (ver exemplo **??**, do capítulo 7),

$$\overline{\pi} = \{P \,|\, d(P, A) = d(P, B)\}$$

é o plano que passa pelo ponto médio $M = \dfrac{A + B}{2} = \dfrac{1}{2}(6, 4, 4) = (3, 2, 2)$ e é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{AB} = (2, -2, 2)$, ou seja, $(1, -1, 1) \perp \pi$.

Assim, a equação de $\overline{\pi}$ é da forma $x - y + z = d$, onde d se calcula sabendo que $M \in \overline{\pi}$. Logo, $d = 3 - 2 + 2 = 3$ e

$$\overline{\pi} : x - y + z = 3\,.$$

Então, o centro C das esferas procuradas deve pertencer à reta $r = \pi \cap \overline{\pi}$. Determinemos a reta r:

$$r : \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y + z = 3\,. \end{cases}$$

Como $\overrightarrow{v} = (1, -1, 1) \perp r$ e $\overrightarrow{w} = (2, 1, 1) \perp r$, temos $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = (-2, 1, 3) \parallel r$.

Além disso, $P = (0, 0, 3) \in r$.

Portanto, $r = \{(-2t, t, 3t + 3) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$.

Sendo $C \in r$ e $d(A, C) = 17$, temos $C = (-2t, t, 3t + 3)$, para algum $t \in \mathbb{R}$, e

$$(-2t-2)^2 + (t-3)^2 + (3t+2)^2 = 17\,.$$

Desenvolvendo os binômios do lado esquerdo desta identidade, segue que:

$$\begin{aligned} 4t^2+8t+4+t^2-6t+9+9t^2+12t+4=17 &\iff 14t^2+14t=0\\ &\iff t(t+1)=0\\ &\iff t=0 \quad \text{ou} \quad t=-1. \end{aligned}$$

Para $t=0$, obtemos a esfera $\mathcal{S}_1 : x^2+y^2+(z-3)^2=17$ de centro $C_1=(0,0,3)$.
Para $t=-1$, obtemos a esfera $\mathcal{S}_2 : (x-2)^2+(y+1)^2+z^2=17$ de centro $C_2=(2,-1,0)$. $\square$

Exemplo 9

Determine as equações paramétricas das retas paralelas ao plano $\pi_1 : x+3y-z=3$ *e contidas no plano* $\pi_2 : 2x+y+z=5$, *que distam* $\sqrt{300}$ *da reta* $\ell = \pi_1 \cap \pi_2$.

Solução.
Sejam $\overrightarrow{v_1}=(1,3,-1) \perp \pi_1$ e $\overrightarrow{v_2}=(2,1,1) \perp \pi_2$.
Como $\overrightarrow{v_1} \perp \ell$ e $\overrightarrow{v_2} \perp \ell$, devemos ter $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} \parallel \ell$, onde:

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = \left(\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) = (4,-3,-5)\,.$$

Este vetor é a direção da reta ℓ. Determinemos um ponto $A \in \ell$.
Sabemos que

$$\ell = \pi_1 \cap \pi_2 : \begin{cases} x+3y-z=3 \\ 2x+y+z=5. \end{cases}$$

Fazendo $x=0$ nestas equações, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} 3y-z=3 \\ y+z=5 \end{cases}$$

Somando as equações, temos $4y=8$, ou seja, $y=2$. Substituindo este valor na segunda equação, obtemos $z=5-y=5-2=3$.
Portanto, $A=(0,2,3) \in \ell$.

Seja r uma reta contida em π_2 e paralela ao plano π_1. Então, $\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} \parallel r$, ou seja, r é paralela à reta ℓ.

Seja agora $\overline{\ell}$ a reta perpendicular a ℓ, contida no plano π_2, que passa pelo ponto A.

Como $\overline{\ell} \subset \pi_2$, temos $\overrightarrow{v_2} \perp \overline{\ell}$, e, como $\overline{\ell} \perp \ell$, temos $\overrightarrow{v} \perp \overline{\ell}$.

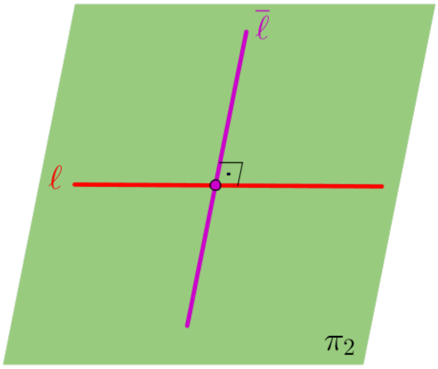

Figura 8: Exemplo ??.

Portanto, $\overrightarrow{v_2} \times \overrightarrow{v} \parallel \overline{\ell}$, onde

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v_2} \times \overrightarrow{v} &= \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} \right) \\ &= (-2, 14, -10)\,.\end{aligned}$$

Assim, $\overrightarrow{w} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v}) = (-1, 7, -5) \parallel \overline{\ell}$ e $\overline{\ell} = \{(-t, 2+7t, 3-5t) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$.

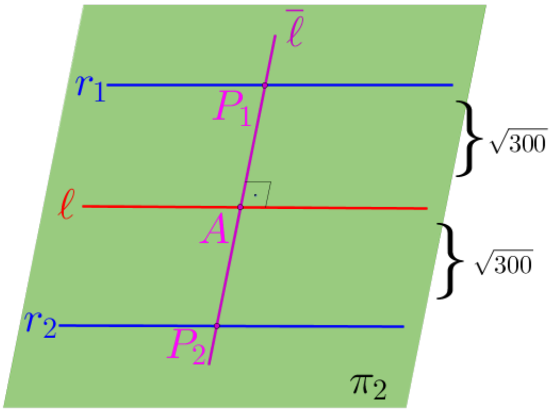

Figura 9: Exemplo ??.

Na reta $\overline{\ell}$ determinemos os pontos que estão a uma distância de $\sqrt{300}$ do ponto A.

Seja $P = (-t, 2+7t, 3-5t) \in \overline{\ell}$ tal que $d(P,A)^2 = 300$. Sendo,

$$d(P,A)^2 = (-t)^2 + (2+7t-2)^2 + (3-5t-3)^2 = t^2 + 49t^2 + 25t^2 = 75t^2 = 300\,,$$

obtemos $t^2 = \dfrac{300}{75} = 4$. Portanto, $t = \pm 2$.

Substituindo estes valores de t na expressão do ponto P, obtemos os pontos:

$$P_1 = (-2, 2 + 7 \cdot 2, 3 - 5 \cdot 2) = (-2, 16, -7),$$
$$P_2 = (-(-2), 2 + 7 \cdot (-2), 3 - 5 \cdot (-2)) = (2, -12, 13)\,.$$

Como as retas r_1 e r_2 procuradas são paralelas ao vetor $\overrightarrow{v} = (4, -3, -5)$ e passam pelos pontos P_1 e P_2, respectivamente, estas retas são:

$$r_1 : \{(-2 + 4t, 16 - 3t, -7 - 5t) \,|\, t \in \mathbb{R}\}\,,$$
$$r_2 : \{(2 + 4t, -12 - 3t, 13 - 5t) \,|\, t \in \mathbb{R}\}\,.$$

□

Exemplo 10

Considere os pontos $A = (1, 2, 1)$, $B = (3, 4, 3)$, *e o plano*

$$\pi : x - y + z = 1\,.$$

(a) *Determine o conjunto dos pontos equidistantes de* A *e* B.

(b) *Determine o ponto* $C = (x, y, z) \in \pi$ *tal que* $\|\overrightarrow{CA}\| = \|\overrightarrow{CB}\| = \sqrt{11}$ *e* $x + y - 2z < 0$.

(c) *Determine a área do triângulo de vértices* A, B *e* C, *e o plano que contém este triângulo.*

Solução.

(a) Seja $\overline{\pi} = \{P \,|\, d(P, A) = d(P, B)\}$. Então, $\overline{\pi}$ é o plano perpendicular ao vetor $\overrightarrow{AB} = (2, 2, 2) \parallel (1, 1, 1)$, que passa pelo ponto $\dfrac{A + B}{2} = (2, 3, 2)$. Logo:

$$\overline{\pi} : x + y + z = 7\,.$$

(b) Seja $\mathcal{C} = (x, y, z) \in \pi$ tal que $\|\overrightarrow{CA}\| = \|\overrightarrow{CB}\| = \sqrt{11}$ e $x + y - 2z < 0$. Como $d(C, A) = d(C, B)$, temos $C \in \overline{\pi}$.

Logo, $C \in \pi \cap \overline{\pi} = r : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y + z = 7\,. \end{cases}$

Sendo $\overrightarrow{v} = (1, -1, 1) \perp r$ e $\overrightarrow{w} = (1, 1, 1) \perp r$, temos que $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = (-2, 0, 2) \parallel (-1, 0, 1) \parallel r$.

Fazendo $x = 0$ nas equações que definem r, temos que $P_0 = (0, y, z) \in r$ se, e só se,

$$\left\{\begin{array}{l} -y+z=1 \\ y+z=7 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 2z=8 \\ y=7-8 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} z=4 \\ y=3 \end{array}\right. \iff P_0=(0,3,4)\in r\,.$$

Logo, as equações paramétricas da reta r são:

$$r:\left\{\begin{array}{l} x=-t \\ y=3 \\ z=t+4 \end{array}\right. \quad ; \quad t\in\mathbb{R}.$$

Como $C\in r$, $C=(-t,3,t+4)$ para algum $t\in\mathbb{R}$. Além disso, $d(C,A)^2=11$. Assim,

$$(-t-1)^2+(3-2)^2+(t+4-1)^2=11 \iff t^2+2t+1+1+t^2+6t+9=11$$

$$\iff 2t^2+8t=0 \iff t^2+4t=0 \iff t(t+4)=0 \iff \left\{\begin{array}{l} t=0 \\ \text{ou} \\ t=-4 \end{array}\right.$$

Substituindo estes valores de t, vemos que $C=(0,3,4)$ ou $C=(4,3,0)$. Mas como as coordenadas de C devem satisfazer à desigualdade $x+y-2z<0$, devemos ter $C=(0,3,4)$.

(c) Sabemos que:

$$\text{área}\,(\triangle ABC)=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|\,.$$

Como

$$\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}=(2,2,2) \\ \overrightarrow{AC}=(-1,1,3) \end{array} \implies \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(4,-8,4)\,,$$

obtemos

$$\text{área}\,(\triangle ABC)=\frac{1}{2}\|(4,-8,4)\|=\frac{1}{2}\sqrt{16+64+16}=\frac{1}{2}\sqrt{96}=\frac{4}{2}\sqrt{6}=2\sqrt{6}\,.$$

Consideremos agora o plano π que contém o triângulo $\triangle ABC$. Então,

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(4,-8,4)\perp\pi,$$

isto é, $(1,-2,1)\perp\pi$. Portanto,

$$\pi: x-2y+z=0-6+4=-2\,,$$

pois $C=(0,3,4)\in\pi$. $\square$

Exemplo 11

Considere o ponto $A=(a,2a,a)$, onde $a\in\mathbb{R}-\{0\}$, e as retas

$$r_1 : \begin{cases} x = 2s \\ y = 3s + 1 \\ z = s + 1 \end{cases} ; \quad s \in \mathbb{R} \qquad e \qquad r_2 : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t + 2 \\ z = -t + 2 \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

(a) *Determine $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ e $C \in r_1$ de modo que $\overrightarrow{AC}$ seja perpendicular à reta r_2 e $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{2}$.*

(b) *Mostre que os pontos A e C, do item anterior, e a reta r_2 não são coplanares.*

Solução.

(a) Seja $C = (2s, 3s+1, s+1) \in r_1$. Então, $\overrightarrow{AC} = (2s-a, 3s+1-2a, s+1-a)$. Como $\overrightarrow{AC} \perp r_2$, temos que $\overrightarrow{AC} \perp (2, 1, -1)$, isto é,

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{AC}, (2,1,-1) \rangle &= 4s - 2a + 3s + 1 - 2a - s - 1 + a = 0 \\ &\iff 6s - 3a = 0 \iff a = 2s\,. \end{aligned}$$

Além disso, como $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{2}$, segue que:

$$|(2s - 2s, 3s + 1 - 4s, s + 1 - 2s)| = \sqrt{2} \iff |(0, 1 - s, 1 - s)| = \sqrt{2}$$

$$\iff (1 - s)^2 + (1 - s)^2 = 2 \iff 2(1 - s)^2 = 2 \iff (1 - s)^2 = 1$$

$$\iff 1 - s = \pm 1 \iff \begin{cases} s = 2 \\ \text{ou} \\ s = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 4 \\ \text{ou} \\ a = 0\,. \end{cases}$$

Sendo $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, $a = 4$ e, portanto, $C = (4, 7, 3)\,.$

(b) Seja π o plano que contém a reta r_2 e o ponto $A = (4, 8, 4)$.

Seja $B = (1, 2, 2) \in r_2$. Como $\overrightarrow{v} = (2, 1, -1) \parallel \pi$ e $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} = (-3, -6, -2)$ $\parallel \pi$, temos que $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} \perp \pi$, onde:

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -6 & -2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} \right) = (-8, 7, -9).$$

Logo, $\pi : -8x + 7y - 9z = -8 + 14 - 18 = -12$, pois $B = (1, 2, 2) \in \pi$.

Para mostrar que A, C e r_2 não são coplanares, basta verificar que $C = (4, 7, 3)$ $\notin \pi$.

De fato, substituindo as coordenadas de C no lado esquerdo da equação de π, obtemos:

$$-8 \times 4 + 7 \times 7 - 9 \times 3 = -32 + 49 - 27 = -59 + 49 = -10 \neq -12\,,$$

mostrando, assim, que $C \notin \pi$. $\square$