Capítulo 1

Coordenadas e distância na reta e no plano

1. Introdução

A **Geometria Analítica** nos permite representar pontos da reta por números reais, pontos do plano por pares ordenados de números reais e pontos do espaço por ternos ordenados de números reais.

Desse modo, curvas no plano e superfícies no espaço podem ser descritas por meio de equações, o que torna possível tratar algebricamente muitos problemas geométricos e, reciprocamente, interpretar de forma geométrica diversas questões algébricas.

Ao longo destas notas admitiremos que o leitor conheça os principais axiomas e resultados da Geometria Euclidiana Plana e Espacial, relativos aos seus elementos básicos: pontos, retas e planos. Por exemplo: por dois pontos distintos passa uma, e somente uma reta; por três pontos do espaço não situados na mesma reta passa um, e somente um plano; fixada uma unidade de comprimento, a cada par de pontos A e B corresponde um número real, denominado distância entre os pontos A e B ou comprimento do segmento AB, e designado por $d(A, B)$ ou $|AB|$, respectivamente, que satisfazem às seguintes propriedades:

Sejam A, B e C pontos arbitrários. Então:
Teorema 1

a. *para todo $\lambda > 0$ e para toda semirreta de origem A, existe um único D nesta semirreta tal que $d(A, D) = \lambda$.*

b. $d(A, B) \geq 0$.

c. $d(A, B) = 0 \iff A = B$.

d. $d(A, B) = d(B, A)$.

e. $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$ *(desigualdade triangular).*

f. $d(A, B) = d(A, C) + d(C, B) \iff A, B$ *e* C *são colineares e* C *está entre* A *e* B.

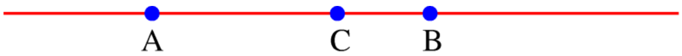

Figura 1: O ponto C está entre A e B, logo $d(A, B) = d(A, C) + d(C, B)$.

2. Coordenadas e distância na reta

Seja r uma reta.

Dizemos que r é uma reta **orientada** quando sobre ela se escolheu um sentido de percurso chamado **positivo**. O sentido oposto sobre a reta r é denominado **negativo**.

Figura 2: Escolha de um sentido de percurso na reta r.

Sejam A e B pontos na reta r. Dizemos que o ponto B **está à direita** do ponto A (ou que A **está à esquerda** de B) quando o sentido de percurso de A para B coincide com o sentido positivo escolhido na reta r.

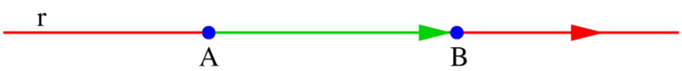

Figura 3: B está à direita de A na reta orientada r.

Um **eixo** E é uma reta orientada na qual é fixado um ponto O, chamado **origem**.

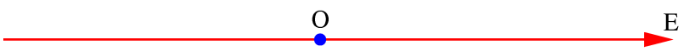

Figura 4: Origem O escolhida no eixo E.

Todo eixo E pode ser posto em **correspondência** com o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ da seguinte maneira:

$$\boxed{E \longrightarrow \mathbb{R}}$$

- à origem O do eixo faz-se corresponder o número zero.
- a cada ponto X de E à direita de O corresponde o número real positivo $x = d(O, X)$.
- a cada ponto X de E à esquerda de O corresponde o número real negativo $x = -d(O, X)$.

Pode-se provar, usando o teorema 1, item a, que esta correspondência entre E e $\mathbb{R}$ é biunívoca.

Definição 1

O número real x correspondente ao ponto X é chamado **coordenada** do ponto X.

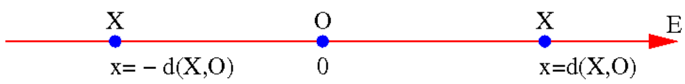

Figura 5: Coordenada de um ponto X do eixo E em relação à origem O.

Proposição 1

Sejam X e Y dois pontos sobre o eixo E com coordenadas x e y respectivamente. Então,

$$d(X, Y) = |y - x| = |x - y|.$$

Prova.

Se $X = Y$, não há o que provar.

Suponhamos então que $X \neq Y$. Para fixar as idéias, vamos assumir que X está à esquerda de Y, isto é, $x < y$. Temos três casos a considerar:

Caso 1. X e Y estão à direita da origem. Isto é, $0 < x < y$.

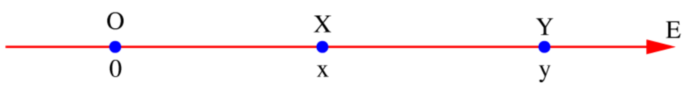

Figura 6: Caso 1: $0 < x < y$.

Como X está entre O e Y, $d(O,X) = x$ e $d(O,Y) = y$, temos por

$$d(O,Y) = d(O,X) + d(X,Y),$$

que

$$y = x + d(X,Y).$$

Portanto,

$$d(X,Y) = y - x = |y - x|.$$

Caso 2. X e Y estão à esquerda da origem. Isto é, $x < y < 0$.

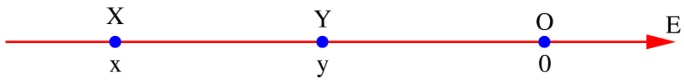

Figura 7: Caso 2: $x < y < 0$.

Neste caso, Y está entre X e O, $d(O,X) = -x$ e $d(O,Y) = -y$. Logo,

$$d(O,X) = d(X,Y) + d(Y,O) \Leftrightarrow -x = d(X,Y) - y,$$

ou seja,

$$d(X,Y) = y - x = |y - x|.$$

Caso 3. X e Y estão em lados opostos em relação à origem. Isto é, $x < 0 < y$.

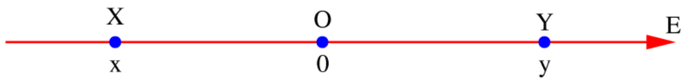

Figura 8: Caso 3: $x < 0 < y$.

Como O está entre X e Y, $d(X,Y) = d(X,O) + d(O,Y)$. Além disso, $d(X,O) = -x$ e $d(O,Y) = y$. Logo,

$$d(X,Y) = -x + y = y - x = |y - x|.$$

Verificando assim o desejado. ■

Observação 1

- Se X estiver à direita de Y a demonstração é feita de maneira similar.

- Sejam X e Y pontos de coordenadas x e y, e M o **ponto médio** do segmento XY de coordenada m. Então, $m = \dfrac{x+y}{2}$.

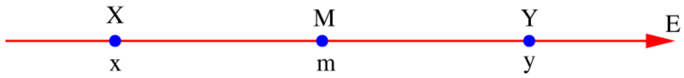

Figura 9: Sendo M o ponto médio do segmento XY, temos $d(M, X) = d(M, Y)$.

De fato, suponhamos que X está à esquerda de Y. Como o ponto médio M está entre X e Y, temos $x < m < y$. Logo,

$$\begin{aligned} d(M, X) = d(M, Y) &\iff |x - m| = |y - m| \\ &\iff m - x = y - m \\ &\iff 2m = x + y \\ &\iff m = \frac{x + y}{2}. \end{aligned}$$

3. Coordenadas no Plano

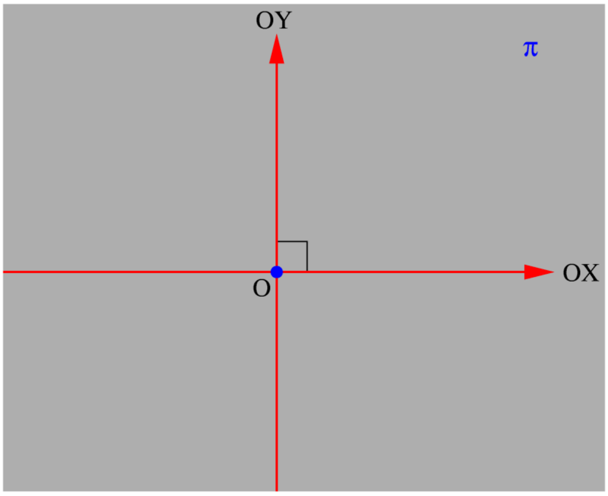

Figura 10: Sistema de eixos ortogonais OXY no plano π.

• Designamos por $\mathbb{R}^2$ o conjunto formado pelos pares ordenados (x, y), onde x e y são números reais. O número x chama-se **primeira coordenada** e o número y chama-se **segunda coordenada** do par ordenado (x, y).

• Um **sistema de eixos ortogonais** OXY num plano π é um par de eixos OX e OY, tomados em π, que são perpendiculares e têm a mesma origem O.

O eixo$-OX$ é chamado **eixo horizontal** e o eixo$-OY$, **eixo vertical**.

• Um plano π munido de um sistema de eixos ortogonais põe-se, de maneira natural, em correspondência biunívoca com o conjunto $\mathbb{R}^2$:

$$\boxed{\pi \longleftrightarrow \mathbb{R}^2}$$

De fato, dado um ponto $P \in \pi$, tomamos as retas r e s tais que:

- $r \parallel$eixo$-OY$ e $P \in r$,
- $s \parallel$eixo$-OX$ e $P \in s$.

Se o ponto X de interseção da reta r com o eixo$-OX$ tem coordenada x no eixo$-OX$ e se o ponto Y de interseção da reta s com o eixo$-OY$ tem coordenada y no eixo$-OY$, associa-se ao ponto P o par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

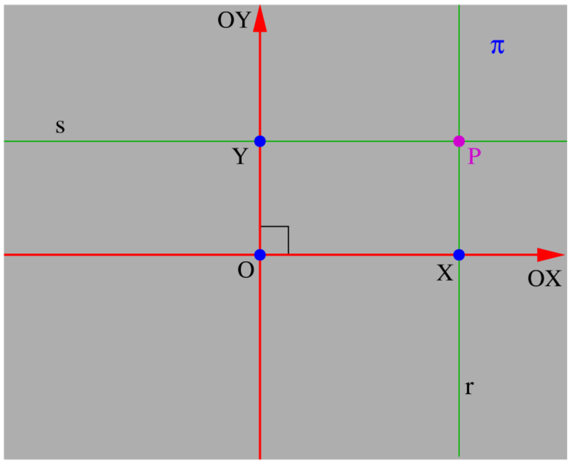

Figura 11: Determinando as coordenadas do ponto $P \in \pi$

Reciprocamente:

Dado o par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ temos que, se:

- X é o ponto do eixo$-OX$ de coordenada x;
- Y é o ponto do eixo$-OY$ de coordenada y;
- r é a reta paralela ao eixo$-OY$ que passa por X;
- s é a reta paralela ao eixo$-OX$ que passa por Y, **então** $\{P\} = r \cap s$.

• Os números x e y chamam-se **coordenadas cartesianas do ponto** P **relativamente ao sistema de eixos ortogonais fixado**.

A coordenada x é a abscissa de P e y é a ordenada de P.

Observação 2

No eixo$-OX$, os pontos têm coordenadas $(x, 0)$.

No eixo$-OY$, os pontos têm coordenadas $(0, y)$.

Observação 3

Os eixos ortogonais decompõem o plano em quatro regiões chamadas **quadrantes**:

1^o Quadrante $= \{(x,y) \,|\, x > 0 \text{ e } y > 0\}$
2^o Quadrante $= \{(x,y) \,|\, x < 0 \text{ e } y > 0\}$
3^o Quadrante $= \{(x,y) \,|\, x < 0 \text{ e } y < 0\}$
4^o Quadrante $= \{(x,y) \,|\, x > 0 \text{ e } y < 0\}$

Cada ponto do plano pertence a um dos eixos ortogonais ou a um dos quadrantes.

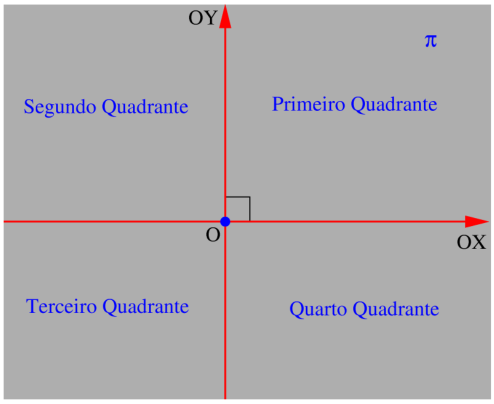

Figura 12: Quadrantes e eixos ortogonais no plano.

4. Distância entre dois pontos no plano

Seja π um plano munido de um sistema de eixos ortogonais OXY e sejam $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ dois pontos do plano π.

Seja $Q = (x_1, y_2)$. Como,

$$d(P_1, Q) = |y_2 - y_1|\,,$$

$$d(P_2, Q) = |x_2 - x_1|\,,$$

temos, pelo teorema de Pitágoras,

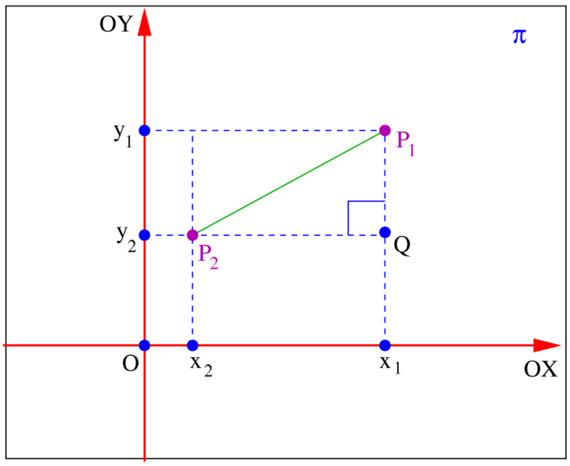

Figura 13: Distância entre dois pontos no plano.

$$d(P_1, P_2)^2 = d(P_1, Q)^2 + d(P_2, Q)^2$$

$$\iff d(P_1, P_2)^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$

$$\iff \boxed{d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Exemplo 1

Calcule a distância do ponto $A = (-1, 2)$ ao ponto $B = (2, -3)$.

Solução.
Temos:
$$d(A,B) = \sqrt{(2-(-1))^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}.$$
□

Exemplo 2

Determine para quais valores de $m \in \mathbb{R}$ os pontos $P = (m, 1)$ e $Q = (2m, -m)$ têm distância igual a 1.

Solução.
Temos:
$$\begin{aligned} & d(P,Q) = \sqrt{(2m-m)^2 + (-m-1)^2} = \sqrt{2m^2+2m+1} = 1 \\ \iff & 2m^2 + 2m + 1 = 1 \\ \iff & m(m+1) = 0 \\ \iff & m = 0 \ \text{ ou } \ m = -1. \end{aligned}$$
□

Exemplo 3

Determine os pontos P pertencentes ao eixo-OX tais que $d(P, A) = 5$, onde $A = (1, 3)$.

Solução.
O ponto P é da forma $(x, 0)$ para algum $x \in \mathbb{R}$. Logo,
$$\begin{aligned} & d(A,P) = \sqrt{(x-1)^2 + (0-3)^2} = 5 \\ \iff & (x-1)^2 + 9 = 25 \iff (x-1)^2 = 16 \\ \iff & x - 1 = \pm 4 \iff x = 5 \ \text{ ou } \ x = -3 \\ \iff & P = (5,0) \ \text{ ou } \ P = (-3,0). \end{aligned}$$
□

Definição 2

Dados um ponto A num plano π e o número $r > 0$, o **círculo $\mathcal{C}$ de centro A e raio $r > 0$** é o conjunto dos pontos do plano π situados à distância r do ponto A, ou seja:

$$\mathcal{C} = \{P \in \pi \,|\, d(P, A) = r\}.$$

Seja OXY um sistema de eixos ortogonais no plano π e sejam a e b as coordenadas do centro A neste sistema de eixos. Então,

$$P = (x, y) \in \mathcal{C} \iff d(P, A) = r \iff d(P, A)^2 = r^2 \iff$$
$$\boxed{(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2}$$

Assim, associamos ao círculo $\mathcal{C}$ uma *equação* que relaciona a abscissa com a ordenada de cada um de seus pontos. Uma vez obtida a equação, as propriedades geométricas do círculo podem ser deduzidas por métodos algébricos.

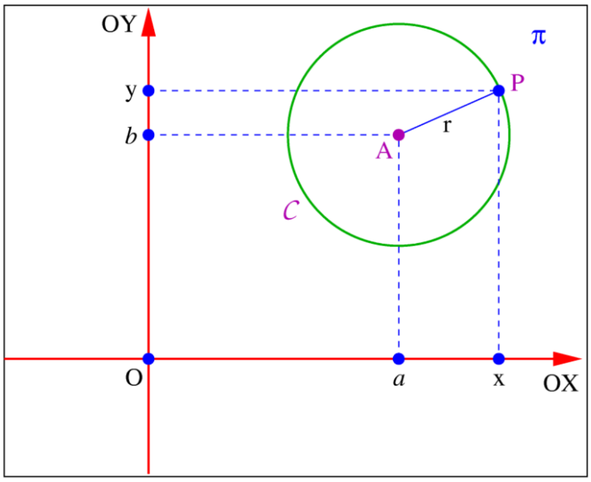

Figura 14: Círculo de centro $A = (a, b)$ e raio $r > 0$.

Exemplo 4

Determine o centro e o raio do círculo dado pela equação:

(a) $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$.

(b) $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 3x - 5y + 1 = 0$.

Solução.

(a) *Completando os quadrados*, obtemos:

$$x^2 - 4x + y^2 + 6y = 0$$
$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) = 0 + 4 + 9$$
$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 13.$$

Portanto, o círculo $\mathcal{C}$ tem centro no ponto $A = (2, -3)$ e raio $r = \sqrt{13}$.

(b) *Completando os quadrados*, obtemos:

$$x^2 + 3x + y^2 - 5y = -1$$
$$\left(x^2 + 3x + \frac{9}{4}\right) + \left(y^2 - 5y + \frac{25}{4}\right) = -1 + \frac{9}{4} + \frac{25}{4}$$
$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{30}{4}\,.$$

Assim, $\mathcal{C}$ é o círculo de centro no ponto $A = \left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ e raio $\frac{\sqrt{30}}{2}$. □

Exemplo 5

Seja OXY um sistema de eixos ortogonais e considere os pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$. Então, $M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ é o **ponto médio** *do segmento P_1P_2.*

Solução.

De fato, considerando os pontos $Q_1 = (x_M, y_1)$ e $Q_2 = (x_M, y_2)$, temos que os triângulos $\triangle P_1MQ_1$ e $\triangle P_2MQ_2$ são congruentes (AAL), onde $M = (x_M, y_M)$.

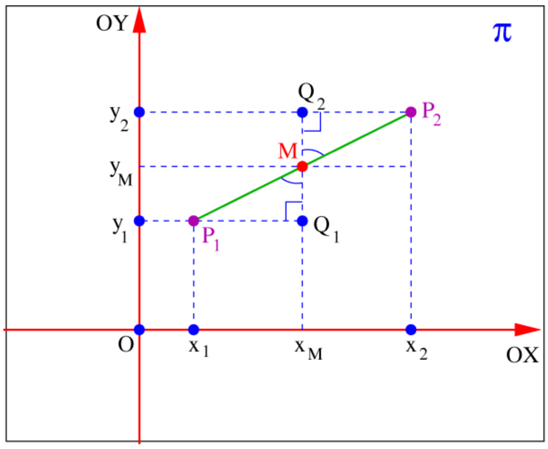

Figura 15: M é o ponto médio do segmento P_1P_2.

Logo,

- $d(P_1, Q_1) = d(P_2, Q_2)$
  $\Longrightarrow$ $|x_M - x_1| = |x_2 - x_M|$
  $\Longrightarrow$ x_M é o ponto médio entre x_1 e x_2
  $\Longrightarrow$ $x_M = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$.

- $d(Q_1, M) = d(Q_2, M)$ $\Longrightarrow$ $|y_M - y_1| = |y_2 - y_M|$
  $\Longrightarrow$ y_M é o ponto médio entre y_1 e y_2
  $\Longrightarrow$ $y_M = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

Assim, as coordenadas do ponto médio M do segmento P_1P_2 são os valores médios das respectivas coordenadas dos pontos P_1 e P_2. □

Exemplo 6

Dados dois pontos A e B do plano π, seja $\mathcal{R}$ o conjunto dos pontos equidistantes de A e B, ou seja:

$$\boxed{\mathcal{R} = \{P \in \pi \,|\, d(P, A) = d(P, B)\}.}$$

Mostre algebricamente que $\mathcal{R}$ é a **mediatriz do segmento** AB*, isto é, $\mathcal{R}$ é a reta perpendicular ao segmento AB que passa pelo ponto médio M de AB.*

Solução.

Para isso, escolhemos um sistema de eixos ortogonais OXY de modo que o eixo$-OX$ seja a reta que passa pelos pontos A e B, com origem no ponto médio M do segmento AB e orientada de modo que A esteja à esquerda de B (figura 17).

Neste sistema de eixos, A e B têm coordenadas $(-x_0, 0)$ e $(x_0, 0)$, respectivamente, para algum número real $x_0 > 0$. Então,

$$\begin{aligned} P = (x, y) \in \mathcal{R} \iff d(P, A) = d(P, B) &\iff d(P, A)^2 = d(P, B)^2 \\ &\iff (x - (-x_0))^2 + (y - 0)^2 = (x - x_0)^2 + (y - 0)^2 \\ &\iff (x + x_0))^2 + y^2 = (x - x_0)^2 + y^2 \\ &\iff x^2 + 2xx_0 + x_0^2 + y^2 = x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 \\ &\iff 2xx_0 = -2xx_0 \iff 4xx_0 = 0 \iff x = 0 \iff P \in \text{eixo} - OY\,. \end{aligned}$$

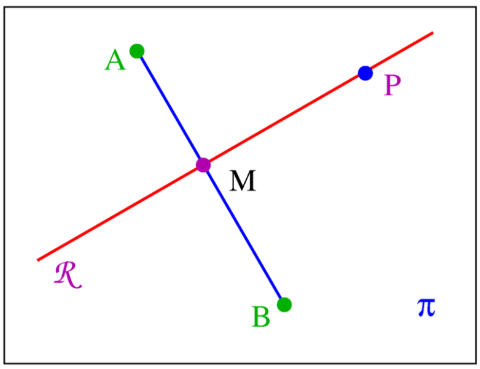

Figura 16: Mediatriz e ponto médio de AB.

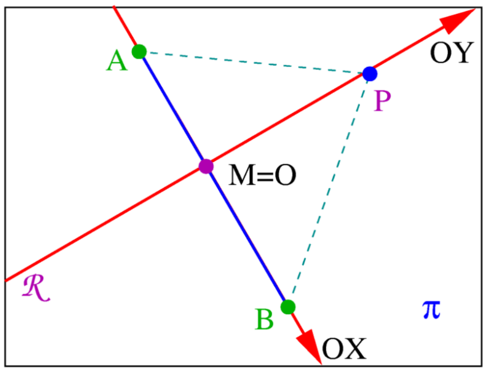

Figura 17: Escolha do sistema de eixos ortogonais OXY.

Portanto, $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = 0\} = \text{eixo} - OY$, que é geometricamente a reta perpendicular ao segmento AB que passa pelo ponto médio M deste segmento, como queríamos provar. $\square$

Exemplo 7

Dado o ponto $P = (x, y)$, considere os pontos $P' = (-y, x)$ e $P'' = (y, -x)$. Mostre que os pontos P' e P'' são obtidos a partir do ponto P por uma rotação de 90^o do segmento OP em torno da origem.

Convencionamos dizer que a rotação de 90^o que leva o ponto $P = (x, y)$ ao ponto $P' = (-y, x)$ tem **sentido positivo**, *e que a rotação de 90^o que leva o ponto P ao ponto P'' tem* **sentido negativo**.

Solução.

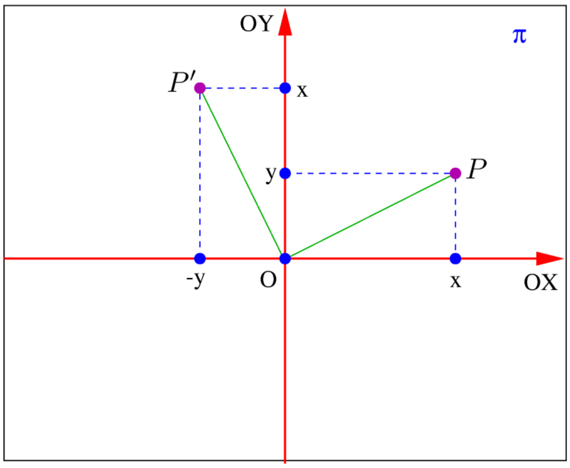

Figura 18: Posição dos pontos P e P' no plano.

Como

$$\begin{cases} d(P, O)^2 = (x-0)^2 + (y-0)^2 = x^2 + y^2 \\ d(P', O)^2 = (-y-0)^2 + (x-0)^2 = y^2 + x^2, \end{cases}$$

temos que o triângulo $\triangle POP'$ é isósceles.
Além disso,

$$d(P, P')^2 = (-y-x)^2 + (y-x)^2 = y^2 + 2xy + x^2 \ + \ x^2 - 2xy + y^2$$
$$\Longrightarrow d(P, P')^2 = 2(x^2 + y^2) \Longrightarrow d(P, P')^2 = d(P, O)^2 + d(P', O)^2 \, .$$

Logo, pela lei dos cossenos, o triângulo $\triangle POP'$ é retângulo em O.

Isso significa que o ponto P' é obtido a partir do ponto P por uma rotação de 90^o do segmento OP em torno da origem.

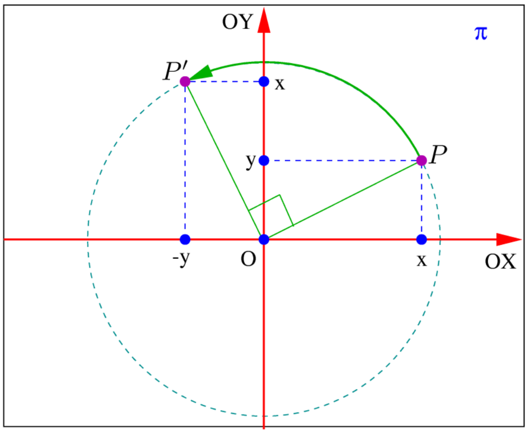

Figura 19: P rotacionado de 90^o até coincidir com P'.

Consideremos agora o ponto $P'' = (y, -x)$. De maneira análoga, podemos provar que P'' é obtido a partir do ponto P por uma rotação de 90^o do segmento OP em torno da origem.

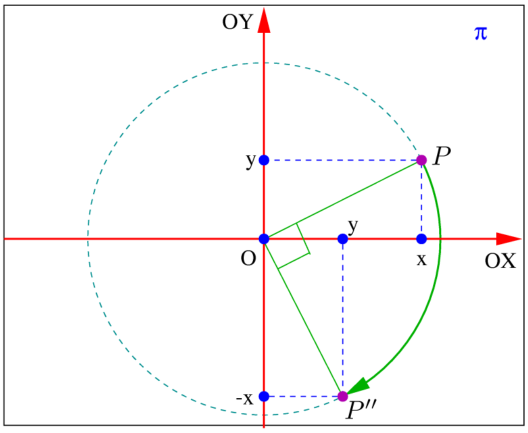

Figura 20: P rotacionado de 90^o até coincidir com P''.

□

Capítulo 2

Vetores no plano

1. Paralelogramos

Lembremos que um **paralelogramo** é um quadrilátero (figura geométrica com quatro lados) cujos lados opostos são paralelos.

Usando congruência de triângulos, podemos verificar que as seguintes afirmativas são equivalentes:

- O quadrilátero $ABDC$ é um paralelogramo;
- Os lados opostos de $ABDC$ são congruentes;
- Os ângulos opostos de $ABDC$ são congruentes;
- Dois lados opostos de $ABDC$ são congruentes e paralelos;
- As diagonais de $ABDC$ se intersectam num ponto que é o ponto médio de ambas.

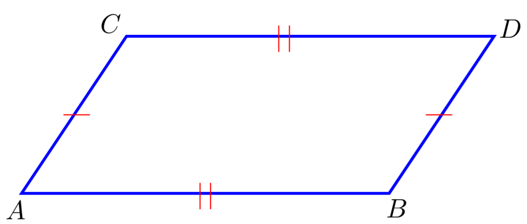

Figura 1: Paralelogramo $ABDC$.

Por exemplo, vamos demonstrar a seguinte equivalência:

Proposição 1

No quadrilátero $ABDC$ os lados opostos AC e BD são congruentes e paralelos se, e somente se, as diagonais de $ABDC$ se intersectam num ponto que é o ponto médio de ambas.

Prova.

(a) Suponhamos que os lados opostos AC e BD no quadrilátero $ABDC$ são congruentes e paralelos, e seja M o ponto de interseção das diagonais AD e BC. Pela hipótese, temos:

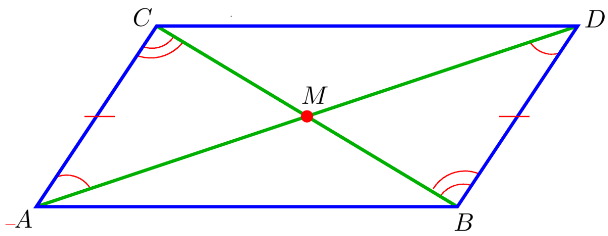

Figura 2: $ABDC$ de lados opostos congruentes e paralelos.

- $|AC| = |BD|$, isto é, os comprimentos dos lados AC e BD são iguais;
- $AC \parallel BD$.

Logo,

- $\widehat{ACB} = \widehat{DBC}$, por serem ângulos alternos internos;
- $\widehat{CAD} = \widehat{BDA}$, por serem ângulos alternos internos.

Pelo critério ALA (ângulo-lado-ângulo), concluímos que os triângulos $\triangle AMC$ e $\triangle DMB$ são congruentes.

Em particular, $|AM| = |DM|$ e $|BM| = |CM|$. Portanto, M é o ponto médio das diagonais AD e BC.

(b) Suponhamos agora que as diagonais AD e BC do quadrilátero $ABDC$ se intersectam no ponto M que é o ponto médio de ambas.

Devemos mostrar que os lados opostos AC e BD no paralelogramo $ABDC$ são paralelos e congruentes. Temos:

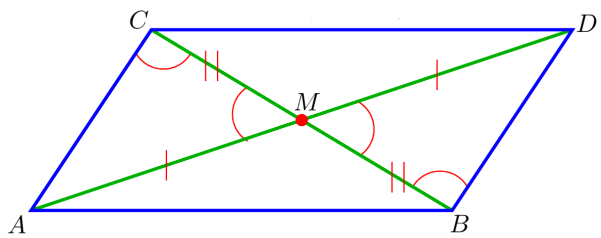

Figura 3: $ABDC$ com $|AM| = |DM|$ e $|BM| = |MC|$.

- $|AM| = |DM|$
- $|BM| = |CM|$

• $\widehat{AMC} = \widehat{DMB}$, pois são ângulos opostos pelo vértice.

Pelo critério LAL (lado-ângulo-lado), os triângulos $\triangle AMC$ e $\triangle DMB$ são congruentes.

Em particular, $|AC| = |DB|$ e $\widehat{ACB} = \widehat{CBD}$, ou seja, os lados AC e DB são congruentes e paralelos. ■

Você pode (e deve) demonstrar as outras equivalências da mesma forma.

2. Segmentos orientados

Seja AB um **segmento orientado** com origem A e extremidade B. Isto é, no segmento AB estabelecemos um *sentido de percurso* (orientação) de A para B.

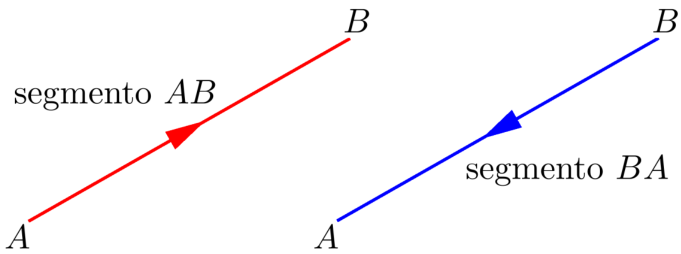

Figura 4: Os segmentos AB e BA têm sentidos opostos.

Dizemos que o segmento orientado BA tem sentido de percurso (ou orientação) **oposto ou contrário** ao do segmento AB. Classificamos os segmentos orientados da seguinte maneira:

Definição 1

Dizemos que os segmentos AB e CD são **equipolentes**, e escrevemos $AB \equiv CD$, quando satisfazem às três propriedades abaixo:

- AB e CD têm o mesmo comprimento: $|AB| = |CD|$.
- AB e CD são paralelos ou colineares.
- AB e CD tem o mesmo sentido.

Esclarecimento da definição de equipolência

- Se AB e CD são segmentos colineares, então eles têm o mesmo sentido quando induzem o mesmo sentido de percurso na reta que os contêm.

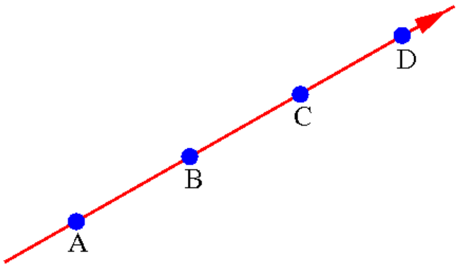

Figura 5: Segmentos colineares AB e CD que têm o mesmo sentido.

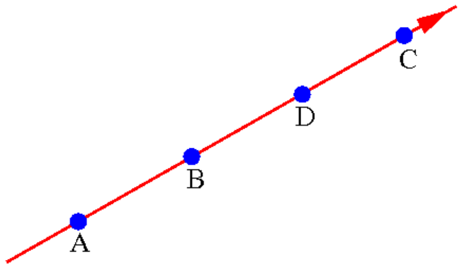

Figura 6: Segmentos colineares AB e CD que **não** têm o mesmo sentido.

- Se AB e CD são segmentos paralelos de igual comprimento, então AB e CD têm o mesmo sentido quando $ABDC$ é um paralelogramo.

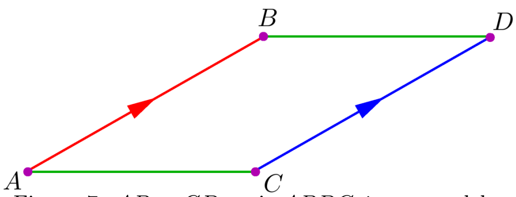

Figura 7: $AB \equiv CD$, pois $ABDC$ é um paralelogramo.

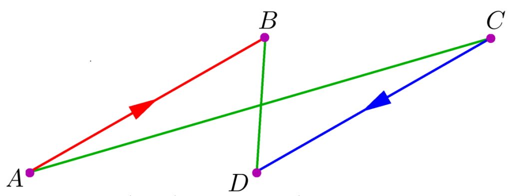

Figura 8: $AB \not\equiv CD$, pois $ABDC$ **não** é um paralelogramo.

Proposição 2

$$\boxed{AB \equiv CD \iff \text{ponto médio de } AD = \text{ponto médio de } BC}$$

Prova.

Com efeito, se $AB \parallel CD$ já sabemos que a equivalência é verdadeira, pois $ABDC$ é um paralelogramo.

Vejamos que isso também é verdadeiro quando AB e CD são segmentos colineares.

Consideremos a reta r que contém A, B, C e D com uma orientação e uma origem O escolhidas de modo que B esteja à direita de A (figura 9).

Sejam a, b, c e d as respectivas coordenadas dos pontos A, B, C e D na reta r.

(a) Como AB e CD têm o mesmo sentido, $a < b$ e $c < d$, e, como estes segmentos têm o mesmo comprimento, $b - a = d - c$. Logo,

$$\begin{aligned} b-a=d-c \iff & a+d=b+c \iff \frac{a+d}{2}=\frac{b+c}{2} \\ \iff & \text{ ponto médio de } AD = \text{ ponto médio de } BC. \end{aligned}$$

(b) Reciprocamente, suponhamos que o ponto médio de AD é igual ao ponto médio de BC. Isto é, $\frac{a+d}{2}=\frac{b+c}{2}$. Então,

$$a+d=b+c \Longrightarrow b-a=d-c\,.$$

Como $b-a$ e $d-c$ têm o mesmo sinal e o mesmo módulo, AB e CD têm o mesmo sentido e o mesmo comprimento, além de serem colineares (por hipótese). Assim, $AB \equiv CD$. ■

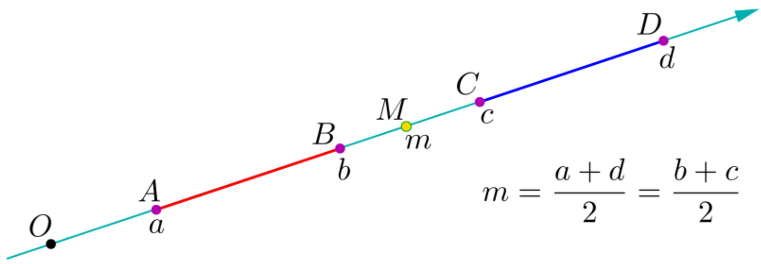

Figura 9: $AB \equiv CD$ com A, B, C e D colineares.

Proposição 3

Dados A, B e C pontos quaisquer no plano, existe um único ponto D no plano tal que $AB \equiv CD$.

Prova.

Como os pontos A, B e C podem ou não ser colineares, temos dois casos a considerar.

(a) A, B e C são colineares.

Neste caso, a circunferência de centro no ponto C e raio $|AB|$ intersecta a reta que contém os pontos A, B e C em exatamente dois pontos, mas apenas um deles, que designamos D, é tal que AB e CD têm o mesmo sentido (veja a figura 10).

(b) A, B e C **não** são colineares.

Seja r a reta que passa pelo ponto C e é paralela à reta que contém os pontos A e B.

O círculo de centro C e raio $|AB|$ intersecta a reta r em exatamente dois pontos, mas só um, que designamos D, é tal que $ABDC$ é um paralelogramo. Ou seja, $AB \equiv CD$ (veja a figura 11).

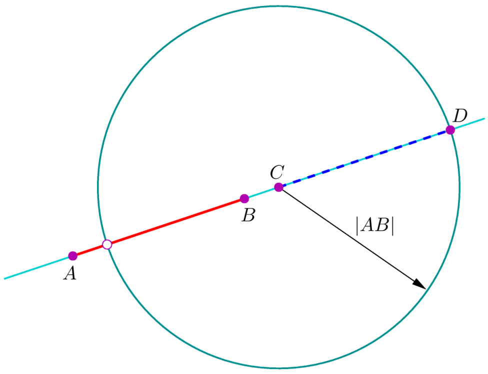

Figura 10: $AB \equiv CD$ com A, B e C colineares.

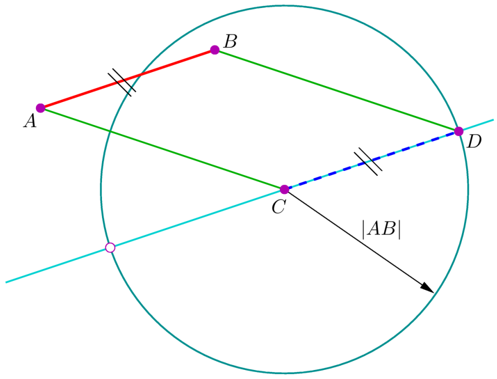

Figura 11: $AB \equiv CD$ com A, B e C não colineares.

■

3. Vetores

Definição 2

Quando os segmentos de reta orientados AB e CD são equipolentes, dizemos que eles representam o mesmo **vetor** $\overrightarrow{v}$ e escrevemos $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$.

Isto é, o vetor $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ é o conjunto que consiste de todos os segmentos orientados equipolentes ao segmento AB. Tais segmentos são chamados **representantes** do vetor $\overrightarrow{v}$.

Observação 1

(a) Da definição de vetor, temos $AB \equiv CD \Longleftrightarrow \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

(b) Por convenção, o **vetor nulo** é o vetor $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AA}$, qualquer que seja o ponto A no plano.

(c) Dado um vetor $\overrightarrow{v}$ e um ponto qualquer C, existe um único ponto D tal que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD}$. Isto é, qualquer ponto do plano é origem de um único segmento orientado representante do vetor $\overrightarrow{v}$.

Na prática, trabalhamos com vetores usando a sua expressão em relação a um sistema de eixos ortogonais dado.

Consideremos um sistema de eixos ortogonais OXY no plano, e sejam

$$A = (a_1, a_2) \qquad C = (c_1, c_2)$$
$$B = (b_1, b_2) \qquad D = (d_1, d_2)$$

pontos do plano. A seguinte proposição caracteriza a equipolência em termos de coordenadas.

Proposição 4

$$\boxed{AB \equiv CD \iff b_1 - a_1 = d_1 - c_1 \quad \text{e} \quad b_2 - a_2 = d_2 - c_2}$$

Prova.

Pela proposição 2,

$$\begin{aligned}
AB \equiv CD &\iff \text{ponto médio de } AD = \text{ ponto médio de } BC \\
&\iff \left(\frac{a_1 + d_1}{2}, \frac{a_2 + d_2}{2}\right) = \left(\frac{b_1 + c_1}{2}, \frac{b_2 + c_2}{2}\right) \\
&\iff (a_1 + d_1, a_2 + d_2) = (b_1 + c_1, b_2 + c_2) \\
&\iff a_1 + d_1 = b_1 + c_1 \quad \text{e} \quad a_2 + d_2 = b_2 + c_2 \\
&\iff b_1 - a_1 = d_1 - c_1 \quad \text{e} \quad b_2 - a_2 = d_2 - c_2.
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

Definição 3

Dados $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$, os números $b_1 - a_1$ e $b_2 - a_2$ são as **coordenadas do vetor** $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ e escrevemos $\overrightarrow{v} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$.

Note que, se $AB \equiv CD$, então, pela proposição anterior,

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (d_1 - c_1, d_2 - c_2) = \overrightarrow{CD}.$$

Exemplo 1

Sejam $A = (1, 2)$, $B = (3, 1)$ e $C = (4, 0)$. Determine as coordenadas do *vetor* $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ *e as coordenadas do ponto* D *tal que* $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD}$.

Solução.

Temos $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = (3-1, 1-2) = (2, -1)$. Além disso, se $D = (d_1, d_2)$, temos

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} &\iff AB \equiv CD \\ &\iff (2,-1) = (d_1 - 4, d_2 - 0) \\ &\iff 2 = d_1 - 4 \quad \text{e} \quad -1 = d_2 - 0 \\ &\iff d_1 = 2 + 4 = 6 \quad \text{e} \quad d_2 = -1 + 0 = -1\,.\end{aligned}$$

Portanto, $D = (6, -1)$. □

Corolário 1

Usando a proposição 4, é fácil verificar que:

(a) $AB \equiv CD \iff AC \equiv BD$.

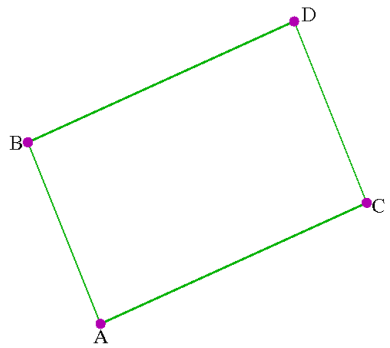

Figura 12: $AB \equiv CD \iff AC \equiv BD$

(b) $AB \equiv CD$ e $CD \equiv EF \Longrightarrow AB \equiv EF$.

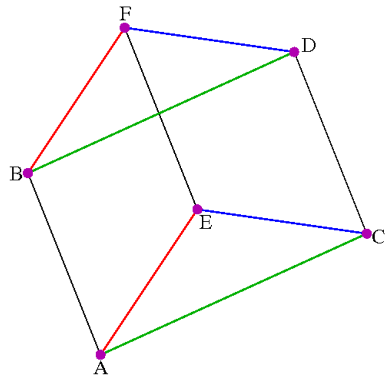

Figura 13: $AB \equiv CD$ *e* $CD \equiv EF \Longrightarrow AB \equiv EF$.

Em virtude do item (c) da observação 1, temos:

Proposição 5

Sejam OXY um sistema de eixos ortogonais e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ um vetor.

Então existe um único ponto P tal que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{v}$. Além disso, as coordenadas do ponto P coincidem com as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v}$.

Prova.

De fato, se $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ e $P = (p_1, p_2)$, então $\overrightarrow{v} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ e

$$\begin{aligned} AB \equiv OP &\iff (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = (p_1 - 0, p_2 - 0) \\ &\iff P = (p_1, p_2) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) \end{aligned}$$

como queríamos verificar. ■

Exemplo 2

Sejam $A = (-1, 2)$ e $B = (4, 1)$. Determine o ponto P tal que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$.

Solução.

Pela proposição anterior,

$$P = (4 - (-1), 1 - 2) = (4 + 1, -1) = (5, -1).$$

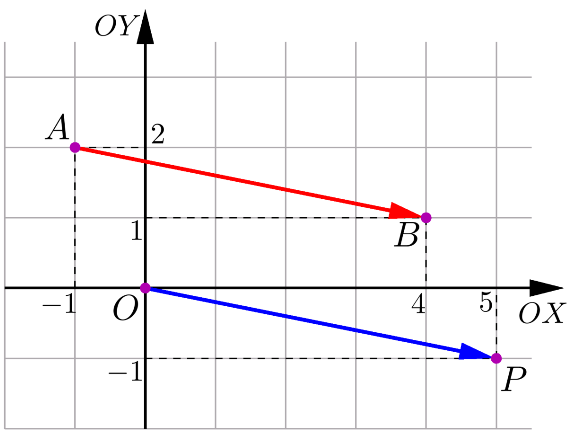

Figura 14: Exemplo 2, onde $AB \equiv OP$.

□

4. Operações com vetores

Vamos definir a operação de adição de vetores que a cada par de vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ faz corresponder um novo vetor, chamado **soma** dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

Sejam $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD}$ vetores dados e seja E um ponto no plano. Tomemos pontos P e Q tais que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{EP}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PQ}$.

Definimos o **vetor soma** de $\overrightarrow{u}$ com $\overrightarrow{v}$ como sendo o único vetor que tem o segmento EQ como um representante (veja a figura 15). Isto é,

$$\boxed{\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{EQ}}$$

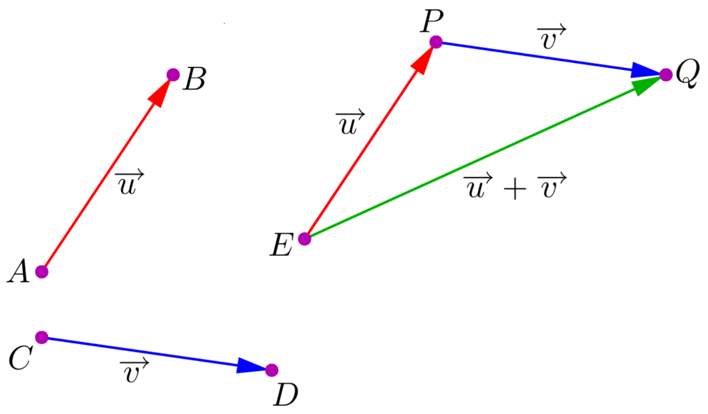

Figura 15: Adição de vetores.

Quando se faz uma definição que depende, aparentemente, da escolha de um representante devemos mostrar que a classe do novo objeto definido independe do representante escolhido.

A adição de vetores é uma operação bem definida.

Com efeito, seja E' outro ponto do plano, e sejam P' e Q' pontos tais que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{E'P'}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{P'Q'}$. Segundo a definição anterior, deveríamos ter também $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{E'Q'}$.

Verifiquemos, então, que os segmentos EQ e $E'Q'$ são equipolentes.

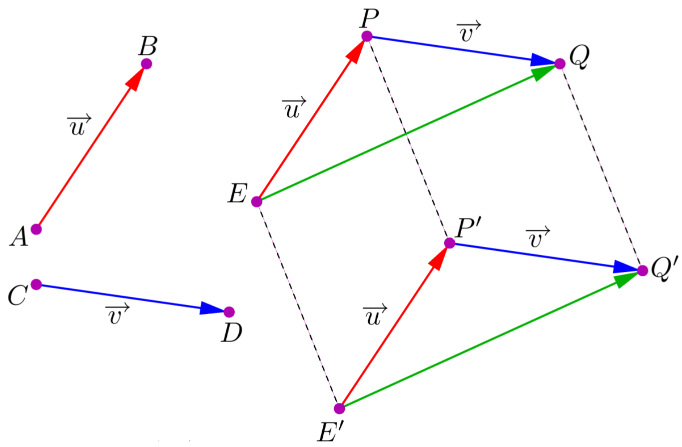

Figura 16: O segmento EQ é equipolente ao segmento $E'Q'$?

Pelo corolário 1(a) (acompanhe a argumentação na figura 16), temos:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} = \overrightarrow{EP} = \overrightarrow{E'P'} &\implies EP \equiv E'P' \implies EE' \equiv PP'\,, \\ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'} &\implies PQ \equiv P'Q' \implies PP' \equiv QQ'\,. \end{aligned}$$

Logo, pelo corolário 1(b), $EE' \equiv QQ'$ e novamente pelo corolário 1(a):

$$EQ \equiv E'Q' \Longrightarrow \overrightarrow{EQ} = \overrightarrow{E'Q'}\,.$$

Portanto, o vetor $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ está bem definido.

Observação 2

Sejam $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD}$ vetores no plano. Quando os segmentos AB e CD não são colineares ou paralelos, podemos determinar também o vetor soma $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ da seguinte maneira:

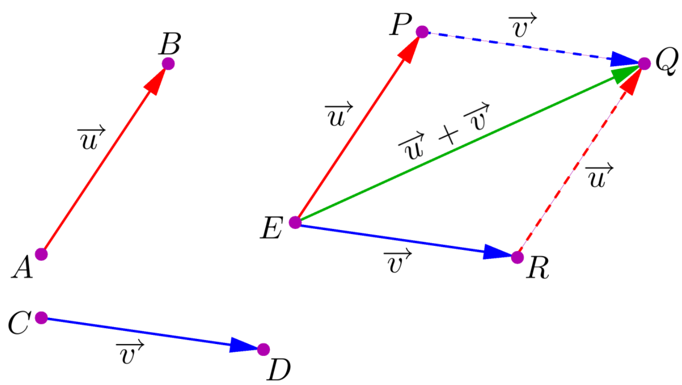

Figura 17: Adição de vetores como a diagonal de um paralelogramo.

Seja E um ponto do plano e sejam P e R tais que

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{EP} \text{ e } \overrightarrow{v} = \overrightarrow{ER}\,.$$

Então o vetor soma $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ é o vetor $\overrightarrow{EQ}$, onde EQ é uma das diagonais do paralelogramo que tem E, P e R como vértices.

De fato, como $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{EP}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{ER} = \overrightarrow{PQ}$, então

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{EP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{EQ}\,.$$

Adição de vetores em coordenadas

Se $\overrightarrow{u} = (\alpha, \beta)$ e $\overrightarrow{v} = (\alpha', \beta')$ são dois vetores dados por suas coordenadas com respeito a um sistema ortogonal OXY, então

$$\boxed{\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (\alpha + \alpha', \beta + \beta')}$$

De fato, pela proposição 5, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OQ}$, onde $P = (\alpha, \beta)$ e $Q = (\alpha', \beta')$.

Seja $Q' = (a, b)$ o ponto tal que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PQ'}$. Então, pela proposição 4,

$$\begin{aligned}
& (\alpha' - 0, \beta' - 0) = (a - \alpha, b - \beta) \\
\Longrightarrow \quad & Q' = (a, b) = (\alpha + \alpha', \beta + \beta') \\
\Longrightarrow \quad & \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ'} \\
& = \overrightarrow{OQ'} = (\alpha + \alpha', \beta + \beta').
\end{aligned}$$

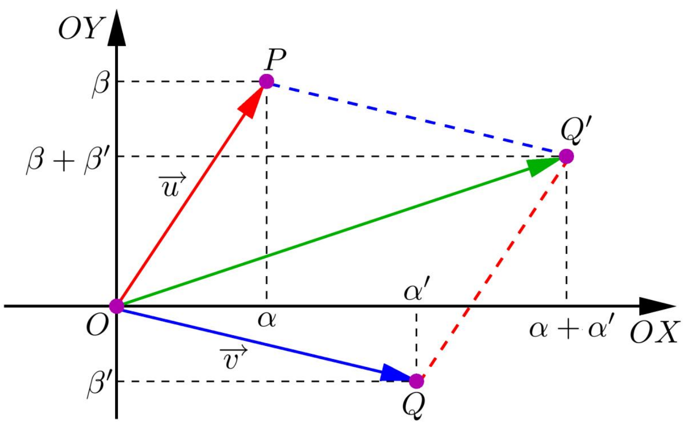

Figura 18: Adição de vetores em coordenadas.

Multiplicação de um número real por um vetor

Definição 4

Sejam $\overrightarrow{AB}$ um vetor e $\lambda \in \mathbb{R}$. O **produto de λ por $\overrightarrow{AB}$** é o vetor

$$\boxed{\overrightarrow{AB'} = \lambda\,\overrightarrow{AB}}$$

representado pelo segmento orientado AB', tal que:

- A, B, B' são colineares;
- $d(A, B') = |\lambda| d(A, B)$;
- o sentido de AB' é igual ao sentido de AB se $\lambda > 0$, e oposto, se $\lambda < 0$;
- $B' = A$, se $\lambda = 0$.

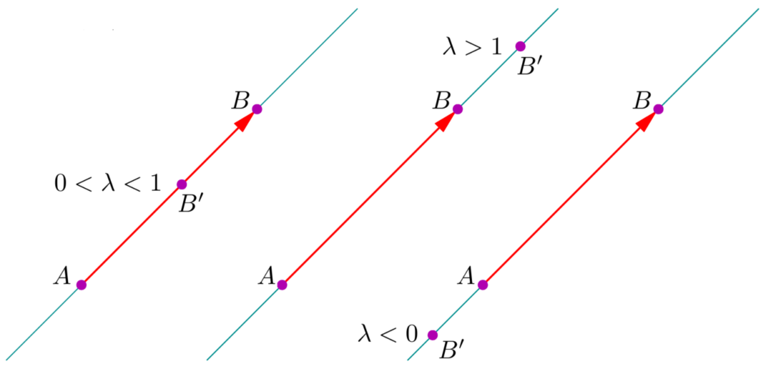

Figura 19: Multiplicação de um vetor por um número real.

Seja OXY um sistema de eixos ortogonais. Vamos mostrar, usando a definição geométrica dada acima, que:

$$\boxed{B' = (a_1 + \lambda\,(b_1 - a_1), a_2 + \lambda\,(b_2 - a_2)),}$$

onde $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ e $\lambda \neq 0$.

De fato:

- $$\begin{aligned} d(A, B') &= \sqrt{\lambda^2(b_1 - a_1)^2 + \lambda^2(b_2 - a_2)^2} \\ &= |\lambda|\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} \\ &= |\lambda| d(A, B); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet\ d(B,B') &= \sqrt{(\lambda(b_1-a_1)+(a_1-b_1))^2+(\lambda(b_2-a_2)+(a_2-b_2))^2}\\
&= \sqrt{(\lambda-1)^2(b_1-a_1)^2+(\lambda-1)^2(b_2-a_2)^2}\\
&= |\lambda-1|\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}\\
&= |\lambda-1|d(A,B).
\end{aligned}$$

Para verificar que A, B e B' são colineares, analisaremos os quatro casos abaixo:

Caso 1. Se $\lambda \in (0,1)$, então:

$$d(A,B')+d(B',B) = \lambda d(A,B)+(1-\lambda)d(A,B) = d(A,B).$$

Logo, pelo teorema 1, A, B e B' são colineares e B' está entre A e B.

Caso 2. Se $\lambda = 1$, $B' = (b_1, b_2) = B$, o que coincide com a definição geométrica de B'.

Caso 3. Se $\lambda > 1$, então:

$$d(A,B)+d(B,B') = d(A,B)+(\lambda-1)d(A,B) = \lambda d(A,B) = d(A,B').$$

Então, pelo teorema 1, A, B e B' são colineares e B está entre A e B'.

Caso 4. Se $\lambda < 0$, então:

$$d(B',A)+d(A,B) = -\lambda d(A,B)+d(A,B) = (1-\lambda)d(A,B) = d(B',B).$$

Assim, pelo teorema 1, A, B e B' são colineares e A está entre B' e B.

Resta provar que $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AB'}$ têm o mesmo sentido se $\lambda > 0$ e sentidos opostos se $\lambda < 0$.

Suponhamos primeiro que

$$b_1 - a_1 > 0.$$

Neste caso, o sentido de percurso de A para B coincide, no eixo-OX, com o sentido de crescimento das abscissas dos pontos.

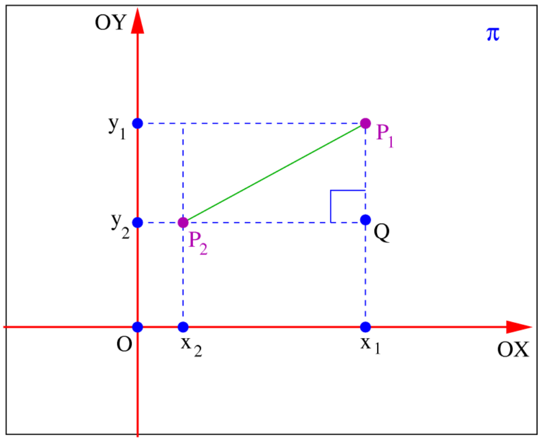

Figura 20: Sentido de percurso de A para B.

Portanto:

• Se $\lambda > 0$, então $a_1 + \lambda(b_1 - a_1) > a_1$, ou seja, o sentido de A para B' coincide com o sentido de A para B.

• Se $\lambda < 0$, então $a_1 + \lambda(b_1 - a_1) < a_1$, ou seja, o sentido de A para B' é oposto ao sentido de A para B.

O caso de $b_1 - a_1 < 0$ pode ser analisado de maneira análoga.

Suponhamos agora que $b_1 - a_1 = 0$. Neste caso, $b_2 - a_2 \neq 0$, pois A e B são pontos distintos.

Se $b_2 - a_2 > 0$, o sentido de percurso de A para B coincide, no eixo-OY, com o sentido de crescimento das ordenadas dos pontos.

De modo análogo ao caso $b_1 - a_1 > 0$, podemos verificar que o sentido de percurso de A para B' coincide com o de A para B se $\lambda > 0$, e é oposto ao de A para B, se $\lambda < 0$.

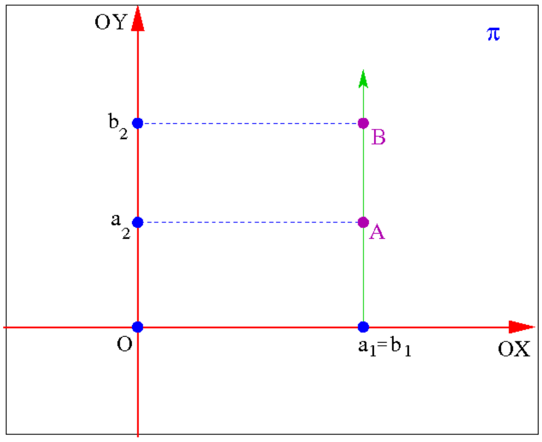

Figura 21: Sentido de percurso de A para B.

O caso $b_2 - a_2 < 0$ pode ser analisado da mesma maneira.

Provamos assim que:

$$\boxed{\overrightarrow{AB'} = \lambda\overrightarrow{AB} = (\lambda\,(b_1 - a_1), \lambda\,(b_2 - a_2)).}$$

Definição 5

A multiplicação do vetor $\overrightarrow{v}$ pelo número real λ é, por definição, o vetor $\lambda\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{AB}$, onde $\overrightarrow{AB}$ é um representante do vetor $\overrightarrow{v}$.

Pelo provado acima, $\lambda\overrightarrow{v}$ está bem definido, pois se $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$, então, num sistema de eixos ortogonais,

$$\overrightarrow{v} = (d_1 - c_1, d_2 - c_2) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2),$$

onde $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2), C = (c_1, c_2)$ e $D = (d_1, d_2)$.

Portanto,

$$\lambda\overrightarrow{CD} = (\lambda(d_1 - c_1), \lambda(d_2 - c_2)) = (\lambda(b_1 - a_1), \lambda(b_2 - a_2))$$
$$\Longrightarrow \lambda\overrightarrow{CD} = \lambda\overrightarrow{AB}.$$

Além disso, fica provado também que:

$$\boxed{\text{se } \overrightarrow{v} = (\alpha, \beta) \text{ então } \lambda\overrightarrow{v} = (\lambda\alpha, \lambda\beta).}$$

Então, se $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP}$ e $\lambda\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP'}$, temos que $P = (\alpha, \beta)$ e $P' = (\lambda\alpha, \lambda\beta)$.

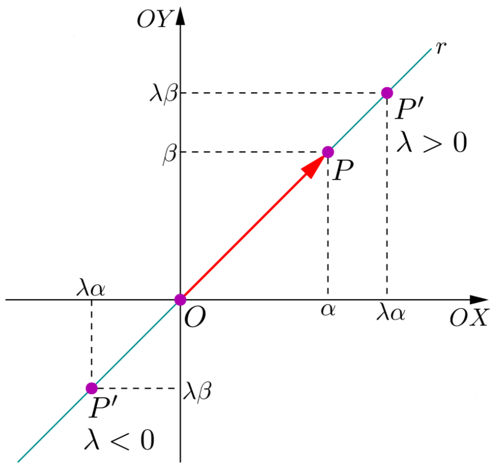

Figura 22: Coordenadas dos vetores $\vec{v} = \vec{OP}$ e $\lambda\vec{v} = \vec{OP'}$.

Observação 3

Note que,

- $\lambda\overrightarrow{0} = \lambda\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$;
- $0\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$.

Não confunda: o número 0 (zero) com o vetor $\overrightarrow{0}$.

Proposição 6

Um ponto P pertence a reta r que passa pelos pontos A e B se, e somente se,

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}, \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Prova.

Pela definição de multiplicação do vetor $\overrightarrow{AB}$ pelo número real λ, o ponto P tal que $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$ pertence a reta r.

Reciprocamente, seja P um ponto pertencente a reta r e seja $\mu = \dfrac{d(A,P)}{d(A,B)}$.

Se o sentido de percurso de A para P, ao longo de r, coincidir com o sentido de A para B, então $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$, onde $\lambda = \mu$, pois pelo teorema 1, item (a), o ponto P é o único ponto da semirreta de origem em A que passa por B tal que $d(A,P) = \mu d(A,B)$.

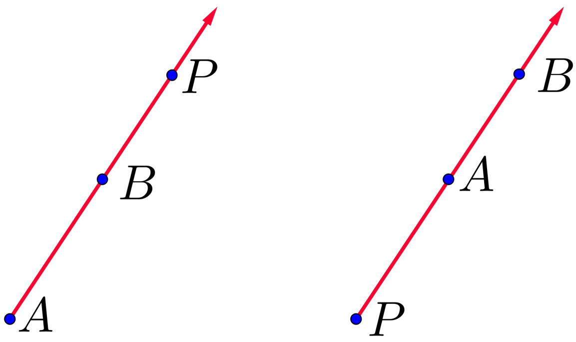

Figura 23: Sentido de percurso de A para B.

Se o sentido de percurso, ao longo de r, de A para P for oposto ao sentido de A para B, então $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$, onde $\lambda = -\mu$, pois, pelo teorema 1, item (a), o ponto P é o único ponto da semirreta de origem em A oposta a semirreta de origem em A que passa por B tal que $d(A,P) = \mu(A,B)$. ■

Exemplo 3

Dados os vetores $\overrightarrow{u} = (1,-1)$ e $\overrightarrow{v} = (3,1)$, *determine*

$$\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{b} = \overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v},\ \overrightarrow{c} = \frac{1}{2}\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}.$$

Solução.

Temos

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a} &= 2\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\\ &= 2(1,-1) + (3,1)\\ &= (2(1), 2(-1)) + (3,1)\\ &= (2,-2) + (3,1)\\ &= (2+3, -2+1)\\ &= (5,-1)\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{b} &= \overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}\\ &= (1,-1) + 2(3,1)\\ &= (1,-1) + (2(3), 2(1))\\ &= (1,-1) + (6,2)\\ &= (1+6, -1+2)\\ &= (7,1)\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{c} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}\\ &= \frac{1}{2}(7,1) - (5,-1)\\ &= \left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right) - (5,-1)\\ &= \left(\frac{7}{2} - 5, \frac{1}{2} - (-1)\right)\\ &= \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)\,.\end{aligned}$$

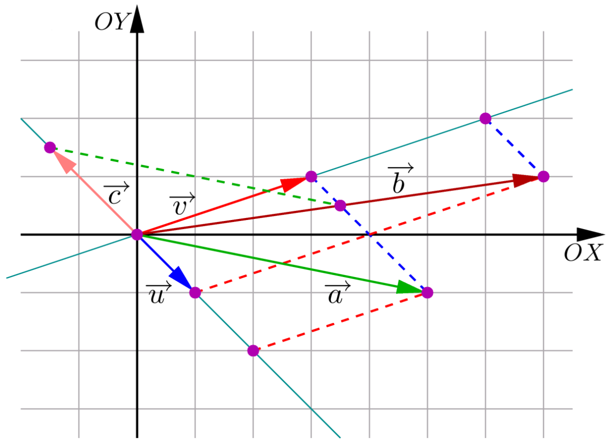

Figura 24: Exemplo 3.

□

Exemplo 4

Dados os pontos do plano $A = (1,3)$ e $B = (6,1)$.

(a) *Calcule o ponto médio C do segmento AB utilizando a multiplicação de um vetor por um número real.*

(b) *Determine os pontos D e E que dividem o segmento AB em três partes iguais.*

Solução.

(a) Para isto basta notar que

$$\boxed{\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\,.}$$

Assim, se $C = (x,y)$ temos:

$$(x-1, y-3) = \frac{1}{2}(5,-2) = \left(\frac{5}{2}, -1\right),$$

então:

$$\begin{cases} x-1 &= \dfrac{5}{2} \\ y-3 &= -1 \end{cases} \Longrightarrow x = \frac{7}{2} \text{ e } y = 2.$$

Portanto,

$$C = \left(\frac{7}{2}, 2\right).$$

(b) Note que:

$$\boxed{\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \text{ e } \overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}}$$

Assim, se $D = (x, y)$ e $E = (z, w)$ temos:

$$(x-1, y-3) = \frac{1}{3}(5, -2) = \left(\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}\right),$$

$$(z-1, w-3) = \frac{2}{3}(5, -2) = \left(\frac{10}{3}, -\frac{4}{3}\right),$$

então:

$$\begin{cases} x-1 &= \dfrac{5}{3} \\ y-3 &= -\dfrac{2}{3} \end{cases} \Longrightarrow x = \frac{8}{3} \text{ e } y = \frac{7}{3}$$

e

$$\begin{cases} z-1 &= \dfrac{10}{3} \\ w-3 &= -\dfrac{4}{3} \end{cases} \Longrightarrow z = \frac{13}{3} \text{ e } w = \frac{5}{3}$$

Portanto, $D = \left(\frac{8}{3}, \frac{7}{3}\right)$ e $E = \left(\frac{13}{3}, \frac{5}{3}\right)$. □

Observação 4

O método utilizado para resolver o exemplo acima pode ser generalizado da seguinte maneira: dado um segmento AB, os pontos $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}$ que dividem o segmento AB em n partes iguais são dados por:

$$\boxed{\overrightarrow{AP_k} = \frac{k}{n}\overrightarrow{AB}, k = 1, \cdots, n-1.}$$

5. Propriedades das operações com vetores

Propriedades da adição de vetores

Sejam $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores no plano. Valem as seguintes propriedades.

- **Comutatividade:** $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$.
- **Associatividade:** $\overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w}$.
- **Existência de elemento neutro aditivo:** o vetor zero $\overrightarrow{0}$ é tal que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$.
- **Existência de inversos aditivos:** para cada vetor $\overrightarrow{u}$ existe um único vetor, que designamos $-\overrightarrow{u}$, tal que $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$.

- De fato, se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$, então

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Se D é o outro vértice do paralelogramo $ABCD$, então $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{DC}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AD}$.

Logo,

$$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}.$$

Portanto,

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.$$

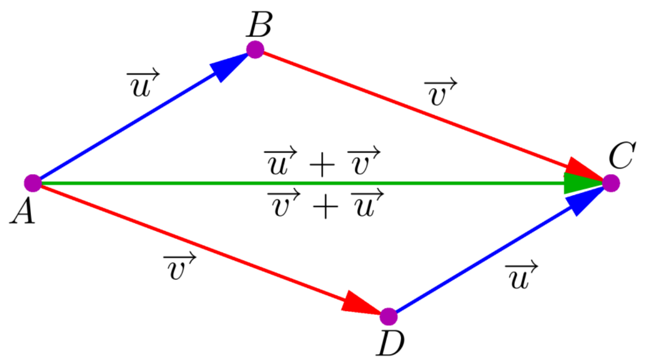

Figura 25: Comutatividade da adição de vetores.

• A associatividade da adição de vetores se verifica de maneira análoga.

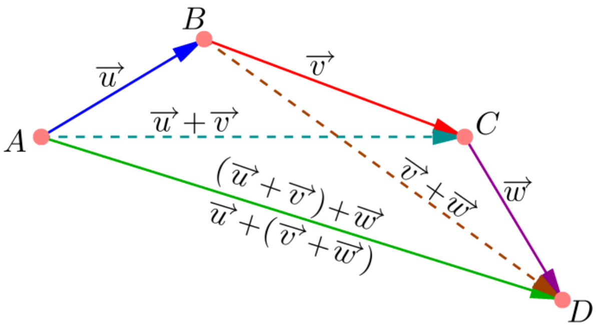

Figura 26: Associatividade da adição de vetores.

Quanto às outras duas propriedades, observe que:

• se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, sendo $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$, temos:

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u},$$
$$\overrightarrow{0} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}.$$

• o **simétrico** ou **inverso aditivo** do vetor $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ é o vetor $-\overrightarrow{u} = \overrightarrow{BA}$, pois

$$\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0},$$
$$-\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{0}.$$

Observação 5

O **vetor simétrico** $-\overrightarrow{u} = \overrightarrow{BA}$ *do vetor* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ *é o vetor* $(-1)\overrightarrow{u}$*, pois se* $\overrightarrow{u} = (\alpha, \beta)$ *é o vetor* $\overrightarrow{u}$ *dado em coordenadas, então:*

$$\overrightarrow{BA} = (-\alpha, -\beta) = (-1)(\alpha, \beta) = (-1)\overrightarrow{AB}.$$

Definição 6

O vetor $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{v})$, escrito $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$, é chamado **diferença entre** $\overrightarrow{u}$ **e** $\overrightarrow{v}$.

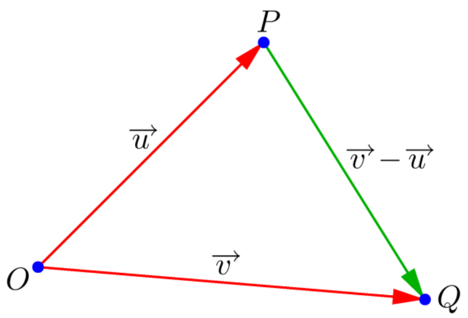

Figura 27: Diferença entre vetores.

Sejam A, B, C pontos do plano tais que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$. Então,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{v}) &= \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AC}) \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} \\ &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}. \end{aligned}$$

Propriedades da multiplicação de números reais por vetores

Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores no plano e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Valem as seguintes propriedades:

- **Existência de elemento neutro multiplicativo:** $1 \in \mathbb{R}$ satisfaz $1\,\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$.
- **Propriedades distributivas:** $\lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}$ e $(\lambda + \mu)\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{u}$.

As propriedades distributivas são verificadas usando coordenadas e a propriedade distributiva que já conhecemos nos números reais.

De fato, se $\overrightarrow{u} = (a, b)$ e $\overrightarrow{v} = (a', b')$, então, dados $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned} \lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) &= \lambda\,[(a, b) + (a', b')] = \lambda(a + a', b + b') \\ &= (\lambda(a + a'), \lambda(b + b')) = (\lambda a + \lambda a', \lambda b + \lambda b') \\ &= (\lambda a, \lambda b) + (\lambda a', \lambda b') = \lambda(a, b) + \lambda(a', b') \\ &= \lambda\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}. \end{aligned}$$

A outra propriedade distributiva se verifica da mesma forma (faça-o!).

6. Combinação linear de vetores

Definição 7

(a) Dizemos que o vetor $\overrightarrow{v}$ é **múltiplo** do vetor $\overrightarrow{u}$ se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$.

(b) Dizemos que um vetor $\overrightarrow{v}$ é **combinação linear** dos vetores $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n$ quando existem números reais $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, tais que

$$\overrightarrow{v} = \lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{v}_2 + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{v}_n.$$

Em relação a esta definição, observe que:

• O vetor nulo $\overrightarrow{0}$ é múltiplo de qualquer vetor $\overrightarrow{u}$.

De fato, $\overrightarrow{0} = 0\overrightarrow{u}$.

• Nenhum vetor não nulo pode ser múltiplo do vetor nulo.

De fato, se $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, não existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda\overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$, pois $\lambda\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

• Se $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ é múltiplo de $\overrightarrow{u}$, então $\overrightarrow{u}$ é também múltiplo de $\overrightarrow{v}$.

Com efeito, seja $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$. Como $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, temos $\lambda \neq 0$ e $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$.

Logo $\overrightarrow{u} = \dfrac{1}{\lambda}\overrightarrow{v}$.

• Note que dizer que $\overrightarrow{v}$ é combinação linear dos vetores $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n$ significa que $\overrightarrow{v}$ é soma de múltiplos dos vetores $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n$.

A seguinte proposição fornece uma maneira para determinar quando dois vetores são, ou não, múltiplo um do outro.

Proposição 7

Um dos vetores $\overrightarrow{u} = (a, b)$ e $\overrightarrow{v} = (a', b')$ é múltiplo do outro se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba' = 0\,.$$

Prova.

($\Longrightarrow$) Suponha que $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Como $\overrightarrow{u} = (a, b)$ e $\overrightarrow{v} = (a', b')$, temos:

$$(a', b') = \lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b) \Longrightarrow a' = \lambda a$$

e

$$b' = \lambda b \Longrightarrow ab' - ba' = a\lambda b - b\lambda a = 0.$$

($\Longleftarrow$) Suponhamos agora que $ab' - ba' = 0$.

Caso $a = 0$: Se $a = 0$, então $ba' = 0$, ou seja, $b = 0$ ou $a' = 0$. Logo:

$$\begin{cases} \bullet \quad b = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{u} = (0,0) = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \overrightarrow{u} = 0\overrightarrow{v}. \\[2em] \bullet \quad a' = 0 \text{ e } b \neq 0 \Longrightarrow (0, b') = \dfrac{b'}{b}(0, b) \Longrightarrow \overrightarrow{v} = \dfrac{b'}{b}\overrightarrow{u}. \end{cases}$$

Caso $a \neq 0$: Se $a \neq 0$, temos $ab' - ba' = 0 \Longrightarrow b' = b\dfrac{a'}{a}$. Logo:

$$\frac{a'}{a}\overrightarrow{u} = \frac{a'}{a}(a,b) = \left(\frac{a'}{a}a, \frac{a'}{a}b\right) = (a', b') = \overrightarrow{v}.$$

Portanto, em qualquer caso, um dos vetores é múltiplo do outro. ■

Exemplo 5

Determine se os vetores $\overrightarrow{u} = (1,2)$ e $\overrightarrow{v} = (3,6)$ são múltiplos um do outro.

Solução.

Temos $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$. Portanto, um vetor é múltiplo do outro.

Note que $\overrightarrow{v} = 3\overrightarrow{u}$. □

Proposição 8

Se nenhum dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ é múltiplo um do outro, então qualquer outro vetor $\overrightarrow{w}$ do plano se escreve de modo único como combinação linear de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$. Isto é, existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, determinados de forma única por $\overrightarrow{w}$, tais que $\overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$.

Prova.

De fato, se $\overrightarrow{u} = (a,b)$, $\overrightarrow{v} = (a',b')$ e $\overrightarrow{w} = (a'',b'')$ temos, pela proposição 7, que $ab' - ba' \neq 0$.

Vamos determinar $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ de modo que $\overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$.

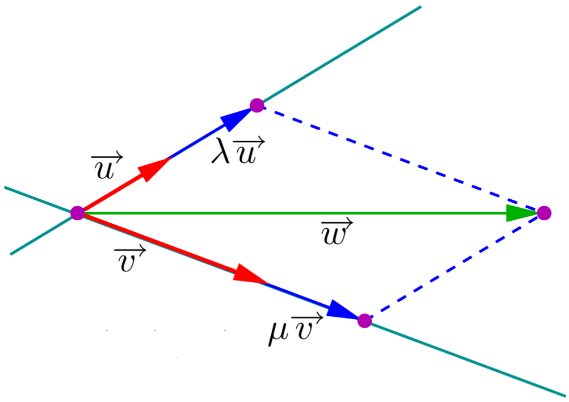

Figura 28: Vetor $\vec{w}$ é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Em coordenadas, esta condição equivale a

$$\begin{aligned}(a'', b'') &= \lambda(a, b) + \mu(a', b') \\ &= (\lambda a + \mu a', \lambda b + \mu b').\end{aligned}$$

Ou seja, os números λ e μ devem ser soluções do sistema:

$$\begin{cases} \lambda a + \mu a' = a'' \\ \lambda b + \mu b' = b''. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos:

$$\lambda = \frac{a''b' - b''a'}{ab' - ba'} \qquad \text{e} \qquad \mu = \frac{ab'' - ba''}{ab' - ba'}.$$

Ou seja, os números λ e μ existem e são determinados de forma única. ■

Observação 6

O plano é bidimensional (de dimensão 2).Isso significa que basta conhecer **dois** vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, que não sejam múltiplos um do outro, para conhecer todos os outros vetores do plano. De fato, pela proposição anterior, qualquer outro vetor se expressa de forma única como combinação linear destes dois vetores.

Exemplo 6

Verifique que qualquer vetor do plano se escreve como combinação linear dos vetores $\overrightarrow{u} = (2, -1)$ *e* $\overrightarrow{v} = (-3, 2)$*, e escreva o vetor* $\overrightarrow{w} = (1, 1)$ *como combinação linear de* $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

Solução.

• Como $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 0$, os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ não são múltiplos um do outro. Pela proposição anterior, qualquer outro vetor se escreve de maneira única como soma de múltiplos dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

• Dado o vetor $\overrightarrow{w} = (1, 1)$, devemos achar $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}.$$

Escrevendo esta equação em coordenadas, vemos que:

$$(1, 1) = \lambda(2, -1) + \mu(-3, 2) = (2\lambda - 3\mu, -\lambda + 2\mu),$$

ou seja,

$$\begin{cases} 2\lambda - 3\mu = 1 \\ -\lambda + 2\mu = 1\,. \end{cases}$$

Os números λ e μ que resolvem este sistema são:

$$\lambda = \frac{1 \times 2 - (-3) \times 1}{1} = 2 + 3 = 5$$

e

$$\mu = \frac{2 \times 1 - 1 \times (-1)}{1} = 2 + 1 = 3.$$

Portanto, $\overrightarrow{w} = 5\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}$. □

7. Produto interno de dois vetores

Vamos agora definir um novo tipo de multiplicação. Os fatores desta nova operação são vetores e o produto é um número real.

Começamos com a seguinte definição:

Definição 8

A **norma** ou **comprimento** do vetor $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ é o número real não negativo:

$$\boxed{\|\overrightarrow{v}\| = d(A, B).}$$

Observe que a norma de um vetor é um número bem definido, isto é, depende apenas do vetor e não do segmento orientado escolhido para representá-lo.

De fato, se

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Longrightarrow AB \equiv CD \Longrightarrow d(A,B) = d(C,D).$$

Ou seja, a norma de um vetor $\overrightarrow{v}$ se calcula usando qualquer segmento representante.

Consideremos agora um sistema de eixos ortogonais OXY.

Se $\overrightarrow{v} = (x, y) = \overrightarrow{OP}$, então $P = (x, y)$ e

$$\boxed{\|\overrightarrow{v}\| = d(O,P) = \sqrt{x^2 + y^2}.}$$

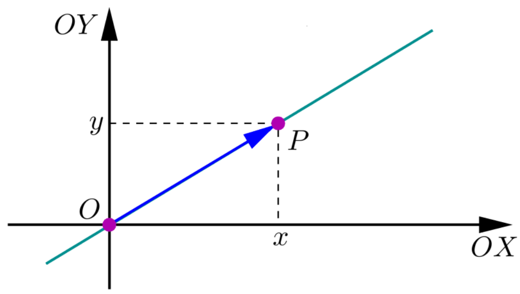

Figura 29: Representante na origem de um vetor para o cálculo da norma.

Quando $\|\overrightarrow{v}\| = 1$, dizemos que o vetor $\overrightarrow{v}$ é um **vetor unitário**.

Observação 7

Se $\overrightarrow{v} = (x, y)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ então $\|\lambda\overrightarrow{v}\| = |\lambda|\,\|\overrightarrow{v}\|$. De fato, como $\lambda\,\overrightarrow{v} = (\lambda x, \lambda y)$, então:

$$\begin{aligned} \|\lambda\,\overrightarrow{v}\| &= \sqrt{\lambda^2x^2 + \lambda^2 + y^2} = \sqrt{\lambda^2(x^2+y^2)} \\ &= \sqrt{\lambda^2}\sqrt{x^2+y^2} = |\lambda|\sqrt{x^2+y^2} = |\lambda|\,\|\overrightarrow{v}\|. \end{aligned}$$

Definição 9

Sejam $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ vetores no plano. O ***ângulo*** *entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, designado $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, é o menor ângulo formado pelos segmentos AB e AC.*

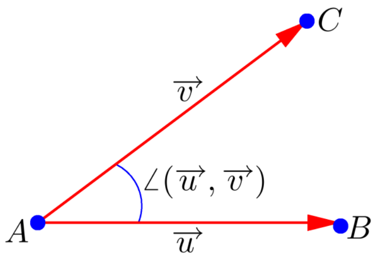

Figura 30: Ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Observação 8

Se $\overrightarrow{v}$ é um vetor não nulo, então $\dfrac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}$ é um vetor unitário que tem a mesma direção e o mesmo sentido de $\overrightarrow{v}$. Com efeito, pela observação 7,

$$\left\| \frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|} \right\| = \left| \frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|} \right| \|\overrightarrow{v}\| = \frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|} \|\overrightarrow{v}\| = 1.$$

Além disso, como

$$\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{v}\| \frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}$$

e $\|\overrightarrow{v}\| > 0$, temos que $\overrightarrow{v}$ e $\dfrac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}$ têm a mesma direção e o mesmo sentido.

Assim, se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são vetores não nulos,

$$\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \angle\left(\frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}, \frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|} \right).$$

Definição 10

O **produto interno** dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ do plano é o número real, que designamos por $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$, definido da seguinte maneira:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0\,, & \text{se} & \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{v} = 0 \\ \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\| \cos\theta\,, & \text{se} & \overrightarrow{u} \neq 0\,, \overrightarrow{v} \neq 0 \quad \text{e} \quad \theta = \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \end{array}}$$

Proposição 9

Sejam $\overrightarrow{u} = (\alpha, \beta)$ *e* $\overrightarrow{v} = (\alpha', \beta')$ *dois vetores no plano. Então,*

$$\boxed{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \alpha\alpha' + \beta\beta'}$$

Prova.

Se $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ são vetores nulos, a identidade acima verifica-se, pois, neste caso, $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$ e $\alpha\alpha' + \beta\beta' = 0$.

Suponhamos agora que $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são vetores não nulos. Se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OQ}$, então $P = (\alpha, \beta)$, $Q = (\alpha', \beta')$ e

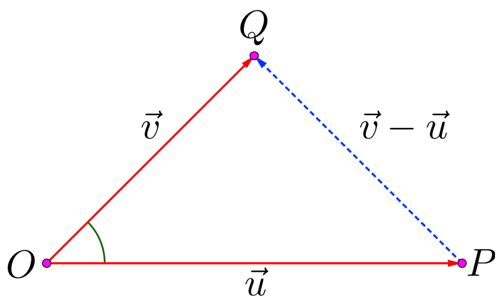

Figura 31: Diferença $\vec{v}-\vec{u}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OQ}\\ &= \overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}\\ &= \overrightarrow{v}-\overrightarrow{u}\\ &= (\alpha'-\alpha,\beta'-\beta).\end{aligned}$$

Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo $\triangle OPQ$, temos:

$$\|\overrightarrow{v}-\overrightarrow{u}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|^2-2\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\,\cos\theta\,,$$

onde $\theta=\angle(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$. Desta identidade, obtemos:

$$\begin{aligned}2\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\,\cos\theta &= \|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{v}-\overrightarrow{u}\|^2\\ &= (\alpha^2+\beta^2)+((\alpha')^2+(\beta')^2)-((\alpha'-\alpha)^2+(\beta'-\beta)^2)\\ &= \alpha^2+\beta^2+(\alpha')^2+(\beta')^2-((\alpha')^2-2\alpha'\alpha+\alpha^2\\ &+ (\beta')^2-2\beta'\beta+\beta^2)\\ &= \alpha^2+\beta^2+(\alpha')^2+(\beta')^2-(\alpha')^2+2\alpha'\alpha-\alpha^2\\ &- (\beta')^2+2\beta'\beta-\beta^2\\ &= 2\alpha'\alpha+2\beta'\beta\\ &= 2(\alpha\alpha'+\beta\beta')\end{aligned}$$

Portanto, $\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle=\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\,\cos\theta=\alpha\alpha'+\beta\beta'$, como queríamos demonstrar. ■

Com a expressão do produto interno em coordenadas, fica fácil provar as seguintes propriedades.

Proposição 10

Sejam $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores do plano e seja $\lambda\in\mathbb{R}$. Valem as seguintes propriedades:

(1) $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle = \|\overrightarrow{u}\|^2 \geq 0$

(2) $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

(3) $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle$

(4) $\langle \lambda\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \lambda\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$

(5) $\langle \overrightarrow{u}, \lambda\overrightarrow{v} \rangle = \lambda\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$

(6) $\langle \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle + \langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} \rangle$

(7) $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \rangle = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle + \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle$

Definição 11

Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores do plano. Dizemos que $\overrightarrow{u}$ é **perpendicular** a $\overrightarrow{v}$ se $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 90^o$ ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. Se $\overrightarrow{u}$ é perpendicular a $\overrightarrow{v}$ escrevemos $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$. Note que $\overrightarrow{u}$ é perpendicular a $\overrightarrow{v}$ se, e somente se, $\overrightarrow{v}$ é perpendicular a $\overrightarrow{u}$.

Temos, então, a seguinte caracterização da perpendicularidade entre dois vetores por meio do produto interno.

Proposição 11

Dois vetores são perpendiculares se, e somente se, o seu produto interno é igual a zero. Isto é,

$$\boxed{\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \Longleftrightarrow \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0}$$

Prova.

Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores do plano. Se algum destes vetores é o vetor nulo, então $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ e $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$, por definição.

Suponhamos, então, que $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ e $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, e seja $\theta = \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Então,

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\,\cos\theta = 0 \Longleftrightarrow \cos\theta = 0 \Longleftrightarrow \theta = 90^o,$$

como queríamos demonstrar. ■

Proposição 12

Seja $\overrightarrow{u} = (a, b)$ *um vetor não nulo. Então o vetor* $\overrightarrow{v}$ *é perpendicular ao* *vetor* $\overrightarrow{u}$ *se, e só se,* $\overrightarrow{v} = \lambda(-b, a)$*, para algum* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Prova.
De fato, se $v = \lambda(-b, a)$, então

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = a(-\lambda b) + b(\lambda a) = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}.$$

Reciprocamente, se $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$ e $\overrightarrow{v} = (c, d)$, então $ac + bd = 0$, isto é,

$$\begin{vmatrix} c & d \\ -b & a \end{vmatrix} = 0.$$

Logo, pela Proposição 7, (c, d) é múltiplo de $(-b, a)$, ou seja, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{v} = (c, d) = \lambda(-b, a)$. ■

Exemplo 7

Dados os pontos $A = (-2, 3), B = (0, 1)$ *e* $C = (4, 2)$*. Calcule o cosseno do ângulo* θ *entre os vetores* $\overrightarrow{AB}$ *e* $\overrightarrow{AC}$.

Solução.
Sabemos que

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = ||\overrightarrow{AB}|| \cdot ||\overrightarrow{AC}|| \cos\theta.$$

Por outro lado, como $\overrightarrow{AB} = (2, -2)$ e $\overrightarrow{AC} = (6, -1)$, temos:

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = 2 \cdot 6 - 2 \cdot (-1) = 14.$$

E ainda, $||\overrightarrow{AB}|| = 2\sqrt{2}$ e $||\overrightarrow{AC}|| = \sqrt{37}$, o que implica que

$$14 = 2\sqrt{2}\sqrt{37}\cos\theta \Longrightarrow \cos\theta = 7/\sqrt{74}.$$

□

Exemplo 8

Dados os vetores $\overrightarrow{u} = (4, -3)$ *e* $\overrightarrow{v} = (x, 1)$*, determine* $x \in \mathbb{R}$ *de modo que* $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 5$.

Solução.
Como $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 5$ temos:

$$4 \cdot x - 3 \cdot 1 = 5 \Longrightarrow x = 2.$$

Portanto, $x = 2$. □

Exemplo 9

Dados os vetores $\overrightarrow{u} = (a+1, 2)$ *e* $\overrightarrow{v} = (-3, 1)$, *calcule o valor de* $a \in \mathbb{R}$ *para que* $\overrightarrow{u}$ *seja perpendicular a* $\overrightarrow{v}$.

Solução.

Para que $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ sejam perpendiculares, é necessário e suficiente que

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0,$$

ou seja,

$$(a+1) \cdot (-3) + 2 \cdot 1 = 0 \Longleftrightarrow -3a - 3 + 2 = 0 \Longleftrightarrow a = -\tfrac{1}{3}.$$

Portanto, $a = -\dfrac{1}{3}$. □

Proposição 13

Seja $\overrightarrow{u} = (a, b)$ *um vetor não nulo. Então os vetores unitários* $\overrightarrow{v_1}$ *e* $\overrightarrow{v_2}$ *que fazem um ângulo* $\theta \in (0, \pi)$ *com o vetor* $\overrightarrow{u}$ *são dados por:*

$$\overrightarrow{v_1} = \cos\theta \frac{\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||} + \operatorname{sen}\theta \frac{\overrightarrow{w}}{||\overrightarrow{w}||}$$

$$\overrightarrow{v_2} = \cos(-\theta) \frac{\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||} + \operatorname{sen}(-\theta) \frac{\overrightarrow{w}}{||\overrightarrow{w}||},$$

onde $\overrightarrow{w} = (-b, a)$ *é um vetor perpendicular a* $\overrightarrow{v}$.

Prova.

De fato:

- $$\begin{aligned} ||\overrightarrow{v_1}||^2 &= < \cos\theta \frac{\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||} + \operatorname{sen}\theta \frac{\overrightarrow{w}}{||\overrightarrow{w}||}, \cos\theta \frac{\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||} + \operatorname{sen}\theta \frac{\overrightarrow{w}}{||\overrightarrow{w}||} > \\ &= \cos^2\theta < \frac{\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||}, \frac{\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||} > +2\cos\theta \operatorname{sen}\theta < \frac{\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||}, \frac{\overrightarrow{w}}{||\overrightarrow{w}||} > \\ &\quad + \operatorname{sen}^2\theta < \frac{\overrightarrow{w}}{||\overrightarrow{w}||}, \frac{\overrightarrow{w}}{||\overrightarrow{w}||} > \\ &= \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1, \end{aligned}$$

$$\bullet \quad \cos\angle(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{u}) = \frac{<\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{u}>}{||\overrightarrow{v_1}||||\overrightarrow{u}||} = \frac{<\cos\theta\frac{\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||}+\operatorname{sen}\theta\frac{\overrightarrow{w}}{||\overrightarrow{w}||},\overrightarrow{u}>}{||\overrightarrow{u}||} = \cos\theta\frac{<\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}>}{||\overrightarrow{u}||^2}+\operatorname{sen}\theta\frac{<\overrightarrow{w},\overrightarrow{u}>}{||\overrightarrow{w}||\cdot||\overrightarrow{u}||} = \cos\theta,$$

pois,

- $\dfrac{<\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}>}{||\overrightarrow{u}||^2} = \dfrac{1}{||\overrightarrow{u}||^2}<\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}> = \dfrac{||\overrightarrow{u}||^2}{||\overrightarrow{u}||^2} = 1$
- $\dfrac{<\overrightarrow{w},\overrightarrow{w}>}{||\overrightarrow{w}||^2} = \dfrac{1}{||\overrightarrow{w}||^2}<\overrightarrow{w},\overrightarrow{w}> = \dfrac{||\overrightarrow{w}||^2}{||\overrightarrow{w}||^2} = 1$
- $\dfrac{<\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}>}{||\overrightarrow{u}||||\overrightarrow{w}||} = \dfrac{1}{||\overrightarrow{u}||||\overrightarrow{w}||}<\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}> = 0.$

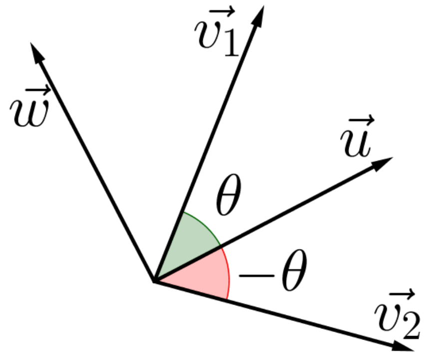

Figura 32: Vetores $\vec{u}, \vec{w}, \vec{v_1}, \vec{v_2}$.

De modo análogo, podemos mostrar que $||\overrightarrow{v_2}|| = 1$ e $\cos\angle(\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{u}) = \cos(-\theta) = \cos\theta$.

■

Exemplo 10

Determine os vetores unitários $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ que fazem um ângulo $\theta \in (0,\pi)$ com o vetor $\overrightarrow{u} = (1,2)$ tal que $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Solução.

Como $\theta \in (0,\pi)$ e $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, obtemos que $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Logo, pela proposição anterior,

- $$\begin{aligned} \overrightarrow{v_1} &= \cos\theta \frac{\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||} + \operatorname{sen}\theta \frac{\overrightarrow{w}}{||\overrightarrow{w}||} = \frac{2}{\sqrt{5}}\frac{(1,2)}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{(-2,1)}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{2}{5}(1,2) + \frac{1}{5}(-2,1) = (0,1), \end{aligned}$$

e

- $$\begin{aligned} \overrightarrow{v_2} &= \cos(-\theta) \frac{\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||} + \operatorname{sen}(-\theta) \frac{\overrightarrow{w}}{||\overrightarrow{w}||} = \frac{2}{\sqrt{5}}\frac{(1,2)}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{(-2,1)}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{2}{5}(1,2) - \frac{1}{5}(-2,1) = \left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right). \end{aligned}$$

□

Exemplo 11

Mostre que os pontos médios dos lados de um quadrilátero são os vértices de um paralelogramo.

Solução.
Seja $ABDC$ um quadrilátero qualquer e sejam X, Y, Z e W os pontos médios dos lados AC, CD, DB e BA, respectivamente. Devemos mostrar que $XYWZ$ é um paralelogramo (figura 33).
Temos:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{XY} &= \overrightarrow{XC} + \overrightarrow{CY} = \frac{\overrightarrow{AC}}{2} + \frac{\overrightarrow{CD}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \\ \overrightarrow{ZW} &= \overrightarrow{ZB} + \overrightarrow{BW} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2} + \frac{\overrightarrow{BD}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}. \end{aligned}$$

Logo $\overrightarrow{XY} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{ZW}$. Entao $XY \equiv ZW$, e portanto, $XYZW$ é um paralelogramo.

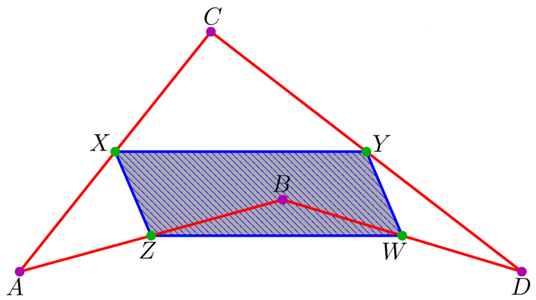

Figura 33: Pontos médios dos lados de um quadrilátero determinando um paralelogramo.

□

Capítulo 3

Equações da reta no plano

1. Equação paramétrica da reta

Vamos descrever algebricamente uma reta no plano usando a linguagem vetorial.

Reta r que passa pelos pontos A e B.

Seja r a reta que passa pelos pontos A e B e seja P um ponto do plano. Então, pela proposição 6 do capítulo anterior, o ponto P pertence à reta r se, e somente se, $\overrightarrow{AP}$ é múltiplo do vetor $\overrightarrow{AB}$.

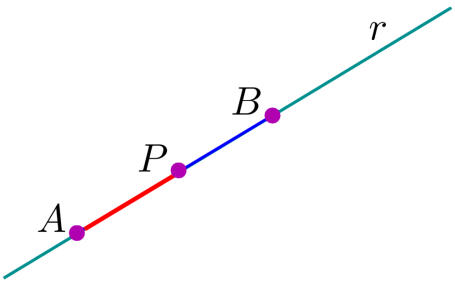

Figura 1: Ponto P pertencente a r.

Isto é, $P \in r$ se, e somente se, existe um número $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\boxed{\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}}$$

Note que o número t é determinado de forma única pelo ponto P e é chamado **parâmetro** de P em r.

Assim, para atingir o ponto P na reta r, devemos ir até o ponto A e nos deslocarmos ao longo da reta por $t\overrightarrow{AB}$. Escrevemos então a equação que determina o ponto P "pela variação do parâmetro t" da seguinte forma:

$$\boxed{r : P = A + t\overrightarrow{AB}\,, \quad t \in \mathbb{R}}$$

Esta equação é chamada **equação paramétrica** da reta r.

Se $A = (a, b)$, $B = (a', b')$ e $P = (x, y)$ são as coordenadas dos pontos num sistema de coordenadas dado, então:

$$\begin{aligned} P = (x, y) \in r \quad &\iff \quad (x, y) = (a, b) + t(a' - a, b' - b) \text{ para algum } t \in \mathbb{R} \\ &\iff \quad \begin{cases} x = a + t(a' - a) \\ y = b + t(b' - b), \end{cases} \text{para algum } t \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Dizemos que as equações

$$\boxed{r : \begin{cases} x = a + t(a' - a) \\ y = b + t(b' - b) \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}}$$

são as **equações paramétricas** da reta r.

Exemplo 1

Determine a equação paramétrica da reta que passa pelos pontos $A = (2, 3)$ *e* $B = (1, 2)$.

Solução.

Como $\overrightarrow{AB} = (1 - 2, 2 - 3) = (-1, -1)$,

$$\begin{aligned} P = (x, y) \in r \quad &\iff \quad (x, y) = (2, 3) + t(-1, -1), \quad t \in \mathbb{R} \\ &\iff \quad (x, y) = (2 - t, 3 - t), \quad t \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Portanto, as equações paramétricas de r são: $r : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}.$ $\square$

Definição 1

Dizemos que um vetor $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{O}$ é paralelo a uma reta r quando, para quaisquer dois pontos $A, B \in r$, o vetor $\overrightarrow{AB}$ é múltiplo do vetor $\overrightarrow{v}$. Nesse caso, escrevemos $\overrightarrow{v} \parallel r$.

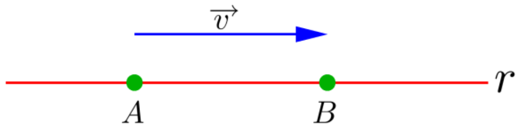

Figura 2: Vetor direção da reta r.

Um vetor $\overrightarrow{v}$ paralelo a uma reta r é chamado **vetor direção** de r.

Observação 1

Sejam C e D pontos pertencentes a reta r que passa pelos pontos A e B. Então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{CD} = \lambda \overrightarrow{AB}$.

De fato, pela proposição 6 do capítulo anterior, existem $s \in \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}$ tais que

$$\overrightarrow{AC} = s\overrightarrow{AB} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{AD} = t\overrightarrow{AB}.$$

Logo,

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB} - s\overrightarrow{AB} = (t-s)\overrightarrow{AB},$$

ou seja,

$$\overrightarrow{CD} = \lambda\overrightarrow{AB}, \text{ onde } \lambda = t - s.$$

Observação 2

É fácil verificar, usando a observação anterior, que um vetor $\overrightarrow{v}$ é paralelo à reta r se, e somente se, $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{AB}$, onde $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ e A, B são dois pontos fixos quaisquer da reta r.

Reta r que passa pelo ponto A e é paralela ao vetor $\overrightarrow{v} \neq 0$.

Se r é a reta que passa pelo ponto A e tem direção $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, temos:

$$\begin{aligned} P \in r \quad &\Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{AP} \text{ é múltiplo de } \overrightarrow{v} \\ &\Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{v}, \text{ para algum } t \in \mathbb{R} \\ &\Longleftrightarrow \quad P = A + t\overrightarrow{v}, \text{ para algum } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Portanto, a equação paramétrica de r é:

$$\boxed{r : P = A + t\overrightarrow{v}; \quad t \in \mathbb{R}}$$

Escrevendo essa equação em coordenadas, temos que se $A = (a, b)$ e $\overrightarrow{v} = (\alpha, \beta)$, então:

$$\begin{aligned} P = (x, y) \in r &\iff (x, y) = (a, b) + t(\alpha, \beta),\ t \in \mathbb{R} \\ &\iff \begin{cases} x = a + \alpha t \\ y = b + \beta t \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Assim, as equações paramétricas de r, neste caso, são:

$$\boxed{r : \begin{cases} x = a + \alpha t \\ y = b + \beta t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}}$$

Exemplo 2

Determinar a equação paramétrica da reta r que passa por $A = (1, 4)$ e é paralela ao vetor $\overrightarrow{v} = (5, 2)$.

Solução.

Temos que:

$$P = (x, y) \in r \iff (x, y) = (1, 4) + t(5, 2) = (1 + 5t, 4 + 2t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Portanto,

$$r : \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 4 + 2t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R},$$

são as equações paramétricas da reta r.$\square$

Exemplo 3

Determine o ponto de interseção da reta r_1 paralela ao vetor $\overrightarrow{v} = (1, 2)$ que passa pelo ponto $A = (3, 4)$ com a reta r_2 que passa pelos pontos $B = (2, 3)$ e $C = (-2, 4)$.

Solução.

Um ponto $P = (x, y) \in r_1$ se, e somente se, $P = A + t\overrightarrow{v}$, ou seja,

$$(x, y) = (3, 4) + t(1, 2)\ ,\ t \in \mathbb{R}.$$

E um ponto $P = (x, y) \in r_2$ se, e somente se, $P = B + s\overrightarrow{BC}$, isto é,

$$(x, y) = (2, 3) + s(-4, 1)\ ,\ s \in \mathbb{R}.$$

Logo um ponto $P = (x, y) \in r_1 \cap r_2$ se, e somente se,

$$\begin{aligned}
& (3,4) + t(1,2) = (2,3) + s(-4,1) \\
\iff & (3+t, 4+2t) = (2-4s, 3+s) \\
\iff & \begin{cases} 3+t = 2-4s \\ 4+2t = 3+s \end{cases} \iff \begin{cases} t+4s = -1 \\ 2t - s = -1 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} -2t-8s = 2 \\ 2t - s = -1 \end{cases} \iff -9s = 1 \ \text{ e } \ 2t = s-1 \\
\iff & s = -\frac{1}{9} \ \text{ e } \ t = \frac{s-1}{2} = \frac{-1/9-1}{2} = -\frac{10}{18} = -\frac{5}{9}.
\end{aligned}$$

Substituindo $t = -5/9$ em $(3+t, 4+2t)$ ou $s = -1/9$ em $(2-4s, 3+s)$, obtemos que o ponto de interseção das retas é:

$$P = \left(3 - \frac{5}{9}, 4 - \frac{10}{9}\right) = \left(2 + \frac{4}{9}, 3 - \frac{1}{9}\right) = \left(\frac{22}{9}, \frac{26}{9}\right).$$

□

Atenção: Para determinar o ponto de interseção de duas retas dadas por suas equações paramétricas, devemos usar parâmetros diferentes, pois o parâmetro de um ponto ao longo de uma reta pode não ser igual ao parâmetro do mesmo ponto ao longo da outra reta.

2. Equação cartesiana da reta

Equação da reta r que passa pelo ponto $A = (x_0, y_0)$ e é normal ao vetor $\overrightarrow{u} = (a, b) \neq \overrightarrow{0}$.

Vamos agora caracterizar algebricamente (usando o produto interno) a equação de uma reta normal (isto é, perpendicular) a uma direção dada.

Definição 2

Um vetor $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ é **normal** ou **perpendicular** a uma reta r se $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{AB}$, quaisquer que sejam os pontos $A, B \in r$.

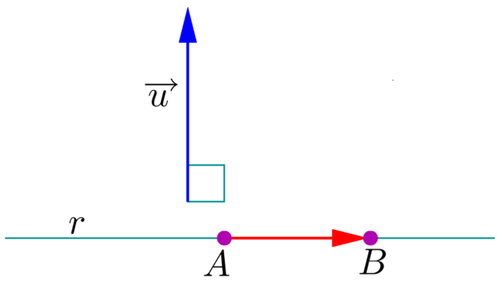

Figura 3: Vetor normal à reta r.

Seja r a reta que passa pelo ponto $A = (x_0, y_0)$ e é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{u} = (a, b) \neq \overrightarrow{0}$. Então,

$$\begin{aligned}
P = (x, y) \in r \quad &\Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{u} \\
&\Longleftrightarrow \quad \langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{u} \rangle = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \langle (x - x_0, y - y_0), (a, b) \rangle = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad ax + by = ax_0 + by_0 \\
&\Longleftrightarrow \quad ax + by = c\,, \qquad \text{onde} \qquad c = ax_0 + by_0.
\end{aligned}$$

A equação dada por:

$$\boxed{r : ax + by = c}$$

é chamada **equação cartesiana** da reta r.

Observação 3

Na equação cartesiana da reta r obtida acima, você deve observar que os coeficientes a e b de x e y, respectivamente, são as coordenadas do vetor normal $\overrightarrow{u} = (a, b)$ e que o valor de c é determinado quando se conhece um ponto de r, no caso, o ponto $A = (x_0, y_0)$. Observe também que a e b não podem ser ambos iguais à zero, pois $\overrightarrow{u} = (a, b)$ é um vetor não nulo.

Observação 4

Um vetor $\overrightarrow{u} = (a, b) \neq (0, 0)$ é normal à reta r se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{v} = (-b, a)$ é paralelo à r.

De fato, sejam A e B dois pontos quaisquer pertencentes à reta r.

Se $\overrightarrow{u} = (a, b)$ é normal à reta r então, por definição, $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{AB}$. Logo, pela proposição 12 do capítulo anterior, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{AB} = \lambda(-b, a) = \lambda\overrightarrow{v}$. Provamos assim, que se $\overrightarrow{u} = (a, b) \perp r$ então $\overrightarrow{v} = (-b, a) \parallel r$.

Suponhamos agora que $\overrightarrow{v} = (-b, a)$ é paralelo à reta r. Então, por definição, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{v}$. Logo,

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u} \rangle = \langle (-\lambda b, \lambda a), (a, b) \rangle = -\lambda ba + \lambda ab = 0,$$

ou seja, $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{AB}$. Assim, por definição, $\overrightarrow{u}$ é um vetor normal a r.

Exemplo 4

Determine a equação cartesiana da reta r que passa pelo ponto $A = (2, 3)$ e é normal ao vetor $\overrightarrow{u} = (1, 2)$.

Solução.

Como $\overrightarrow{u} \perp r$, devemos ter

$$r : x + 2\,y = c.$$

O valor de c é calculado sabendo que $A = (2, 3) \in r$:

$$c = 1 \times 2 + 2 \times 3 = 2 + 6 = 8.$$

Portanto, a equação procurada é

$$r : x + 2y = 8.$$

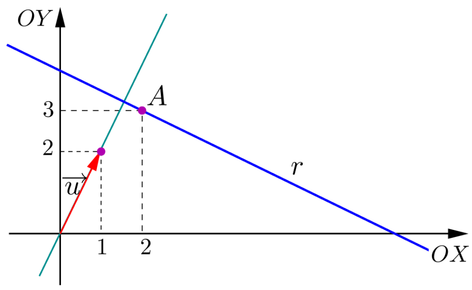

Figura 4: Exemplo 4.

□

Exemplo 5

Determinar a equação cartesiana da reta r que passa pelo ponto $B = (2, 3)$ e é paralela ao vetor $\overrightarrow{v} = (1, 2)$.

Solução.

Conhecer um ponto e um vetor paralelo da reta equivale a dar as equações paramétricas:

$$r : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + 2t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Como $\overrightarrow{v} = (1,2) \parallel r$ temos, pela observação 4,

$$\overrightarrow{u} = (2,-1) \perp r.$$

Portanto,

$$r : 2x - y = c.$$

Para determinar c, usamos o fato de que $B = (2,3) \in r$, isto é,

$$c = 2 \times 2 - 3 = 1.$$

Logo,

$$r : 2x - y = 1.$$

□

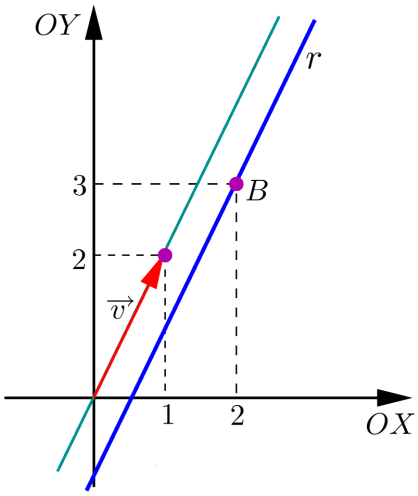

Figura 5: Exemplo 5.

Exemplo 6

Determine a equação cartesiana da reta $r : \begin{cases} x = 2 - s \\ y = 1 + 3s \end{cases} ;\ s \in \mathbb{R}.$

Solução.

Das equações paramétricas, obtemos o vetor $\overrightarrow{v} = (-1,3)$ paralelo à reta r e um ponto $A = (2,1)$ pertencente a ela.

Como, pela observação 4, o vetor $\overrightarrow{u} = (3,1)$ é normal a r, a equação cartesiana de r é

$$3x + y = c.$$

Para calcular c, usamos que $A = (2,1) \in r$, isto é,

$$c = 3 \times 2 + 1 = 7.$$

Logo a equação cartesiana de r é

$$3x + y = 7.$$

□

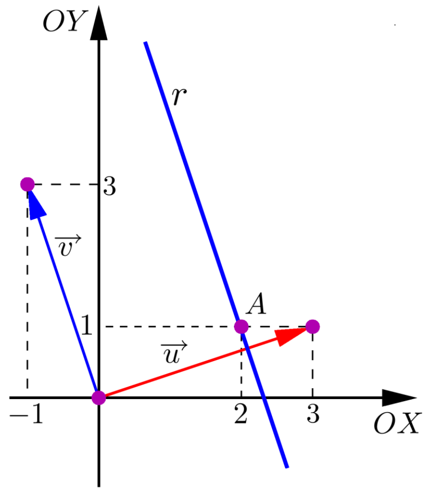

Figura 6: Exemplo 6.

Exemplo 7

Determine as equações paramétricas da reta $r : 4x + 3y = 16.$

Solução.
Para achar as equações paramétricas de r precisamos conhecer um vetor paralelo a r e um ponto de r.
Da equação cartesiana, temos:

$$\overrightarrow{u} = (4,3) \perp r \Longrightarrow \overrightarrow{v} = (3,-4) \parallel r\,.$$

Para determinar um ponto de r, fazemos $y=0$ na equação cartesiana de r e calculamos o valor correspondente de x:

$$y = 0 \Longrightarrow 4 \times x + 3 \times 0 = 16 \Longrightarrow x = 4\,.$$

Portanto, o ponto $A = (4,0)$ pertence a r.

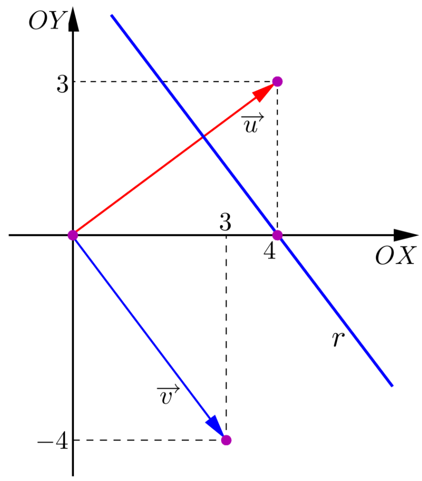

Figura 7: Exemplo 7.

Assim, as equações paramétricas de r são:

$$r : \begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = -4t \end{cases} ;\ t \in \mathbb{R}.$$

□

Exemplo 8

Determine as equações cartesianas das retas r_1 e r_2 que passam pelo ponto $A = (3,1)$ e fazem um ângulo de $\pi/4$ com a reta $r : 2x + y = 2$.

Solução.
Como o vetor $\overrightarrow{u} = (2,1)$ é perpendicular à reta r, o vetor $\overrightarrow{v} = (-1,2)$, pela observação 4, é paralelo à reta r.

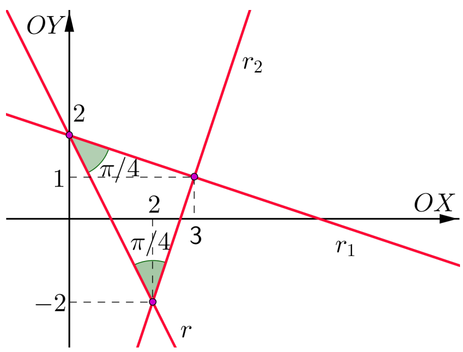

Figura 8: Exemplo 8.

Sejam $\overrightarrow{w} = (-2,-1)$ e $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ os vetores unitários que fazem um ângulo de

$\pi/4$ com o vetor $\overrightarrow{v}$. Então, pela proposição 13 do capítulo anterior, temos:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v_1} &= \cos\pi/4 \cdot \frac{\overrightarrow{v}}{||\overrightarrow{v}||} + \sin\pi/4 \cdot \frac{\overrightarrow{w}}{||\overrightarrow{w}||} \\
&= \tfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}(-1,2) + \tfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}(-2,-1) \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{10}}(-3,1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v_2} &= \cos(-\pi/4) \cdot \frac{\overrightarrow{v}}{||\overrightarrow{v}||} + \sin(-\pi/4) \cdot \frac{\overrightarrow{w}}{||\overrightarrow{w}||} \\
&= \tfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}(-1,2) - \tfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}(-2,-1) \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{10}}(1,3).
\end{aligned}$$

Como a reta r_1 é paralela ao vetor $\overrightarrow{v_1} = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3,1)$ e a reta r_2 é paralela ao vetor $\overrightarrow{v_2} = \frac{1}{\sqrt{10}}(1,3)$, temos que $\overrightarrow{u_1} = (1,3)$ é um vetor normal à reta r_1 e $\overrightarrow{u_2} = (3,-1)$ é um vetor normal à reta r_2.

Assim,

$$r_1 : x + 3y = c_1 \quad \text{e} \quad r_2 : 3x - y = c_2,$$

onde $c_1 = 1\times 3+3\times 1 = 6$ e $c_2 = 3\times 3-1\times 1 = 8$ são as equações cartesianas das retas que passam pelo ponto A e fazem um ângulo de $\pi/4$ com a reta r. □

Observação 5

A equação cartesiana da reta r que corta o eixo-horizontal no ponto de abscissa a e o eixo-vertical no ponto de ordenada b, com a e b diferentes de zero, é dada por $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

De fato, como os pontos $A = (a,0)$ e $B = (0,b)$ são distintos e a equação $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ representa uma reta que passa por A e B, concluimos que $r : \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$, pois por dois pontos distintos passa uma única reta.

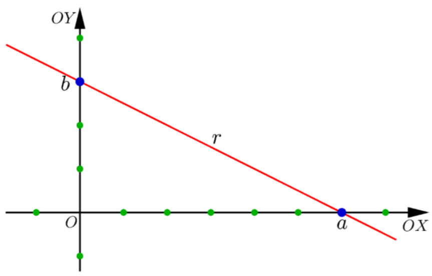

Figura 9: Reta passando pelos pontos $(a,0)$ e $(0,b)$.

Exemplo 9

Uma reta r que passa pelo ponto $P = (2, 4/3)$ forma com os semieixos coordenados positivos um triângulo de perímetro 12. Determine sua equação.

Solução.

Sejam a e b números reais positivos tais que

$$\{(a, 0)\} = r \cap \; eixo - OX \quad \text{e} \quad \{(0, b)\} = r \cap \; eixo - OY.$$

Pela observação anterior, $r : \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ é a equação cartesiana de r.

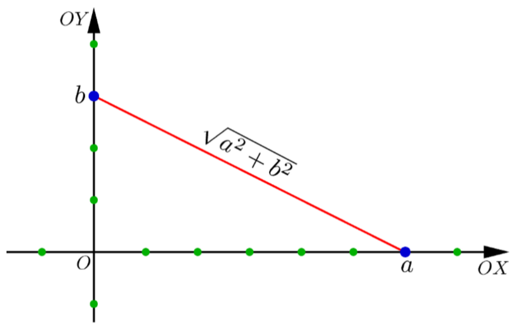

Figura 10: Exemplo 9.

Como o ponto $P = (2, 4/3)$ pertence a r,

$$\frac{2}{a} + \frac{4}{3b} = 1 \Longleftrightarrow 6a + 4a = 3ab.$$

Além disso, o perímetro do triângulo $\triangle AOB$ é 12, ou seja,

$$a + b + \sqrt{a^2 + b^2} = 12,$$

onde $A = (a, 0)$ e $B = (0, b)$. Temos, então, que resolver o sistema:

$$\begin{cases} 6a + 4b = 3ab \\ a + b + \sqrt{a^2 + b^2} = 12 \end{cases} \tag{1}$$

Elevando ao quadrado a segunda equação, obtemos que:

$$\begin{aligned} & \sqrt{a^2 + b^2} = 12 - (a + b) \\ \Longleftrightarrow \quad & a^2 + b^2 = 144 - 24(a + b) + (a^2 + 2ab + b^2) \\ \Longleftrightarrow \quad & 24(a + b) = 144 + 2ab \\ \Longleftrightarrow \quad & 12(a + b) = 72 + ab. \end{aligned}$$

Assim, o sistema (1) é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} 12(a+b) = 72 + ab \\ 4a + 6b = 3ab \end{cases} \iff \begin{cases} -36(a+b) = -3 \cdot 72 - 3ab \\ 4a + 6b = 3ab \end{cases}$$

Somando as duas equações, obtemos que:

$$-32a - 30b = -3 \cdot 72 \iff 16a + 15b = 108 \iff b = \frac{108 - 16a}{15}. \qquad (2)$$

Substituindo $b = \dfrac{108 - 16a}{15}$ na equação $6b + 4a = 3ab$, temos:

$$\frac{6}{15}(108 - 16a) + 4a = \frac{3}{15}a(108 - 16a)$$

$$\begin{aligned}
&\iff 6(108 - 16a) + 60a = 3a(108 - 16a) \\
&\iff 2(108 - 16a) + 20a = -16a^2 + 108a \\
&\iff 16a^2 - 108a - 32a + 20a + 216 = 0 \\
&\iff 16a^2 - 120a + 216 = 0 \\
&\iff 2a^2 - 15a + 27 = 0 \\
&\iff a = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 216}}{4} = \frac{15 \pm \sqrt{9}}{4} \\
&\iff a = \frac{18}{4} = \frac{9}{2} \quad \text{ou} \quad a = 3.
\end{aligned}$$

Portanto, se $a_1 = 9/2$ então, por (2),

$$b_1 = \frac{108 - 16 \cdot 9/2}{15} = \frac{108 - 72}{15} = \frac{36}{15} = \frac{12}{5},$$

e a equação da reta r_1 é

$$\frac{2x}{9} + \frac{5y}{12} = 1 \iff 8x + 15y = 36.$$

Se $a_2 = 3$, então $b_2 = \dfrac{108 - 16 \cdot 3}{15} = \dfrac{60}{15} = 4$, e a equação da reta r_2 é

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1 \iff 4x + 3y = 12.$$

Assim, o problema possui duas soluções:

$$r_1 : 8x + 15y = 36 \quad \text{e} \quad r_2 : 4x + 3y = 12.$$

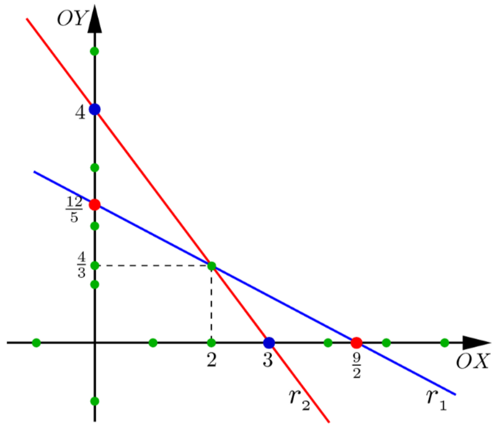

Figura 11: Exemplo 7.

□

3. Equação afim das retas

Considere uma reta $r : ax + by = c$ dada por sua equação cartesiana, onde $\overrightarrow{u} = (a, b) \neq (0, 0)$ é um vetor normal a r.

Vamos verificar que r pode ser reescrita das seguintes formas:

- Se $b = 0$, então um ponto $(x, y) \in r$ se, e somente se, $x = \frac{c}{a}$. Ou seja,

$$r = \{(d, y); y \in \mathbb{R}\},$$

onde $d = \frac{c}{a}$ (observe que $a \neq 0$).

Uma reta do tipo $r : x = d$ é dita vertical pois, neste caso, r é paralela ao eixo-OY ou coincidente com esse eixo.

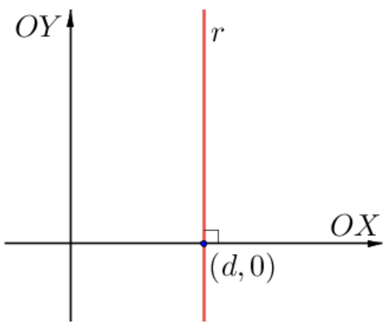

Figura 12: r é vertical e sua equação é $x = d$

- Se $b \neq 0$, isto é, r é não vertical, então o ponto $(x, y) \in r$ se, e somente se,

$$by = -ax + c \Longleftrightarrow y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}.$$

Ou seja,

$$r = \{(x, mx + n); x \in \mathbb{R}\},$$

onde $m = -\dfrac{a}{b}$ e $n = \dfrac{c}{b}$.

Uma equação do tipo $y = mx + n$ é chamada equação reduzida ou afim da reta r.

Provamos assim que toda reta r não vertical se representa por uma equação do 1^o grau da forma $y = mx + n$, onde:

• n é a ordenada do ponto onde r intersecta o eixo$-OY$. Se $n = 0$, então r passa pela origem.

• m é a razão entre o acréscimo de y e o acréscimo de x quando se passa de um ponto a outro sobre a reta. De fato, se $x_0 \neq x_1$, $y_0 = mx_0 + n$ e $y_1 = mx_1 + n$, então:

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{(mx_1 + n) - (mx_0 + n)}{x_1 - x_0} = \frac{m(x_1 - x_0)}{x_1 - x_0} = m\,.$$

• O número m chama-se **inclinação da reta $r : y = mx + n$**.

Além disso,

◇ **Se** $m > 0$, a função $y = mx + n$ é **crescente**, isto é, se $x_1 < x_2$, então $y_1 = mx_1 + n < y_2 = mx_2 + n$.

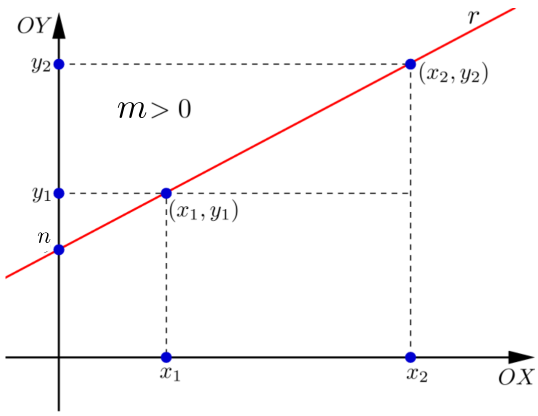

Figura 13: Para $m > 0$, $y = mx + n$ é crescente.

◇ **Se** $m < 0$, a função $y = mx + n$ é **decrescente**, isto é, se $x_1 < x_2$, então $y_1 = mx_1 + n > y_2 = mx_2 + n$.

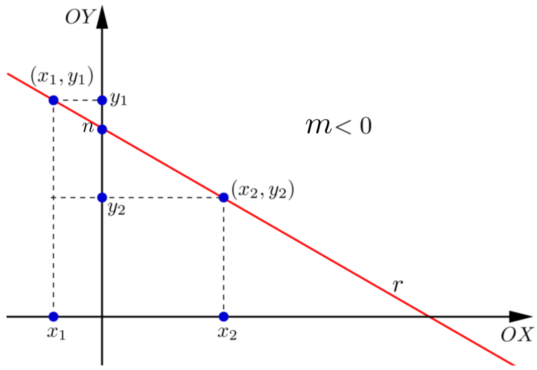

Figura 14: Para $m < 0$, $y = mx + n$ é decrescente.

◇ **Se** $m = 0$, a função $y = mx + n$ é **constante**, pois $y = n$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Neste caso, dizemos que $r : y = n$ é uma **reta horizontal**.

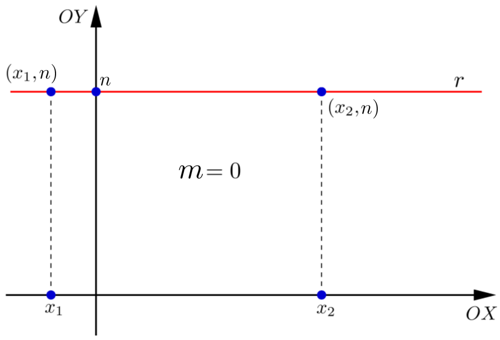

Figura 15: Para $m = 0$, $y = mx + n$ é constante.

• Seja θ o ângulo que a reta $r : y = mx + n$ faz com o semieixo$-OX$ positivo. Então,

$$\boxed{\operatorname{tg}\theta = m}$$

De fato, veja as figuras 16, 17 e 18:

$$m = \frac{y_2 - 0}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg}\theta.$$

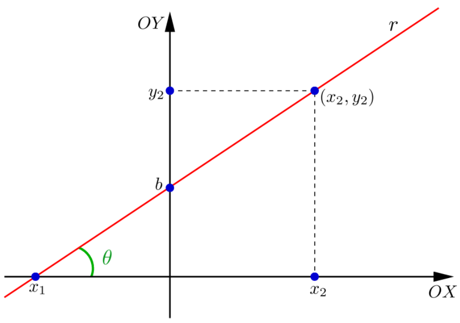

Figura 16: Caso $m > 0$: $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

$$m = \frac{0-y_1}{x_2-x_1} = -\operatorname{tg}(\pi - \theta) = \operatorname{tg}\theta.$$

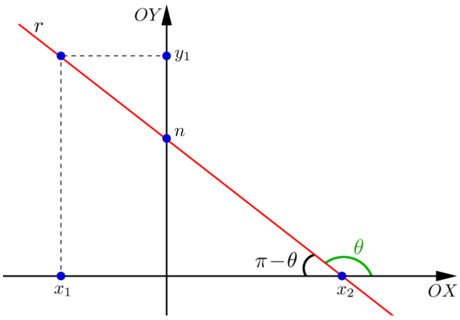

Figura 17: Caso $m < 0$: $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$.

$$m = 0 \Longrightarrow \theta = 0 \Longrightarrow m = \operatorname{tg}\theta.$$

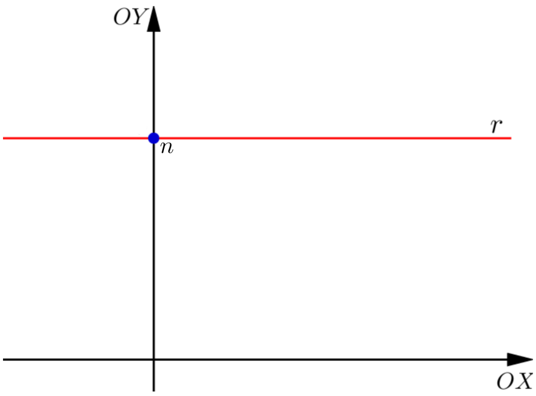

Figura 18: Caso $m = 0$: $\theta = 0$.

Exemplo 10

Determine as equações das retas que contêm os lados do triângulo de vértices nos pontos $A = (1, 1)$, $B = (4, 1)$ e $C = (1, 3)$.

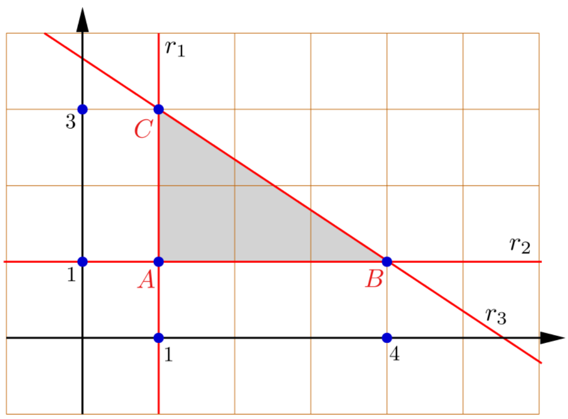

Figura 19: Triângulo de vértices A, B e C.

Solução.

• A reta r_1 que contém o lado AC é vertical, pois A e C têm a mesma abscissa 1. Assim, $r_1 : x = 1$.

• A reta r_2 que contém o lado AB é horizontal, pois A e B têm a mesma ordenada 1. Portanto $r_2 : y = 1$.

• A reta r_3 que contém o lado BC tem inclinação $m = \dfrac{3-1}{1-4} = -\dfrac{2}{3}$. Assim, a equação de r_3 é da forma:

$$r_3 : y = -\frac{2}{3}x + n.$$

Como $B = (4, 1) \in r_3$, obtemos, substituindo x por 4 e y por 1 na equação anterior, que:

$$1 = -\frac{2}{3} \times 4 + n \Longrightarrow n = 1 + \frac{8}{3} = \frac{11}{3}.$$

Portanto,

$$r_3 : y = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{3},$$

é a equação da terceira reta.$\square$

4. Paralelismo e perpendicularismo entre retas

Duas retas r_1 e r_2 no plano podem estar em três posições relativas (uma em relação à outra):

(a) coincidentes: quando são iguais, isto é, $r_1 = r_2$;

(b) paralelas: quando não se intersectam, isto é,

$$\boxed{r_1 \cap r_2 = \varnothing.}$$

Neste caso, escrevemos $r_1 \parallel r_2$.

(c) concorrentes: quando se intersectam em um ponto, isto é,

$$\boxed{r_1 \cap r_2 = \{P\}.}$$

A partir das equações cartesianas de r_1 e r_2, determinemos quando ocorre cada uma dessas situações.

Proposição 1

As retas $r_1 : ax + by = c$ e $r_2 : a'x + b'y = c'$ são paralelas ou coincidentes se, e somente se, existe $\lambda \neq 0$ tal que $(a', b') = \lambda(a, b)$, isto é, se e somente se, seus vetores normais são múltiplos.

Prova.

Suponhamos que $a' = \lambda a, b' = \lambda b, c' \neq \lambda c$ e $\lambda \neq 0$.
Se $P = (x, y) \in r_1$, ou seja,

$$\begin{aligned} ax + by = c &\Longrightarrow \lambda ax + \lambda by = \lambda c \\ &\Longrightarrow a'x + b'y = \lambda c \neq c'. \end{aligned}$$

Provamos assim que se $P = (x, y) \in r_1$ então $P = (x, y) \notin r_2$, ou seja, que

$$r_1 \cap r_2 = \varnothing.$$

Por outro lado, se $a' = \lambda a, b' = \lambda b, c' = \lambda c$ e $\lambda \neq 0$, então

$$ax + by = c \Longleftrightarrow \lambda ax + \lambda by = \lambda c \Longleftrightarrow a'x + b'y = c',$$

ou seja, as retas r_1 e r_2 são coincidentes.
Suponhamos agora que $r_1 \cap r_2 = \varnothing$ ou $r_1 = r_2$, ou seja, que r_1 e r_2 são retas paralelas ou coincidentes.
Considere o sistema:

$$\begin{cases} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c' \end{cases}$$

Se $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b \neq 0$, o sistema possui uma única solução dada por:

$$x = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b} \quad \text{e} \quad y = \frac{ca' - c'a}{ab' - a'b}.$$

Logo, como as retas são paralelas ou coincidentes, devemos ter $ab' - a'b = 0$. Mas, pela proposição 7, isso significa que os vetores (a, b) e (a', b') são múltiplos, ou seja, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $(a', b') = \lambda(a, b)$. Como $(a, b) \neq (0, 0)$ e $(a', b') \neq (0, 0)$, devemos ter $\lambda \neq 0$. ■

Corolário 1

As retas $r_1 : ax + by = c$ *e* $r_2 : a'x + b'y = c'$ *são* **coincidentes** *se, e somente se, existe* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, *tal que*

$$(a', b') = \lambda(a, b) \quad \text{e} \quad c' = \lambda c\,.$$

Prova.

Pelo teorema acima, se as retas são coincidentes, existe $\lambda \neq 0$ tal que $a' = \lambda a$ e $b' = \lambda b$.

Seja (x_0, y_0) um ponto da reta r. Como $r_1 = r_2$, as coordenadas $x = x_0$ e $y = y_0$ satisfazem também a equação de r_2. Logo,

$$c' = a'x_0 + b'y_0 = \lambda a x_0 + \lambda b y_0 = \lambda c\,,$$

isto é $c' = \lambda c$.

Reciprocamente, se existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, tal que $\lambda a = a'$, $\lambda b = b'$ e $\lambda c = c'$, é claro que as equações de r_1 e r_2 representam a mesma reta, isto é, $r_1 = r_2$.■

Como consequência do corolário anterior e da proposição 1, obtemos:

Corolário 2

As retas $r_1 : ax + by = c$ *e* $r_2 : a'x + b'y = c'$ *são* **paralelas** *se, e somente se, existe* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, *tal que*

$$(a', b') = \lambda(a, b) \quad \text{e} \quad c' \neq \lambda c\,.$$

Exemplo 11

Determine a equação cartesiana da reta r_2 *paralela à reta* $r_1 : 2x + 3y = 6$ *que passa pelo ponto* $A = (1, 0)$.

Solução.

Seja $r_2 : ax + by = c$ a equação cartesiana da reta r_2. Pela proposição 1, existe $\lambda \neq 0$ tal que

$$(a, b) = \lambda(2, 3),$$

onde $(2, 3)$ é o vetor normal à reta r_1. Podemos tomar, sem perda de generalidade, $\lambda = 1$, ou seja, $(a, b) = (2, 3)$.

Como $r_2 : 2x+3y = c$ e o ponto $A = (1, 0) \in r_2$, devemos ter $c = 2\times1+3\times0 = 2$.

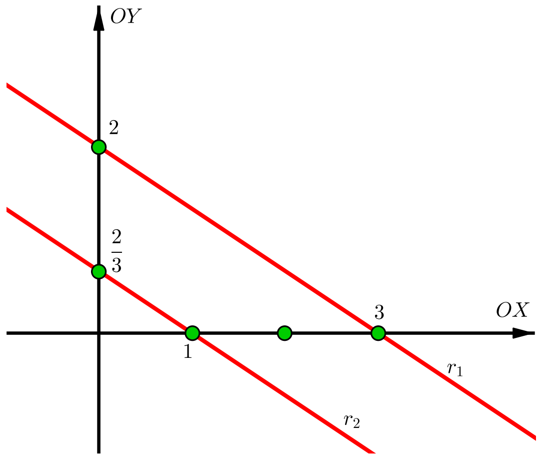

Figura 20: Exemplo 11.

Logo $2x + 3y = 2$ é a equação cartesiana da reta r_2.□

Exemplo 12

Verifique se as retas

$$r_1 : 2x + y = 1, \quad r_2 : 6x + 3y = 2 \quad e \quad r_3 : 4x + 2y = 2\,,$$

são paralelas ou coincidentes.

Solução.
Multiplicando a equação de r_1 por 3, obtemos $r_1 : 6x + 3y = 3$ e, como $3 \neq 2$, temos $r_1 \parallel r_2$.
Multiplicando a equação de r_1 por 2, obtemos a equação de r_3. Logo $r_1 = r_3$.
Além disso, $r_2 \parallel r_3$.□

Definição 3

O **ângulo $\angle(r_1, r_2)$ entre duas retas r_1 e r_2** se define da seguinte maneira:

• se r_1 e r_2 são coincidentes ou paralelas, então $\angle(r_1, r_2) = 0$,

• se as retas são concorrentes, isto é, $r_1 \cap r_2 = \{P\}$, então $\angle(r_1, r_2)$ é o menor dos ângulos positivos determinados pelas retas.

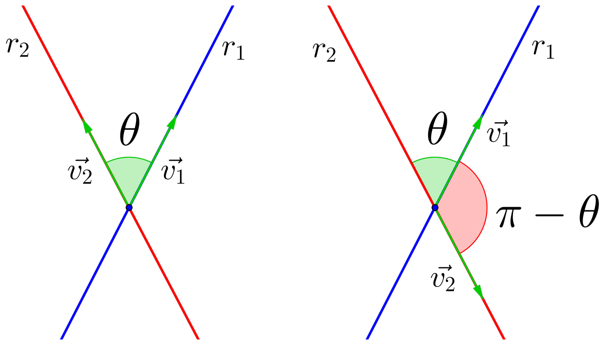

Figura 21: $\angle(r_1, r_2) = \theta$

Em particular, $0 < \angle(r_1, r_2) \leq \pi/2$. A medida dos ângulos pode ser dada em graus ou radianos.

Sejam $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ vetores paralelos às retas r_1 e r_2, respectivamente. Então, como $\angle(r_1, r_2) = \angle(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ ou $\angle(r_1, r_2) = \pi - \angle(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ (ver figura 21),

$$\boxed{\cos\angle(r_1, r_2) = |\cos\angle(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})| = \frac{|\langle\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\rangle|}{\|\overrightarrow{v_1}\|\,\|\overrightarrow{v_2}\|}, \qquad 0 < \angle(r_1, r_2) \leq \pi/2}$$

Observe que a fórmula vale também quando r_1 e r_2 são paralelas ou coincidentes, isto é, quando $\angle(r_1, r_2) = 0$, pois:

$$\overrightarrow{v_1} = \lambda\overrightarrow{v_2} \Longrightarrow \frac{|\langle\lambda\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2}\rangle|}{\|\lambda\overrightarrow{v_2}\|\,\|\overrightarrow{v_2}\|} = \frac{|\lambda|\;|\langle\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2}\rangle|}{|\lambda|\;\|\overrightarrow{v_2}\|\,\|\overrightarrow{v_2}\|} = 1 = \cos 0 = \cos\angle(r_1, r_2)\,.$$

• Duas retas são **perpendiculares** quando o ângulo entre elas é de 90^o (ou $\frac{\pi}{2}$ radianos). Nesse caso, escrevemos $r_1 \perp r_2$.

Proposição 2

As retas $r_1 : ax + by = c$ e $r_2 : a'x + b'y = c'$ são perpendiculares se, e somente se, seus vetores normais $\overrightarrow{w_1} = (a, b)$ e $\overrightarrow{w_2} = (a', b')$ são perpendiculares, ou seja,

$$\boxed{aa' + bb' = 0.}$$

Prova.

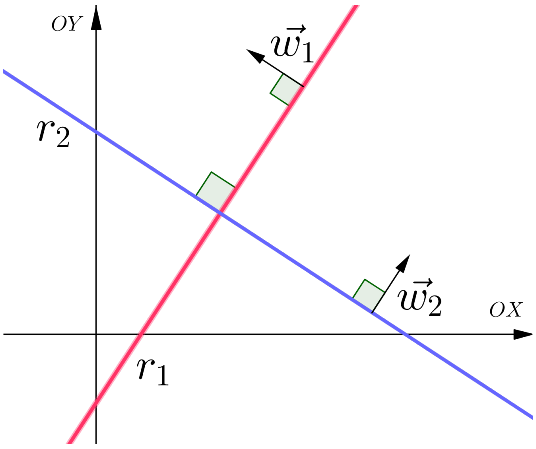

Figura 22: Retas perpendiculares.

De fato, as retas r_1 e r_2 são perpendiculares se, e somente se,

$$\angle(r_1, r_2) = \pi/2 \iff \cos\angle(r_1, r_2) = 0 \iff \langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle = 0,$$

onde $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ são vetores paralelos às reta r_1 e r_2 respectivamente.
Como $\overrightarrow{w_1} = (a, b) \perp r_1$ e $\overrightarrow{w_2} = (a', b') \perp r_2$ temos, pela observação 4, que $\overrightarrow{v_1} = (-b, a) \parallel r_1$ e $\overrightarrow{v_2} = (-b', a') \parallel r_2$. Logo $r_1 \perp r_2$ se, e somente se,

$$\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle = (-b)(-b') + aa' = aa' + bb' = 0,$$

ou seja, $\langle \overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2} \rangle = aa' + bb' = 0.$ ■

Exemplo 13

Determine a equação cartesiana da reta r_2 que passa pelo ponto $(1, 2)$ e é perpendicular à reta $r_1 : x + 3y = 1$.

Solução.

Seja $r_2 : ax + by = c$ a equação cartesiana de uma reta perpendicular a $r_1 : x + 3y = 1$.
Pela proposição anterior, o vetor $\overrightarrow{u_2} = (a, b)$ é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{u_1} = (1, 3)$ e, portanto, pela proposição 12 do capítulo anterior, $\overrightarrow{u_2} = \lambda(-3, 1)$ para algum $\lambda \neq 0$.
Podemos tomar, sem perda de generalidade, $\lambda = 1$, ou seja, $\overrightarrow{u_2} = (-3, 1)$.

Então $r_2 : -3x+y = c$, onde $c = -3\times 1+1\times 2 = -1$, pois o ponto $A = (1, 2)$ pertence a r_2. Obtemos assim que $-3x + y = -1$ é a equação cartesiana da reta r_2.□

Vejamos agora como caracterizar o paralelismo e o perpendicularismo entre duas retas dadas na forma reduzida.

É fácil verificar que se r_1 é uma reta vertical, então: $r_2 \parallel r_1 \Longleftrightarrow r_2$ é vertical.

A proposição abaixo nos diz quando duas retas não verticais na forma reduzida são paralelas.

Proposição 3

As retas $r_1 : y = mx + n$ e $r_2 : y = m'x + n'$ são paralelas se, e somente se, $m = m'$ e $n \neq n'$.

Prova.

De fato, como $r_1 : mx-y = -n$ e $r_2 : m'x-y = -n'$, temos que $\overrightarrow{v} = (m, -1)$ e $\overrightarrow{w} = (m', -1)$ são vetores normais às retas r_1 e r_2, respectivamente.
Logo, pelo corolário 2, r_1 e r_2 são paralelas se, e somente se, existe $\lambda \neq 0$ tal que

$$(m', -1) = \lambda(m, -1) = (\lambda m, -\lambda) \quad \text{e} \quad -n' \neq -\lambda n.$$

Como $-1 = -\lambda$, devemos ter $\lambda = 1$. Então $r_1 \parallel r_2$ se, e somente se, $m = m'$ e $n \neq n'$. ■

Exemplo 14

Determine a equação da reta r_2 que passa pelo ponto $A = (1, 4)$ e é paralela à reta

$$r_1 : y = 3x + 2.$$

Solução.
Como r_2 é paralela à reta não vertical r_1, r_2 é também não vertical.
A equação de r_2 é da forma $r_2 : y = 3x + n'$, pois r_1 e r_2 têm a mesma inclinação $m = 3$, pela proposição 3.

Além disso, como $A = (1,4) \in r_2$, as coordenadas $x = 1$ e $y = 4$ desse ponto devem satisfazer a equação de r_2. Isto é, $4 = 3 \times 1 + n'$. Portanto, $n' = 4 - 3 = 1$ e $r_2 : y = 3x + 1$ é a equação procurada.$\square$

Sejam r_1 e r_2 retas perpendiculares. Se r_1 é horizontal, $r_1 : y = b$, então r_2 é vertical, $r_2 : x = c$, e vice-versa.

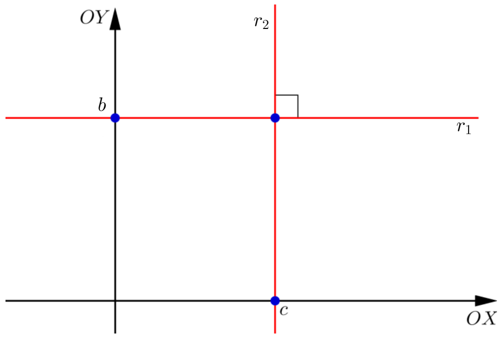

Figura 23: Retas horizontais e verticais são perpendiculares.

A proposição abaixo nos diz quando duas retas não verticais e não horizontais são perpendiculares.

Proposição 4

Sejam $r_1 : y = mx + n$ e $r_2 : y = m'x + n'$ duas retas tais que $m \neq 0$ e $m' \neq 0$. Então $r_1 \perp r_2$ se, e somente se, $mm' = -1$.

Prova.

Como $r_1 : mx - y = -n$ e $r_2 : m'x - y = -n'$ temos, pela proposição 2, que $r_1 \perp r_2$ se, e somente se, seus vetores normais $\overrightarrow{v} = (m, -1)$ e $\overrightarrow{w} = (m, -1)$ são ortogonais.

Logo,

$$r_1 \perp r_2 \iff \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = mm' + 1 = 0 \iff mm' = -1.$$

■

Exemplo 15

Determine a equação da reta r_2 que passa pelo ponto A e é perpendicular à reta r_1, onde:

(a) $r_1 : x = 2\,, \quad A = (5,3)\,;$ **(b)** $r_1 : y = 4x + 5\,, \quad A = (4,1)\,.$

Solução.

(a) Como r_1 é vertical, r_2 deve ser horizontal e a sua equação da forma $r_2 : y = n$.

Sendo que $A = (5, 3) \in r_2$, devemos ter $3 = n$ e, portanto, $r_2 : y = 3$.

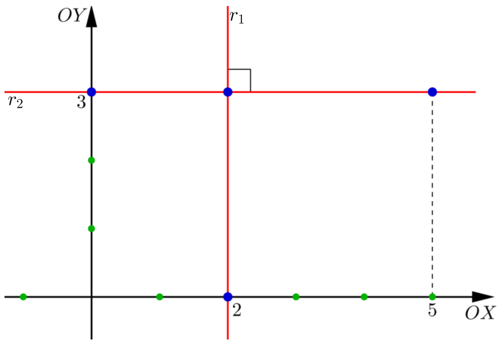

Figura 24: Reta r_1 vertical, $r_2 \perp r_1$.

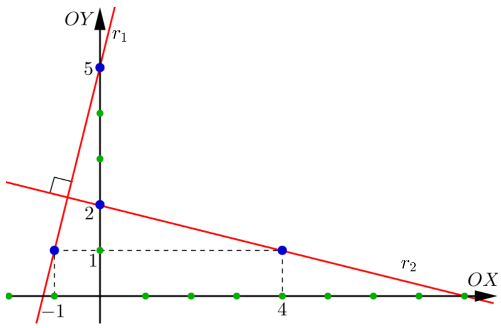

Figura 25: Reta $r_1 : y = 4x + 5$, $r_2 \perp r_1$.

(b) Como r_1 é não vertical e não horizontal, a equação de r_2 deve ser da forma $r_2 : y = mx + n$, onde $4m = -1$ pela proposição 4. Isto é, $m = -\frac{1}{4}$ e $r_2 : y = -\frac{1}{4}x + n$.

Para determinar o valor de n usamos que $A = (4, 1) \in r_2$. Ou seja, as coordenadas de A devem satisfazer a equação de r_2:

$$1 = -\frac{1}{4} \times 4 + n \Longrightarrow n = 2\,.$$

Assim, $r_2 : y = -\frac{1}{4}x + 2$ é a equação procurada. $\square$

Exemplo 16

Determine as equações cartesianas das retas perpendiculares à reta r que passa pelos pontos $A = (1, 0)$ e $B = (-1, 3)$.

Solução.

A reta r tem inclinação $m = \dfrac{3-0}{-1-1} = -\dfrac{3}{2}$. As retas perpendiculares a r devem, portanto, ter inclinação $m' = -\dfrac{1}{m} = -\dfrac{1}{-3/2} = \dfrac{2}{3}$. Logo a equação de uma reta perpendicular a r é

$$r'_d : y = \frac{2}{3}x + d\,.$$

Variando $d \in \mathbb{R}$ obtemos a equação de qualquer reta perpendicular à reta r.

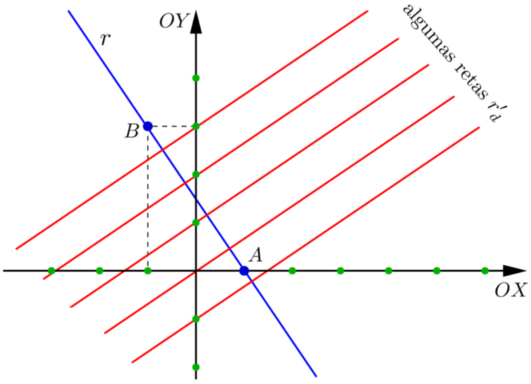

Figura 26: Reta passando pelos pontos A e B e algumas retas da família $r'_d : y = \frac{2}{3}x + d$.

Escrevemos o valor d como subíndice em r'_d para indicar que a reta em questão depende do valor d. Ou seja, mudar o valor de d significa considerar outra reta também perpendicular a r.

A equação da reta r'_d se escreve na forma cartesiana como:

$$r'_d : -\frac{2}{3}x + y = d \qquad \text{, ou seja,} \qquad r'_d : 2x - 3y = -3d\,.$$

Nesta equação d é um número real qualquer, assim como $-3d$. Portanto, fazendo $c = -3d$, a família de retas perpendiculares à reta r pode ser reescrita na forma:

$$r'_c : 2x - 3y = c\,,$$

onde $c \in \mathbb{R}$ é um número real arbitrário.□