

C4 3/ABRIL/2023

INÍCIO: 14:09

HOJE: REVISÃO DE
ALGUMAS IDÉIAS DE
C2 E C3! EU
AINDA NÃO FIZ O
PDF DA AULA DE
HOJE, MAS EU PUS
NA PÁGINA DO CURSO,
QUE É AQUI,

[http://anggtwu.net/
2023.1-C4.html](http://anggtwu.net/2023.1-C4.html)

ALGUNS LINKS QUE A GENTE
VAI USAR HOJE...

Obs: EU VOU USAR A BESA
UNS LINKS CURTOS QUE
FUNCIONAM MEIO MAL NO
CELULAR... POR EXEMPLO,

3eI66

CÁLCULO SEMESTRE
3 2022.1

PDFZÃO COM
"TUDO" -
COM TODOS OS
PDFZINHOS
LATEXIZADOS

PÁGINA
66.

||
~

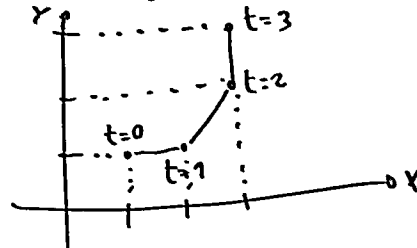
QUANDO A GENTE
CLICA NUM LINK
DESSSES NO CELULAR
ELE ABRE ESSE
PDFZÃO NA
PÁGINA 1 -
ELE IGNORA O
"#page=66"
DO LINK -
E AÍ VOCÊS
VÃO TER QUE
IR PRA P.66
NA MÃO... ||

OS CURSOS DE
C4 COSTUMAM
COMESAR COM
MUITAS AULAS
DE INTEGRAIS
DUPLAS E TRIPLAS..
A GENTE VAI
COMESAR POR
INTEGRAIS DE
LINHA EM CASOS
SIMPLES.

MOTIVAÇÃO FÍSICA (APAGUEI)

PROBLEMA 1:

CONSIDERE ESTA
TRAJETÓRIA
DAQUI:



t (x, y)

0 (1, 1)

1 (2, 1)

2 (3, 2)

3 (3, 3)

CONSIDERE QUE
ESSA TRAJETÓRIA
É UM MOVIMENTO
RETILÍNEO UNIFORME
(MRU) ENTRE:

t=0 e t=1,

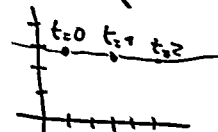
t=1 e t=2,

t=3 e t=4.

DIGAMOS QUE
ESSA TRAJETÓRIA
É DADA PELA
FUNÇÃO F...
PODEMOS CONSIDERAR
QUE $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$
OU $F: [0,3] \rightarrow \mathbb{R}^2$,
TANTO FAZ...

(a) ENCONTRE UMA
DEFINIÇÃO
POR CASOS
PPA FUNÇÃO F.

(b) REPRESENTE
GRAFICAMENTE
 $r(t) = \{(1,3) + t(2,0) | t \in \mathbb{R}\}$



(c) REESCREVAM A RESPOSTA
DO ITEM (a) NESTE FORMATO:

$$H(t) = \begin{cases} (1,3) + t(2,0) & \text{QUANDO ...} \\ (4,5) + t(6,7) & \text{...} \end{cases}$$

...SÓ QUE COM OS NÚMEROS CERTOS.

$$(1,3) \xrightarrow{(2,0)} 2(2,0)$$

$$\text{SEJA } F_3(t) = (2,1) + t(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$$

ENTÃO: $F_3(0) = (2,1)$,
 $F_3(1) = (2.5, 1.5)$,
 $F_3(2) = (3,2)$

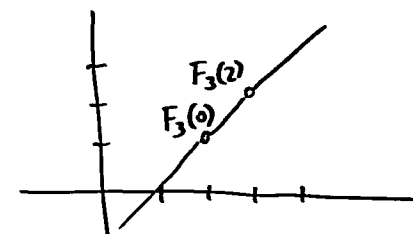
GOSTÁRIAMOS DE TER

$$F(1) = F_3(1), \quad \leftarrow \text{ISTO É FALSO!}$$

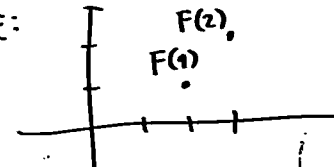
$$F(1.5) = F_3(1.5),$$

$$F(2) = F_3(2) \dots \quad \leftarrow \text{ISTO É VERDADEIRO!}$$

TEMOS ISTO AQUI:



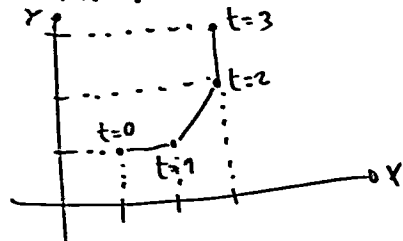
E:



MOTIVAÇÃO
FÍSICA
(ATAGUEI)

PROBLEMA 1:

CONSIDERE ESTA
TRAJETÓRIA
AQUI:



t (x, y)

0	(1, 1)
1	(2, 1)
2	(3, 2)
3	(3, 3)

CONSIDERE QUE
ESSA TRAJETÓRIA
É UM MOVIMENTO
RETILÍNEO UNIFORME
(MRU) ENTRE:

$t=0$ e $t=1$,
 $t=1$ e $t=2$,
 $t=2$ e $t=3$.

DIGAMOS QUE
ESSA TRAJETÓRIA
É DADA PELA
FUNÇÃO F ...

PODEMOS CONSIDERAR

QUE $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$

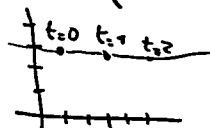
OU $F: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}^2$,

TANTO FAZ...

(a) ENCONTRE UMA
DEFINIÇÃO
POR CASOS
PAR FUNÇÃO F .

(b) REPRESENTA
GRAFICAMENTE

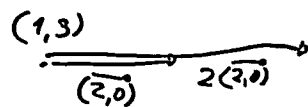
$$r(t) = \{(1, 3) + t(2, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$$



(c) REESCREVA A RESPOSTA
DO ITEM (a) NESTE FORMATO:

$$H(t) = \begin{cases} (1, 2) + t(3, 4) & \text{QUANDO ...} \\ (4, 5) + t(6, 7) & \text{...} \end{cases}$$

... SÓ QUE COM OS NÚMEROS CERTOS.

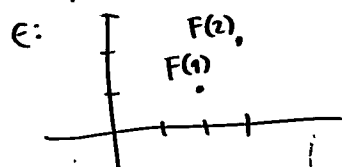
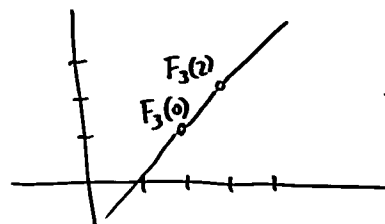


SEJA $F_3(t) = (2, 1) + t(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
ENTÃO: $F_3(0) = (2, 1)$,
 $F_3(1) = (2.5, 1.5)$,
 $F_3(2) = (3, 2)$

GOSTÁRIAMOS DE TER

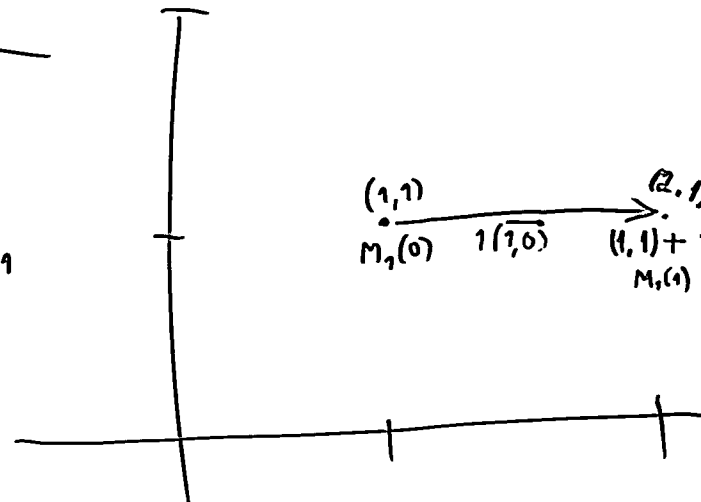
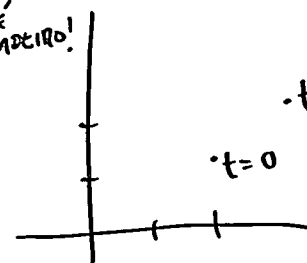
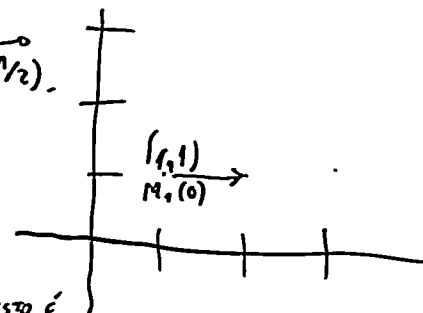
$F(1) = F_3(1)$, ← ISTO É FALSO!
 $F(1.5) = F_3(1.5)$, ← ISTO É VERDADEIRO!
 $F(2) = F_3(2)$...

TEMOS ISTO AQUI:



$$M(t) = \{(1, 1) + t(1, 0) \mid t \in (-\infty, 1]\}$$

$$M_1(t) = (1, 1) + t(1, 0)$$

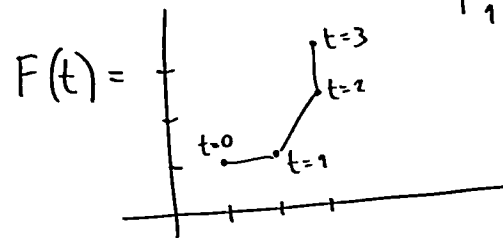


C 4 14/ABRIL/2023

Início: 16:09

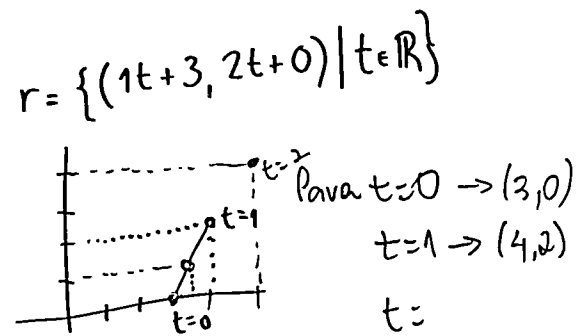
HOJE: ACESSAR O PRIMEIRO PDF DO CURSO - O QUE DIZ "INTRODUÇÃO E REVISÃO DE C2 E C3"...

LIVRO DO CURSO: STEWART, VOLUME 2 "CÁLCULO"



$(2t+3)$ $(at+b)$
 ↑ ↑ ↑
 ESTES NÚMEROS ENCONTRE OS VALORES
 ESTÃO ERRADOS - CERTOS
 CONSERTE! PARA a E b

$$F_1(t) = \begin{cases} (2t+3, 4t+5) & \text{PARA } t \leq 6 \\ (7t+8, 9t+10) & \text{PARA } 11 < t < 12 \\ (13t+14, 15t+16) & \text{PARA } 17 \leq t \end{cases}$$

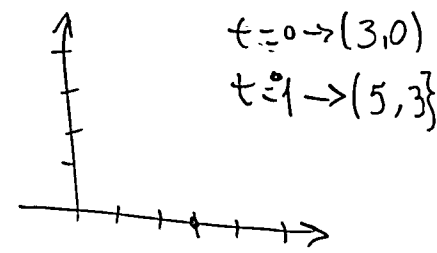


HIPÓTESES:

$r_1 = \{(1t+4, 2t+1) \mid t \in \mathbb{R}\}$

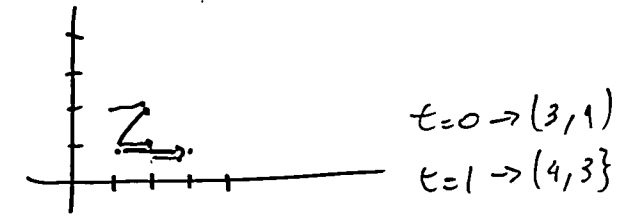


$r_2 = \{(2t+3, 3t+0) \mid t \in \mathbb{R}\}$



$t \in \mathbb{R}$
 $t \in [1, 2]$

$r_3 = \{(1t+3, 2t+1) \mid t \in \mathbb{R}\}$



$r_4 = \{(1t+2, 2t+1) \mid t \in \mathbb{R}\}$

$(1, 1) + t(1, 0)$
 $(1, 1) + t(2, 0)$
 $(1, 1) + t(1, 1)$
 $(1, 2) + t(1, 0)$
 $(2, 1) + t(1, 0)$

QUEREMOS:
 $G_2(1) = (1, 1)$
 TEMOS
 $G_2(1) = (1, 1)$

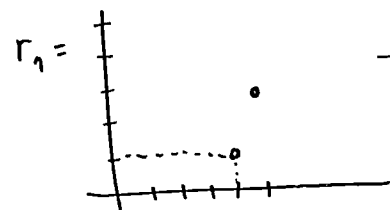
$G_1(t) = (1, 1)$
 $G_2(t) = (1, 1)$
 $G_3(t) = (1, 1)$

5
6

$t \leq 6$
 $1 < t < 12$
 $17 \leq t$

HIPÓTESIS:

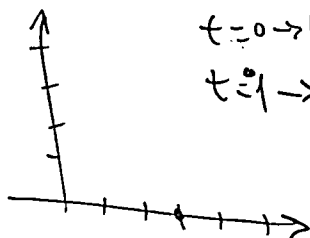
$$r_1 = \{(1t+4, 2t+1) \mid t \in \mathbb{R}\}$$



$$t=0 \rightarrow (4,1)$$

$$t=1 \rightarrow (5,3)$$

$$r_2 = \{(2t+3, 3t+0) \mid t \in \mathbb{R}\}$$



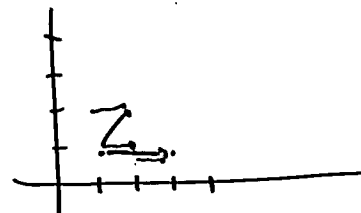
$$t=0 \rightarrow (3,0)$$

$$t=1 \rightarrow (5,3)$$

$$t \in \mathbb{R}$$

$$t \in [1,2]$$

$$r_3 = \{(1t+3, 2t+1) \mid t \in \mathbb{R}\}$$



$$t=0 \rightarrow (3,1)$$

$$t=1 \rightarrow (4,3)$$

$$r_4 = \{(1t+2, 1t+1) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

$$(1,1) + t(1,0)$$

$$(1,1) + t(2,0)$$

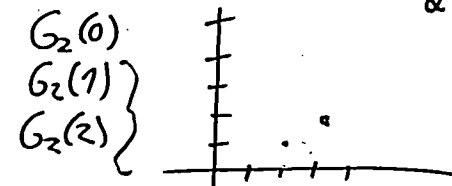
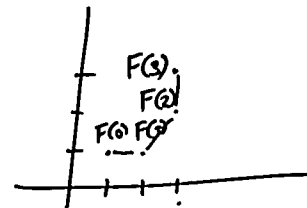
$$(1,1) + t(1,1)$$

$$(1,2) + t(1,0)$$

$$(2,1) + t(1,0)$$

$$G_2(1) = (2,1) \quad (2,1) + 2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = (2,1) + (1,1)$$

$$G_2(t) = (2,1) + t\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$



QUE RECORROS:

$$G_2(1) = (2,1)$$

$$G_2(1) = (3,2)$$

QUE RECORROS:

$$G_2(1.5) = (2.5, 1.5)$$

$$G_2(1.5) = (2,1) + 1.5\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$= (2,1) + \left(\frac{1.5}{2}, \frac{1.5}{2}\right)$$

$$= (3.5, 2.5)$$

QUE RECORROS:

$$G_2(1.001) = (2.001, 1.001)$$

$$G_2(1.001) = (2,1) + 1.001\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

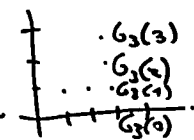
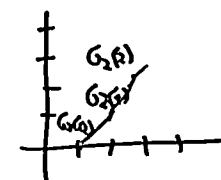
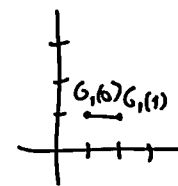
$$= (2,1) + \left(\frac{1.001}{2}, \frac{1.001}{2}\right)$$

$$= (3.001, 2.001)$$

$$G_1(t) = (1,1) + t(1,0)$$

$$G_2(t) =$$

$$G_3(t) =$$

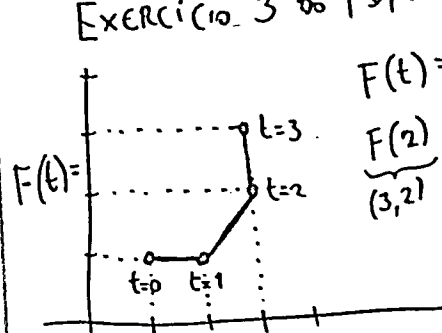


C4 17/ABRIL/2023

INÍCIO: 17:06

AVISO: HOJE EM
PRA GENTE VER VÁRIAS
COISAS SOBRE A FÓRMULA
DO COMPRIMENTO DE
ARCO, MAS ESSAS COISAS
SÓ VÃO FAZER SENTIDO
DIREITO SE VÓS TIVEREM
BASTANTE PRÁTICA COM
A TÉCNICA DE DESCOBRIR
O QUE CADA COMPONENTE
DE UMA FÓRMULA SIGNIFICA...
ENTÃO VAMOS REVER A
TÉCNICA PRA ISSO. OS
SLIDES MAIS IMPORTANTES
DE HOJE VÃO SER OS DOIS
SOBRE "SEJA O SEU PRÓPRIO
GEOGEBRA" DO PRIMEIRO PDF.

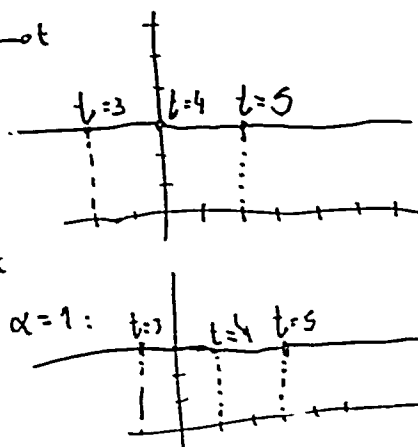
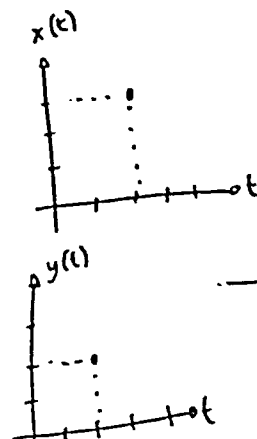
EXERCÍCIO 3 DO PDF:



$$F(t) = (x(t), y(t))$$

$$F(2) = (\underbrace{x(2)}_3, \underbrace{y(2)}_2)$$

$$(3, 2)$$



$(2, 5)$ quando $t=6$

$(2+20, 5+42)$ quando $t=7$

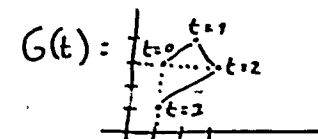
$$r_t = \left\{ \underbrace{(\alpha, \beta)}_{(2, 5)} + \underbrace{(t - \gamma)}_7 \underbrace{(\delta, \epsilon)}_{\begin{smallmatrix} 20 & 42 \\ 1 \end{smallmatrix}} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$(2, 5) + (20, 42)$$

$$(2+20, 5+42)$$

EXERCÍCIO EXTRA:

DIGAMOS QUE



DÊ UMA DEFINIÇÃO POR
CASOS PRA $G(t)$ NESTE

FORMATO:

$$G(t) = \begin{cases} \left(\begin{smallmatrix} \\ \end{smallmatrix} \right) + (t - \begin{smallmatrix} \\ \end{smallmatrix}) \left(\begin{smallmatrix} \\ \end{smallmatrix} \right) & \text{QUANDO } t \leq 1 \\ \left(\begin{smallmatrix} \\ \end{smallmatrix} \right) + (t - \begin{smallmatrix} \\ \end{smallmatrix}) \left(\begin{smallmatrix} \\ \end{smallmatrix} \right) & \text{QUANDO } 1 \leq t \leq 2 \\ \left(\begin{smallmatrix} \\ \end{smallmatrix} \right) + (t - \begin{smallmatrix} \\ \end{smallmatrix}) \left(\begin{smallmatrix} \\ \end{smallmatrix} \right) & \text{QUANDO } 2 \leq t \end{cases}$$

$$\underbrace{\underbrace{(t-4)}_4}_{0} (2, 0)$$

$$\{(\overline{8, 3}) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(\overline{8, 3})\}$$

QUANDO $t=0$

$$(0, 3) + \underbrace{(t-4)}_0 (2, 0) = (-8, 3)$$

$$\underbrace{\underbrace{0}_{-4}}_{(-8, 0)} (-8, 3)$$

ABC

$(2, 5)$ quando $t=6$

$(20, 5+42)$ quando $t=7$

$$r_2 = \{(\alpha, \beta) + (t-\gamma)(\vec{\delta}, \vec{\epsilon}) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

$$(2, 5) + \underbrace{\begin{pmatrix} 18 \\ 47 \end{pmatrix}}_{\vec{\delta}, \vec{\epsilon}}$$

$$(2, 5) + (20, 42)$$

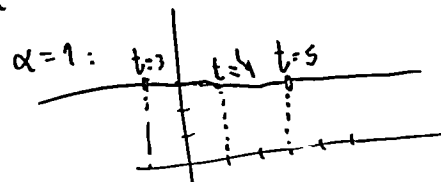
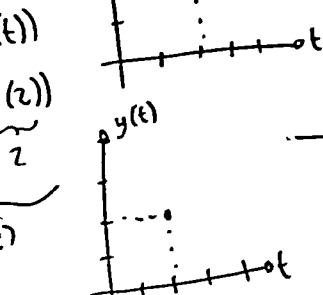
$$(2+20, 5+42)$$

$$\underbrace{(t-4)}_0 \vec{(2,0)}$$

$$\{(\vec{8,3}) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(\vec{8,3})\}$$

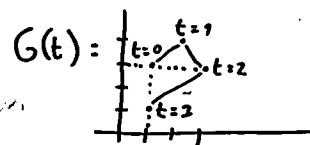
$$\text{Quando } t=0 \quad (0,3) + \underbrace{(t-4)}_{-4} \vec{(2,0)} = (-8,3)$$

$$\underbrace{(-8,0)}_{(-8,3)}$$



EXERCÍCIO EXTRA:

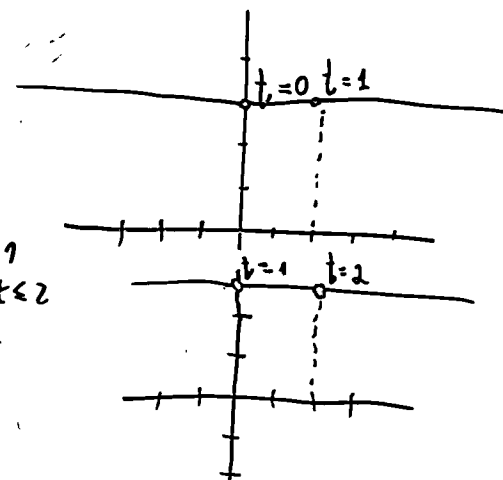
DIGAMOS QUE



DE UMA DEFINIÇÃO POR CASOS PARA $G(t)$ NESTE

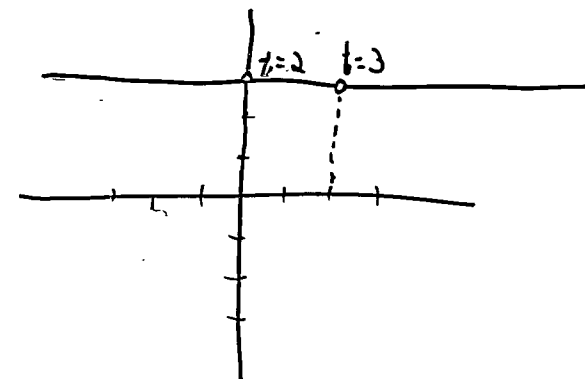
FORMATO:

$$G(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (t-0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{QUANDO } t \leq 1 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (t-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{QUANDO } 1 \leq t \leq 2 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (t-2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{QUANDO } 2 \leq t \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \gamma &:= 0 \\ \gamma &:= 1 \\ \gamma &:= 2 \end{aligned}$$

$$r_3 = \{(0,3) + (t-\gamma)\vec{(2,0)} \mid t \in \mathbb{R}\}$$



ABC

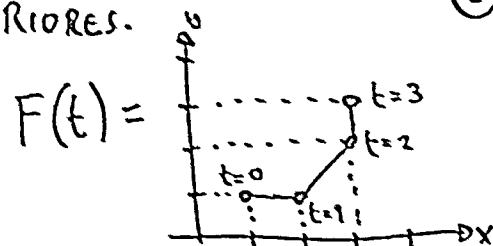
CA 23/ABRIL/2023

INICIO: 14:21

PLANO PRA HOJE:

VAMOS VER SE A GENTE CONSEGUE FINALMENTE VER UM CASO MAIS OU MENOS DIFÍCIL DE PASSAGEM DE SOMATÓRIO PRA INTEGRAL...

VAMOS COMECAR COM ESSE EXEMPLO AQUI - O MESMO DAS AULAS ANTERIORES.



$$F(t) =$$

$$F(t) = \begin{cases} F_1(t) & \text{QUANDO } t \leq 1 \\ F_2(t) & \text{QUANDO } 1 < t < 2 \\ F_3(t) & \text{QUANDO } 2 \leq t \end{cases}$$

ONDE $F_1(t)$, $F_2(t)$ e $F_3(t)$ SÃO RETAS PARAMETRIZADAS.

ALÉM DISSO,

$$F(t) = (x(t), y(t)),$$

$$F_1(t) = (x_1(t), y_1(t))$$

$$F_2(t) = (x_2(t), y_2(t))$$

$$F_3(t) = (x_3(t), y_3(t))$$

① REPRESENTAR GRAFICAMENTE:

$$\int_{t=0}^{t=3} x(t) dt, \int_{t=0}^{t=3} y(t) dt$$

② ISTO AQUI É VERDADE?

$$\int_{t=0}^{t=3} x(t) dt = \int_{t=0}^{t=1} x_1(t) dt + \int_{t=1}^{t=2} x_2(t) dt + \int_{t=2}^{t=3} x_3(t) dt?$$

DICA: FAÇA OS GRÁFICOS DE $F_1(t)$, $x_1(t)$, $y_1(t)$, $F_2(t)$, $x_2(t)$, $y_2(t)$, $F_3(t)$, $x_3(t)$, $y_3(t)$

③ DESCUBRA COMO VISUALIZAR:

$$F(1), F(2),$$

$$x(1), x(2), y(1), y(2),$$

$$(x(2)-x(1)), (y(2)-y(1)),$$

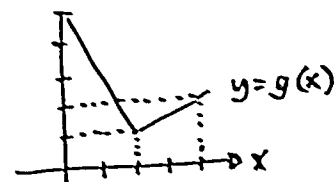
$$\sqrt{(x(2)-x(1))^2 + (y(2)-y(1))^2},$$

④ E AS EXPRESSÕES CORRESPONDENTES QUANDO A GENTE MUDA 1 E 2 PARA:

- a) 1 VIRA 2 E 2 VIRA 3 c) 1 CONTINUA SENDO 1 E 2 VIRA 3
- b) 1 VIRA 0 E 2 VIRA 1

VOU USAR AS NOTASÕES $g'_{ESQ}(x)$ E $g'_{DIR}(x)$

PARA AS DERIVADAS PELA ESQUERDA E PELA DIREITA. POR EXEMPLO, AQUI,



TEMOS $g'_{ESQ}(2) = -2$ E $g'_{DIR}(2) = 1/2$.

⑤ DESCUBRA OS VALORES E AS REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS DE:

$$x'_{DIR}(0), y'_{DIR}(0), F'_{DIR}(0),$$

$$x'_{ESQ}(1), y'_{ESQ}(1), F'_{ESQ}(1), x'_{DIR}(1), y'_{DIR}(1), F'_{DIR}(1),$$

$$" (2) " (2) " (2) " (2) " (2) " (2),$$

$$" (3) " (3) " (3)$$

⑥ QUAIS DESTAS AFIRMAÇÕES SÃO VERDADES?

$$F(2) = F(1) + (2-1) F'_{ESQ}(1)$$

$$F(2) = F(1) + (2-1) F'_{DIR}(1)$$

$$F(3) = F(1) + (3-1) F'_{ESQ}(1)$$

$$F(3) = F(1) + (3-1) F'_{DIR}(1)$$

$$F(0) = F(1) + (0-1) F'_{ESQ}(1)$$

$$F(0) = F(1) + (0-1) F'_{DIR}(1)$$

⑦ DESCUBRA COMO VISUALIZAR ET EXPRESSÕES PARA VÁRIOS VALORES DE t_0 E t_1 .

AQUI NÓS VAMOS USAR VÁRIAS DAQUELAS COMEÇANDO COMO $\Delta t = t_1 - t_0$ E $P_1 = P(t)$

PPA ELAS FUNCIONAM A GENTE VAI TER ESQUECER AS DEFINIÇÕES DE LÁ DO INÍCIO... QUE $P(t) = F(t)$

ESCREVA GRAFICAMENTE:

$$\int_0^3 x(t) dt, \int_0^3 y(t) dt$$

O AQUI É VERDADE?

$$\int_0^3 x(t) dt = \int_0^1 x_1(t) dt$$

$$+ \int_1^2 x_2(t) dt$$

$$+ \int_2^3 x_3(t) dt?$$

DICA: FAÇA OS
GRÁFICOS DE
 $F_1(t), x_1(t), y_1(t),$
 $F_2(t), x_2(t), y_2(t),$
 $F_3(t), x_3(t), y_3(t)$

③ DESCUBRA COMO VISUALIZAR:

$$F(1), F(2),$$

$$x(1), x(2), y(1), y(2),$$

$$(x(2)-x(1)), (y(2)-y(1)),$$

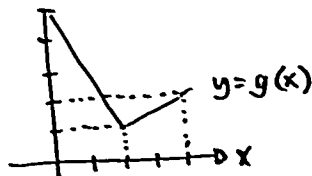
$$\sqrt{(x(2)-x(1))^2 + (y(2)-y(1))^2},$$

④ E AS EXPRESSÕES CORRESPONDENTES
QUANDO A GENTE MUDA 1 E 2 PARA:

- a) 1 VIRA 2 E 2 VIRA 3
b) 1 VIRA 0 E 2 VIRA 1
c) 1 CONTINUA SENDO 1 E 2 VIRA 3

VOU USAR AS NOTASÕES
 $g'_{ESQ}(x)$ E $g'_{DIR}(x)$

PARA AS DERIVADAS
PELA ESQUERDA E
PELA DIREITA. POR
EXEMPLO, AQUI,



$$TEMOS $g'_{ESQ}(2) = -2$
 $g'_{DIR}(2) = 1/2$.$$

⑤ DESCUBRA OS VALORES
E AS REPRESENTAÇÕES
GRÁFICAS DE:

$$x'_{DIR}(0), y'_{DIR}(0), F'_{DIR}(0),$$

$$x'_{ESQ}(1), y'_{ESQ}(1), F'_{ESQ}(1), x'_{DIR}(1), y'_{DIR}(1), F'_{DIR}(1),$$

$$" (2) " (2) " (2) " (2) " (2), " (2),$$

$$" (3) " (3) " (3)$$

⑥ QUAS DESTAS
AFIRMAÇÕES SÃO
VERDADES?

$$F(2) = F(1) + (2-1) F'_{ESQ}(1)$$

$$F(2) = F(1) + (2-1) F'_{DIR}(1)$$

$$F(3) = F(1) + (3-1) F'_{ESQ}(1)$$

$$F(3) = F(1) + (3-1) F'_{DIR}(1)$$

$$F(0) = F(1) + (0-1) F'_{ESQ}(1)$$

$$F(0) = F(1) + (0-1) F'_{DIR}(1)$$

⑦ DESCUBRA COMO
VISUALIZAR ETAS
EXPRESSÕES PARA
VÁRIOS VALORES
DE t_0 E t_1 .

AQUI NÓS VAMOS
USAR VÁRIAS
DAQUELAS CONVEN-
ÇÕES COMO

$$\Delta t = t_1 - t_0$$

$$E P_1 = P(t).$$

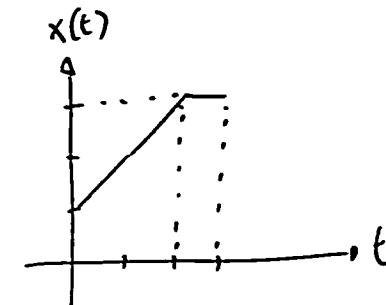
PARA ELAS FUNCIONAREM
A GENTE VAI TER QUE
ESQUECER AS
DEFINIÇÕES DE F_1, x_1 E y_1
LÁ DO INÍCIO... E DIGAMOS
QUE $P(t) = F(t)$.

PARA CASA: LEIA
AS DUAS PRIMEIRAS
PÁGINAS DA SEÇÃO
13.3 DO STEWART.
ESSAS PÁGINAS SÃO
SOBRE COMPRIMENTO
DE ARCO; LOGO
DEPOIS ELE COMEÇA
A FALAR DE CURVATURA,
QUE É ALGO QUE
NÃO NOS INTERESSA
AGORA.

NA EDIÇÃO EM
PORTUGUÊS ISSO SÃO
AS PÁGINAS 799 E 792.
NA EDIÇÃO EM INGLÊS
ISSO SÃO AS PÁGINAS
877, 878 E 879, E
VOCÊ PODE CHEGAR
NELAS CLICANDO NO
LINK

STEW 13p16
NA PÁGINA DO CURSO.

ÁREA DE
RASCUNHO



$$F'_{DIR}(1) = (x'_{DIR}(1), y'_{DIR}(1))$$

$$= (1, 1)$$

$$F'_{ESQ}(1) = ?$$

C4 28/ABRIL/2023

INÍCIO: 16:14

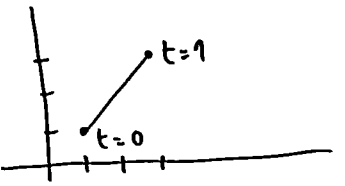
HOJE A GENTE VAI COMEÇAR A ENTENDER O QUE SÃO OS SÍMBOLOS COMO ds , $\vec{r}$, e $\vec{n}$

NAS INTEGRAIS DE LINHA... POR EXEMPLO,

$$\int_C f(x,y) ds$$

EU VOU TIRAR QUASE TODOS OS EXEMPLOS QUE EU VOU APRESENTAR HOJE DO LIVRO "DIV, GRAD, CURL", MAS SÓ PORQUE O DIV, GRAD, CURL APRESENTA ELES EM DEM POUCAS PÁGINAS... TUDO ISSO TEM NO STEWART TAMBÉM.

PRIMEIRO EXEMPLO:



C É SEMPRE UMA CURVA... EM GERAL EM CURVA PARAMETRIZADA - NO EXEMPLO ACIMA C É O SEGMENTO QUE VAI DE $(1,1)$ ATÉ $(3,3)$, E ELA É PARAMETRIZADA ASSIM:

$$P: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (1,1) + t(2,2).$$

AOS POUCOS A GENTE VAI ENTENDER QUE "A PARAMETRIZAÇÃO NÃO IMPORTA" (OBS: AS ASPAS SÃO IMPORTANTES!)

LEMBRE QUE

$$\int_{x=20}^{x=42} f(x) dx \approx f(20)(30-20) + f(30)(42-30) \approx f(30)(30-20) + f(42)(42-30) \dots$$

NA VERDADE ESSAS SÃO APROXIMAÇÕES RUINS, MAS A IDÉIA GERAL É:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^N f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \Leftrightarrow [R] \\ \approx \sum_{i=1}^N f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) \Leftrightarrow [L]$$

① EXERCÍCIO: DIGAMOS QUE $f(x) = x/2$, $a=2$, $b=6$, $P = \{2, 4, 6\}$.

DESENHE $f(x)$, $[L]$ E $[R]$ NESTE CASO.

IDÉIA:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^N \underbrace{f(x_i)}_{\text{OU } f(x_{i-1})} (x_i - x_{i-1})$$

O $(x_i - x_{i-1})$ CORRESPONDE AO dx , E NO LIMITE NÃO IMPORTA SE A GENTE USA $f(x_i)$ OU $f(x_{i-1})$.

VOLTANDO AO ds ...

O $\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$ CORRESPONDE AO ds ...

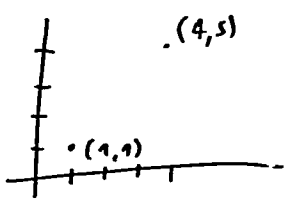
ISSO É UMA HIPOTENUSA!

E SE TIVERMOS $P(t) = (x(t), y(t))$ PODEMOS REESCREVER ISSO COMO...

$$\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = \|(x_i, y_i) - (x_{i-1}, y_{i-1})\| = \|P_i - P_{i-1}\| = \|P(t_i) - P(t_{i-1})\| = \|(x(t_i), y(t_i)) - (x(t_{i-1}), y(t_{i-1}))\|$$

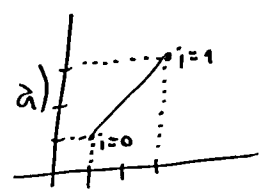
② EXERCÍCIO... USE AQUELA DEFINIÇÃO DA P LA DA ESQUERDA, E SUPONHA QUE $t_0=0$, $t_1=1/2$, $t_2=1$.

REPRESENTE GRAFICAMENTE $\|P_1 - P_0\| + \|P_2 - P_1\|$.



$$\|(4,5) - (1,1)\| = \|(3,4)\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

③ REPRESENTE GRAFICAMENTE $\sum_{i=1}^N \|P_i - P_{i-1}\|$ EM CADA UM DOS CASOS ACIMA E CALCULE O RESULTADO.



QUE

$$\begin{aligned} (K) dx &\approx f(20)(30-20) \\ &+ f(30)(42-30) \\ &\approx f(30)(30-20) \\ &+ f(42)(42-30) \dots \end{aligned}$$

NA VERDADE ESSAS SÃO APROXIMAÇÕES RUINS, MAS A IDEIA GERAL É:

$$\begin{aligned} \int_{x=a}^{x=b} f(x) dx &\approx \sum_{i=1}^N f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \Leftrightarrow [R] \\ &\approx \sum_{i=1}^N f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) \Leftrightarrow [L] \end{aligned}$$

1) EXERCÍCIO:
DIGAMOS QUE $f(x) = x/2$,
 $a = 2$,
 $b = 6$,
 $P = \{2, 4, 6\}$.

DESENHE $f(x)$, $[L]$ E $[R]$
NESTE CASO.

IDEIA:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^N \underbrace{f(x_i)}_{\text{OU } f(x_{i-1})} (x_i - x_{i-1})$$

VOLTANDO AO $ds \dots$

O $\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$
CORRESPONDE AO $ds \dots$

ISSO É UMA HIPOTENUSA!

E SE TIVERMOS $P(t) = (x(t), y(t))$
PODEMOS REESCREVER ISSO COMO...

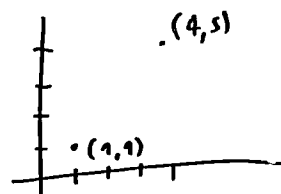
$$\begin{aligned} &\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} \\ &= \|(x_i, y_i) - (x_{i-1}, y_{i-1})\| \\ &= \|P_i - P_{i-1}\| \\ &= \|P(t_i) - P(t_{i-1})\| \\ &= \|(x(t_i), y(t_i)) - (x(t_{i-1}), y(t_{i-1}))\| \end{aligned}$$

i	x_{i-1}	x_i
1	2	4
2	4	6

2) EXERCÍCIO...
USE AQUELA DEFINIÇÃO
DA P LA DA ESQUERDA,
E SUPONHA QUE $t_0 = 0$,
 $t_1 = 1/2$,
 $t_2 = 1$.

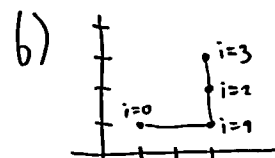
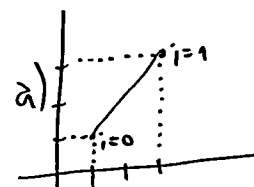
REPRESENTE GRAFICAMENTE
 $\|P_1 - P_0\| + \|P_2 - P_1\|$.

O $(x_i - x_{i-1})$ CORRESPONDE
AO dx , E NO LIMITE
NÃO IMPORTA SE A
GENTE USA $f(x_i)$
OU $f(x_{i-1})$.



$$\begin{aligned} &\|(4,5) - (1,1)\| \\ &= \|(3,4)\| \\ &= \sqrt{3^2 + 4^2} \\ &= 5 \end{aligned}$$

3) REPRESENTE
GRAFICAMENTE
 $\sum_{i=1}^N \|P_i - P_{i-1}\|$
EM CADA UM
DOS CASOS ABAIXO
E CALCULE O RESULTADO.



O "DIV, GRAD, CURL"

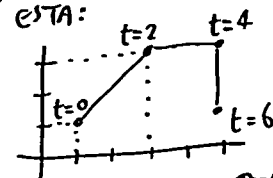
DEFINE $\vec{T}$ EM NEGrito
COMO O VETOR TANGENTE
UNITÁRIO, OU UNITARIZADO...

A "UNITARIZAÇÃO" DE UM
VETOR (a,b) É O VETOR
 $\frac{(a,b)}{\|(a,b)\|}$. POR EXEMPLO,

SE $(a,b) = (3,4)$ ENTÃO

$$\frac{(a,b)}{\|(a,b)\|} = \frac{(3,4)}{5} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

4) DIGAMOS QUE A NOSSA
CURVA PARAMETRIZADA
É ESTA:



PARA CADA UM DOS
VALORES DE t ABAIXO
DESCUBRA O VETOR $\vec{T}$
ASSOCIADO-A ELE E
REPRESENTE-O GRAFICA-
MENTE.

- a) $t = 1$
- b) $t = 3$
- c) $t = 5$

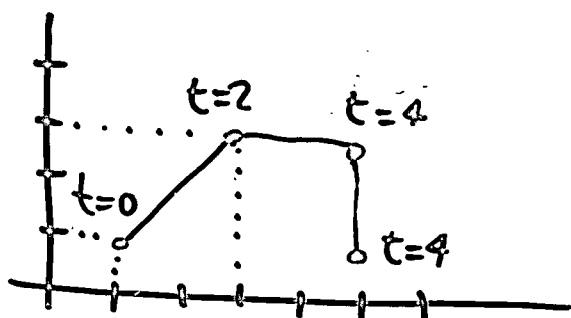
C4 28/ABRIL/2023

INÍCIO: 16:14

A GENTE TAMBÉM TEM
UMA NOTação BEM
POA PRO VETOR TANGENTE
NÃO UNITARIZADO. ELA
É SIMPLEMENTE ISSO AQUI:

$$\overrightarrow{(x_t, y_t)}$$

NESSA CURVA PARAMETRIZADA
AQUI - A MESMA DO EXERCÍCIO
ANTERIOR -



$$\overrightarrow{\left(\underbrace{\frac{\Delta x}{\Delta t}}_1, \underbrace{\frac{\Delta y}{\Delta t}}_1 \right)}$$

DAÍ PRA CALCULAR $\overrightarrow{(x_t, y_t)}$
NO OLHO PARA $t=1,$
 $t=3,$
 $t=5...$

VEJA SE VOCÊ CONSEGUE
DESCOBRIR COMO CALCULAR
ESSES " $\overrightarrow{(x_t, y_t)}$ " S DE CABEÇA.

C4 5/MAIO/2023

HOJE: UM POUCO
DE FÍSICA!

VAMOS VER UM
POUQUINHO DOS
CAPÍTULOS SOBRE
TRABALHO E
HIDROESTÁTICA
DOS LIVROS DO
MOYSES NUSSENSVEIG
E VAMOS VER COMO
INTEGRAIS DE LINHA
CALCULAM TRABALHO
E FLUXO!

EXERCÍCIO:

REPRESENTE GRAFICAMENTE
ESTES CAMPOS VETORIAIS:

a) $\vec{G}(x,y) = (0, -1)$

b) $\vec{G}(x,y) = (0, -\frac{1}{2})$

c) $\vec{G}(x,y) = (y, 0)$

d) $\vec{G}(x,y) = ((y-1)(y+1), 0)$

OPS: CONSIDERE QUE NO
ITEM d O DOMÍNIO DA
FUNÇÃO G É ESTE AQUI:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [-1, 1]\}.$$

LEMBRE QUE O
CAMPO GRAVITACIONAL
DA TERRA É ASSIM:

$$\vec{G}(x,y) = (0, -10 \text{ m/s}^2).$$

DIGAMOS QUE A
É UM CORPO COM 1kg.

QUAL É O TRABALHO

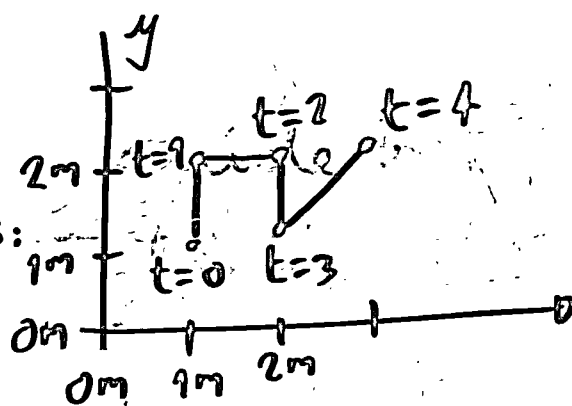
26/5

QUE O CORPO A FAZ

QUANDO ELE SE

DELOCA NESTA

TRAJETÓRIA?



E SE O CAMPO GRAVITACIONAL
FOR $\vec{G}(x,y) = (0, -2 \text{ m/s}^2)$?

C4 8/MAIO/2023

INÍCIO: 14:25

NA AULA PASSADA
NÓS VIMOS COMO
CALCULAR O TRABALHO
NUMA TRAJETÓRIA
BEM SIMPLES E
NUM CAMPO VETORIAL
BEM SIMPLES...

NESSA CASO DAVA
PRA CALCULAR TUDO
FAZENDO SO UMAS
POUCAS MULTIPLICAÇÕES
A GENTE QUER APRENDER
A LIDAR COM OS CASOS
MAIS COMPLICADOS, EM
QUE A GENTE VAI
PRECISAR DE INTEGRAIS,
E O RESULTADO NÃO
VAI DEPENDER DA
PARAMETRIZAÇÃO.

LEMBRE DISSO AQUI:

$$\int \underbrace{\cos(x^4)}_u \cdot \underbrace{4x^3}_{\frac{du}{dx}} dx = \int \cos u \, du$$

$$u = x^4$$

$$\frac{du}{dx} = 4x^3$$

$$du = \frac{du}{dx} dx = 4x^3 dx$$

x é uma VARIÁVEL INDEPENDENTE
u é uma VARIÁVEL DEPENDENTE: $u = x^4$

dx é uma VARIÁVEL INDEPENDENTE NOVA
du é uma VARIÁVEL DEPENDENTE NOVA: $du = 4x^3 dx$

LEIAM A SEÇÃO 4.4
DO LEITHOLD ATÉ
PELO MENOS A P. 275,
QUE MOSTRA COMO
REESCREVER VÁRIAS
FÓRMULAS DE DERIVAÇÃO
USANDO A NOTASÃO DE
LEIBNIZ...

...QUE VAI NOS PERMITIR
FAZER COISAS COMO
ISSO AQUI:

$$d(x^4) = 4x^3 dx$$

QUE É A MESMA IDÉIA
DAQUI DE BAIXO, MAS
AGORA A GENTE VAI
TRATAR O x^4
COMO MAIS UMA
VARIÁVEL DEPENDENTE!

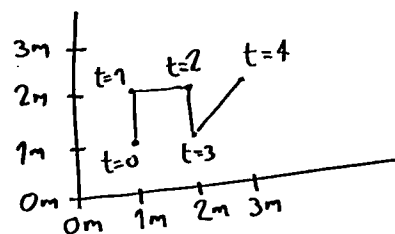
LINK: [LEIT 4p55](#), QUE
VAI PRA P. 269 DO
LIVRO...
SEÇÃO 4.9: A DIFERENCIAL

...E AÍ VEJAM SE VOCÊS
CONSEGUEM FAZER A
QUESTÃO 2 DA P2 DE C3
DO SEMESTRE PASSADO -
LINK: [3FT118](#) -
OLHANDO O GABARITO
DELA O MÍNIMO
POSSÍVEL.

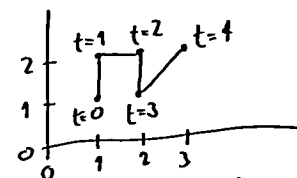
ALÉM DISSO QUEM
NÃO VEIO NA AULA
PASSADA TEM QUE
TENTAR FAZER
O EXERCÍCIO DA
AULA PASSADA
SOBRE TRABALHO!
LINK: [49Q12](#)

EXERCÍCIOS DE HOJE SOBRE TRABALHO

NA AULA PASSADA
EU USEI ESSA
TRAJETÓRIA AQUI,



E (QUASE) TODAS AS
CONTAS TINHAM
UNIDADES. AGORA
VAMOS USAR ESTA
TRAJETÓRIA,



E VÁRIOS CAMPOS
VETORIAIS DIFERENTES -
TODOS SEM UNIDADES -
E VOCÊ VAI TER
QUE CALCULAR O
"TRABALHO" (ENTRE
ASPAS PORQUE É SEM
UNIDADES!) DO DELOCA-
MENTO NESTA TRAJETÓRIA
NESSAS CAMPOS.

a) SEJA $F(x,y) = (0, -1)$.
CALCULE O "TRABALHO"
EM CADA SEGMENTO.

b) IGEM MAS PARA
 $F(x,y) = (1, 0)$.

c) IGEM MAS PARA
 $F(x,y) = (1, -1)$.

d) IGEM MAS PARA
 $F(x,y) = (0, -y)$.

AQUI VOCÊ VAI
PRECISAR USAR
INTEGRAIS, MAS
DÁ PRA SE VIRAR
SEM INTEGRAIS SE
VOCÊ FIZER UM
TRUQUE USANDO
MÉDIAS. ☺

C4 12/MAIO/2023

INÍCIO: 16:25

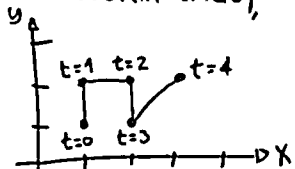
LEMBRE QUE EM C2 AS PESSOAS E OS LIVROS COSTUMAM ESCRIVER AS INTEGRAIS ASSIM,

$$\int_3^4 f(u) du$$

MAS EU PREFIRO ESCRIVER ELAS ASSIM:

$$\int_{u=3}^{u=4} f(u) du$$

NA AULA PASSADA NÓS VIMOS COMO CALCULAR O "TRABALHO" NESTA TRAJETÓRIA DAQUI,



PARA VÁRIOS CAMPOS VETORIAIS DIFERENTES. VOU INTRODZIR UMA VARIÁVEL NOVA:

$$u = y^2$$

$$y = \sqrt{u}$$

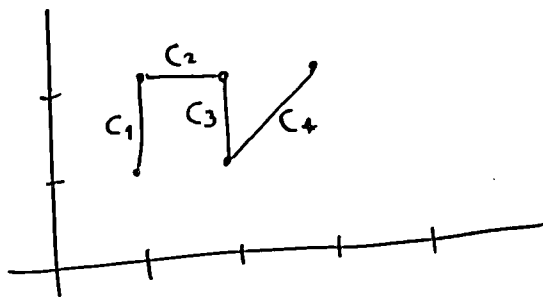
REPRE QUE TEMOS:

t	y	u
0	1	1
1	2	4

EM C4 OS LIVROS COSTUMAM ESCRIVER AS INTEGRAIS DE LINHA ASSIM:

$$\int_C \dots d\dots$$

DIGAMOS QUE A NOSSA TRAJETÓRIA C - OU: A NOSSA PARAMETRIZAÇÃO PARA A CURVA C - PODE SER DIVIDIDA NESSAS QUATRO SUBTRAJETÓRIAS / SUBCURVAS DESM SIMPLES:



A TRAJETÓRIA / CURVA PARAMETRIZADA C1

VAI: DE $t=0$ PARA $t=1$,
DE $y=1$ PARA $y=2$,
DE $u=1$ PARA $u=4$,

E DÁ PRA REESCREVER O $\int_{C_1}$ COMO $\int_{t=0}^{t=1}$, COMO $\int_{y=1}^{y=2}$ E COMO $\int_{u=1}^{u=4}$

... E EM C4 É COMUM O "d..." NA INTEGRAL SER NUMA VARIÁVEL DIFERENTE DA VARIÁVEL DA ESQUERDA!

$$\text{POR EXEMPLO, } \int_{t=0}^{t=1} y^2 dy.$$

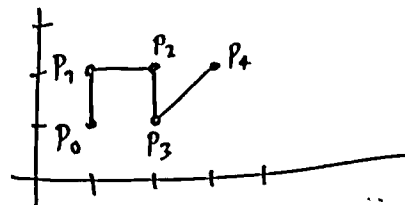
① COMECE REFAZENDO OS EXERCÍCIOS DO FINAL DA AULA PASSADA. VOU COPIAR ELES ABAIXO, MAS O ITEM C' É NOVO. CALCULE O "TRABALHO" EM CADA SEGMENTO DA TRAJETÓRIA C PARA ESTES CAMPOS:

- $F(x,y) = (0, -1)$
- $F(x,y) = (1, 0)$
- $F(x,y) = (1, -1)$
- $F(x,y) = (-1, -1)$
- $F(x,y) = (0, -y)$

t=0 ATÉ t=1	t=1 ATÉ t=2	2 ATÉ 3	3 ATÉ 4
1	0	-1	1
0	-1	0	-1
1	-1	-1	0
1	1	-1	2
-1.5	0	1.5	-1.5

A IDÉIA PRINCIPAL DE HOJE É QUE DÁ PRA CALCULAR O "TRABALHO" USANDO INTEGRAIS!

LEMBRE QUE EU CHAMEI OS "VÉRTICES" DA TRAJETÓRIA C DE:



TEMOS:

$$\int_{C_1} = \int_{P_0}^{P_1}$$

E O "TRABALHO" EM C1 É:

$$\int_{C_1} -F \cdot (dx, dy) =$$

$$\int_{t=0}^{t=1} -F(x(t), y(t)) \cdot \left(\frac{dx}{dt} dt, \frac{dy}{dt} dt \right)$$

$$\int_{t=0}^{t=1} -F(x(t), y(t)) \cdot \left(\frac{d}{dt} x(t), \frac{d}{dt} y(t) \right)$$

LEMBRE QUE

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} x$$

② EXERCÍCIO:

NO ITEM (d) DO EXERCÍCIO 1 VOCÊ CALCULOU O TRABALHO ENTRE $t=0$ E $t=1$ NO CAMPO $F(x,y) = (0, -y) \dots$

AGORA CALCULE ISSO USANDO A INTEGRAL (II).

DICA: EM C1 TEMOS:

$$P(t) = (1, 1) + t(0, 1)$$

$$= (1, 1+t)$$

$$(x(t), y(t)) = (1, 1+t),$$

$$x(t) = 1$$

$$y(t) = 1+t$$

CA É COMUM
NA INTEGRAL SER
VARIÁVEL DIFERENTE
VARIÁVEL DA ESQUERDA!
EXEMPLO, $\int_{t=0}^{t=1} y^2 dy$.

COMECE REFAZENDO OS
EXERCÍCIOS DO FINAL DA
AULA PASSADA. VOU
COPIAR ELAS ABAIXO, MAS
O ITEM C' É NOVO.

CALCULE O "TRABALHO"
EM CADA SEGMENTO DA
TRAJETÓRIA C PARA
ESTES CAMPOS:

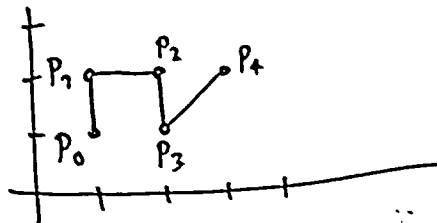
- a) $F(x,y) = \overrightarrow{(0, -1)}$
b) $F(x,y) = \overrightarrow{(1, 0)}$
c) $F(x,y) = \overrightarrow{(1, -1)}$
c') $F(x,y) = \overrightarrow{(-1, -1)}$
C₁ d) $F(x,y) = \overrightarrow{(0, -y)}$

como

= 4

A IDÉIA PRINCIPAL DE
HOJE É QUE DÁ PRA
CALCULAR O "TRABALHO"
USANDO INTEGRAIS!

LEMBRE QUE EU CHAMEI
OS "VÉRTICES" DA TRAJETÓRIA
C DE:



t=0 ATÉ t=1	t=1 ATÉ t=2	2 ATÉ 3	3 ATÉ 4
1	0	-1	1
0	-1	0	-1
1	-1	-1	0
1	1	-1	2
-1.5	0	1.5	-1.5

TEMOS:

$$\int_{C_1} = \int_{P_0}^{P_1}$$

E O "TRABALHO" EM C₁ É:

$$\int_{C_1} -F \cdot \overrightarrow{(dx, dy)} =$$

$$\int_{t=0}^{t=1} -F(x(t), y(t)) \cdot \overrightarrow{\left(\frac{dx}{dt} dt, \frac{dy}{dt} dt\right)} =$$

$$\int_{t=0}^{t=1} -F(x(t), y(t)) \cdot \overrightarrow{\left(\frac{d}{dt}x(t), \frac{d}{dt}y(t)\right)} dt \quad (*)$$

LEMBRE QUE:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}x = \frac{d}{dt}x(t)$$

② EXERCÍCIO:

NO ITEM (d) DO EXERCÍCIO 1
VOCÊ CALCULOU O TRABALHO
ENTRE t=0 e t=1 NO CAMPO
 $F(x,y) = \overrightarrow{(0, -y)}$...

AGORA CALCULE ISSO USANDO
A INTEGRAL (*).

DICA: EM C₁ TEMOS:

$$P(t) = (1, 1) + t(0, 1)$$

$$= (1, 1+t)$$

$$(x(t), y(t)) = (1, 1+t),$$

$$x(t) = 1$$

$$y(t) = 1+t$$

$$\left(\underbrace{\frac{d}{dt} 1}_0, \underbrace{\frac{d}{dt} (1+t)}_1 \right)$$

$$F(x,y) = \overrightarrow{(0, -y)}$$

$$F(a,b) = \overrightarrow{(0, -b)}$$

$$F(a+b, c+d) = \overrightarrow{(0, -(c+d))}$$

$$F(1, 1+t) = \overrightarrow{(0, -(1+t))}$$

$$\overrightarrow{(a,b)} \cdot \overrightarrow{(c,d)} = ac + bd$$

$$\int 1 dx = x \quad \int_{x=2}^{x=6} 1 dx = x \Big|_{x=2}^{x=6}$$

$$\left(-t + \frac{t^2}{2} \right) \Big|_{t=0}^{t=2}$$

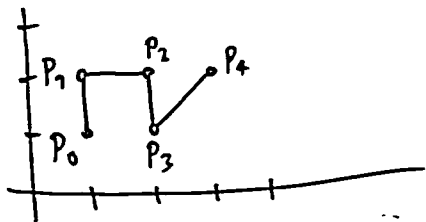
$$F(x,y)$$

$$\overrightarrow{F \cdot (dx, dy)}$$

$$F(x(t), y(t)) \cdot \overrightarrow{\left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}\right)} dt$$

A IDÉIA PRINCIPAL DE
HOJE É QUE DÁ PRA
CALCULAR O "TRABALHO"
USANDO INTEGRAIS!

LEMBRE QUE EU CHAMEI
OS "VÉRTICES" DA TRAJETÓRIA
C DE:



t=0 ATÉ t=1	t=1 ATÉ t=2	2 ATÉ 3	3 ATÉ 4
1	0	-1	1
0	-1	0	-1
1	-1	-1	0
1	1	-1	2
-1.5	0	1.5	-1.5

Temos:

$$\int_{C_1} = \int_{P_0}^{P_1}$$

E O "TRABALHO" em C_1 é:

$$\int_{C_1} -F \cdot (dx, dy) =$$

$$\int_{t=0}^{t=1} -F(x(t), y(t)) \cdot \left(\frac{dx}{dt} dt, \frac{dy}{dt} dt \right) =$$

$$\int_{t=0}^{t=1} -F(x(t), y(t)) \cdot \left(\frac{d}{dt} x(t), \frac{d}{dt} y(t) \right) dt \quad (*)$$

Lembre que:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} x = \frac{d}{dt} x(t)$$

② EXERCÍCIO:

NO ITEM (d) DO EXERCÍCIO 1
VOCÊ CALCULOU O TRABALHO
ENTRE $t=0$ E $t=1$ NO CAMPO
 $F(x, y) = (0, 1 - y) \dots$

AGORA CALCULE ISSO USANDO
A INTEGRAL (*).

DICA: Em C_1 temos:

$$P(t) = (1, 1) + t(0, 1)$$

$$= (1, 1+t)$$

$$(x(t), y(t)) = (1, 1+t),$$

$$x(t) = 1$$

$$y(t) = 1+t$$

REPARE QUE
ISSO AQUI NÃO
DEPENDE DE $t \dots$
NA AULA QUE VEM
A GENTE VAI VER
QUE ISSO DÁ O MESMO
RESULTADO SE A GENTE
USA A PARAMETRIZAÇÃO
EM u E:

$$\int_{u=1}^{u=4} \dots du$$

C4 15/MAIO/2023

INÍCIO: 14:22

HOJE: CONTINUAÇÃO DOS EXERCÍCIOS DA AVLA PASSADA, EM QUE SÓ O MÁRCIO VEIO - EU TROUXE CÓPIAS IMPRESSAS DAS FOTOS DOS QUADROS.

DIGAMOS QUE $F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$.

ENTÃO

$$\int F(x,y) \cdot (dx, dy)$$

$$= \int (F_1(x,y), F_2(x,y)) \cdot (dx, dy)$$

$$= \int (F_1(x,y) dx + F_2(x,y) dy)$$

EM CÁLCULO 2 EU COSTUMO SER MUITO ESTRITO COM O JEITO DE ESCREVER AS INTEGRAIS... O dx VEM SEMPRE NO FINAL, COMO SE O "J" FOSSE UM ABRE PARÊNTESE E O " dx " FOSSE UM FECHA PARÊNTESE, E EU EVITO COISAS COMO ISSO AQUI, QUE ALGUNS LIVROS USAM BASTANTE:

$$\int \frac{dx}{x}$$

ALÉM DISSO EM C2 EU COSTUMO TRATAR INTEGRAIS INDEFINIDAS COMO ABREVIATURAS PARA INTEGRAIS DEFINIDAS ("COM OS LIMITES DE INTEGRAÇÃO APAGADOS"), E EU COSTUMO

INDICAR A VARIÁVEL DE INTEGRAÇÃO NA INTEGRAL - EU ESCREVO

$$\int_{x=2}^{x=3} f(x) dx$$

AO INVÉS DE

$$\int_2^3 f(x) dx \dots$$

EU EXPLIQUEI O MOTIVO DISSO NA AVLA PASSADA.

EM CÁLCULO 4 OS LIVROS FAZEM COISAS TIPO ISSO AQUI:

QUE VIRA ISTO:

$$\int F_1(x,y) dx + \int F_2(x,y) dy$$

DICAS PRA P1

① PEGUEM UM CÓPIA DO STEWART VOL. 2 NA BIBLIOTECA E LEVEM PRA CASA - ELE VAI SER A NOSSA PRINCIPAL REFERÊNCIA, E VOCÊS PROVAVELMENTE VÃO TER QUE PASSAR MUITAS HORAS DECIFRANDO DETALHES DE ALGUMAS PÁGINAS ESPECÍFICAS DELE!

DICAS, CONT.

② A P1 VAI TER ALGUNS PROBLEMAS SOBRE CALCULAR INTEGRAIS DE LINHA QUE VÃO VALER MUITOS PONTOS, E ELES VÃO SER NO ESTILO DO PROBLEMA SOBRE "RETAS REVERSAS"

NOS SLIDES DA INTRODUÇÃO A C2... SIGA O LINK NA PÁGINA DO CURSO DE C4 PRA LER A HISTÓRIA, E SEJA COMO O BOB!!!

VOLTANDO...

EM C3 A GENTE COMEÇOU A VER COMO LIDAR COM VARIÁVEIS DEPENDENTES E NOTASÃO DE LEONIZ. AGORA A GENTE VAI VOLTAR A ISSO, E VER QUE A GENTE PODE REDEFINIR AS DEPENDÊNCIAS.

DIGAMOS QUE A GENTE COMEÇA COM ISTO AQUI,

$$A) \int F_1(x,y) dx$$

E A GENTE DECIDE QUE $x = x(t)$ E $y = y(t)$... OU SEJA, x E y

VIRAM VARIÁVEIS DEPENDENTES, QUE DEPENDEM DE t .

COM ISSO TEMOS

$$dx = \frac{d(x(t))}{dt} dt = \frac{dx(t)}{dt} dt$$

E PODEMOS TRANSFORMAR A EXPRESSÃO (A) NESTA AQUI:

$$B) \int F_1(x(t), y(t)) \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) dt$$

E SE ALÉM DISSO NÓS DECIDIRMOS QUE $t = t(u)$ A EXPRESSÃO ACIMA PODE SER TRANSFORMADA NUMA OUTRA AINDA MAIOR...

$$O) F_1(x(t), y(t))$$

$$VIRAM F_1(x(t(u)), y(t(u))),$$

E O $\frac{dx}{dt} dt$ É MAIS DIFÍCIL DE TRANSFORMAR... PODEMOS COMEÇAR COM:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} dt &= dx \\ &= \frac{dx}{du} du \\ &= \left(\frac{d}{du} x(t(u)) \right) du \\ &= (x'(t(u)) t'(u)) du \\ &= \frac{dx}{du} \frac{dt}{du} du, \end{aligned}$$

OU SEJA,

$$\frac{dx}{dt} dt = \frac{dx}{du} \frac{dt}{du} du$$

$$x'(t) dt = x'(t(u)) t'(u) du$$

$$\int F_1(x,y) dx$$

$$= \int F_1(x(t), y(t)) x'(t) dt$$

$$= \int F_1(x(t(u)), y(t(u))) x'(t(u)) t'(u) du$$

OBS: SÃO 15:17 E NINGUÉM APARECEU... VOU PARAR DE ESCREVER E VOU FAZER UMAS COISAS NO LAB INFO, O LABORATÓRIO DE INFORMÁTICA DO IHS!

||

~

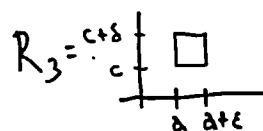
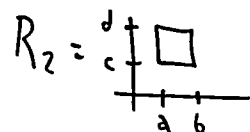
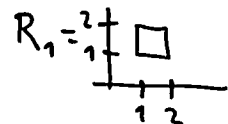
C4 19/MAIO/2022

INÍCIO: 16:15

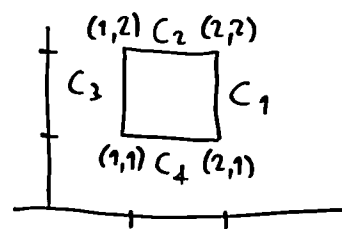
HOJE: PRIMEIROS EXEMPLOS DO TEOREMA DE GREEN-SEÇÃO 16.4 DO STEWART, PÁGINA 900.

ENTENDA AS DEFINIÇÕES DE "ORIENTAÇÃO POSITIVA" E "ORIENTAÇÃO NEGATIVA" DO STEWART...

TODAS AS REGIÕES QUE NÓS VAMOS USAR HOJE VÃO SER RETÂNGULOS. AS PRINCIPAIS VÃO SER ESSAS AQUI:



DIGAMOS QUE $C = \partial R_1$, E QUE EU VOU DIVIDIR A CURVA C EM 4 SUBCURVAS BEM SIMPLES, ASSIM:



ENTÃO C_1 VAI DE $(2,1)$ PRA $(2,2)$,
 C_2 VAI DE $(2,2)$ PRA $(1,2)$,
 C_3 VAI DE $(1,2)$ PRA $(1,1)$,
 C_4 VAI DE $(1,1)$ PRA $(2,1)$.

① EXERCÍCIO:
 LEMBRE QUE $\vec{i} = (1, 0)$
 E $\vec{j} = (0, 1)$.
 REPARE QUE ESSES $\vec{i}$ E $\vec{j}$
 SÃO EM NEGRITO.
 CALCULE $\oint_{R_1} \vec{x} \cdot \vec{j} \cdot (\overrightarrow{dx, dy})$.

PARA DEIXAR OS NOSSOS PRIMEIROS EXEMPLOS MAIS CONCRETOS, VAMOS IMAGINAR QUE NÓS TEMOS UM CAMPO DE FORÇAS NUM VIDEOGAME. ESSE CAMPO DE FORÇAS PODE FUNCIONAR UM POQUINHO COMO A GRAVIDADE, MAS ELE PODE TER ALGUMAS PROPRIEDADES ESQUISITAS.

A GRAVIDADE PUXA A GENTE PRA BAIXO, E QUANDO A GENTE ANDA CONTRA A GRAVIDADE - PRA CIMA - A NOSSA ENERGIA POTENCIAL GRAVITACIONAL AUMENTA; QUANDO A GENTE DEIXA A GRAVIDADE NOS LEVAR PRA BAIXO A NOSSA ENERGIA POTENCIAL GRAVITACIONAL DIMINUI.

VAMOS IMAGINAR QUE ALGO ASSIM ACONTECE NO NOSSO VIDEOGAME. ANDAR CONTRA A DIREÇÃO DO CAMPO AUMENTA A NOSSA ENERGIA / HIT POINTS / DINHEIRO, E ANDAR A FAVOR DO CAMPO DIMINUI A NOSSA ENERGIA (OU O NOSSO DINHEIRO, ETC, ETC).

PODE SER QUE O NOSSO VIDEOGAME TENHA UMAS REGIÕES "MÁGICAS" EM QUE SE A GENTE DER VOLTAS NUM DETERMINADO SENTIDO A GENTE RECUPERA ENERGIA OU JUNTA DINHEIRO; A GENTE TAMBÉM PODE DAR VOLTAS NO OUTRO SENTIDO E PERDER ENERGIA OU DINHEIRO, MAS ISSO RARAMENTE É ÚTIL.

② EXERCÍCIO:
 LEIA AS PRIMEIRAS PÁGINAS DA SEÇÃO 15.2 DO STEWART, QUE É SOBRE "INTEGRAIS ITERADAS", E CALCULE:

a) $\iint_{R_1} (x + py + q) \, dA$

b) $\iint_{R_2} (x + py + q) \, dA$

c) $\iint_{R_3} (x + py + q) \, dA$

③ VEJA SE VOCÊ CONSEGUE USAR ESTA PROPRIEDADE AQUI,

$$\iint (f(x,y) + g(x,y)) \, dA = \iint f(x,y) \, dA + \iint g(x,y) \, dA$$

E O TEOREMA DE FUBINI (PÁGINA 914 DO STEWART) PARA REESCREVER AS SUAS CONTAS DO EXERCÍCIO 2 DE UM JEITO MAIS SIMPLES.

④ CALCULE

a) $\oint_{\partial R_1} (a + bx + cy) \cdot \vec{i} \cdot (\overrightarrow{dx, dy})$

b) $\oint_{\partial R_1} (a + bx + cy) \cdot \vec{j} \cdot (\overrightarrow{dx, dy})$

DICA: COMECE USANDO O QUE VOCÊ APRENDEU NO EXERCÍCIO 3 DE HOJE PRA DESMONTAR CADA UMA DESSAS INTEGRAIS NUM MONTE DE OUTRAS INTEGRAIS MAIS SIMPLES.

AVISO:
 SÃO 17:30 E NINGUÉM VEIO!
 VOU PRA CASA!

C4 22/MAIO/2023

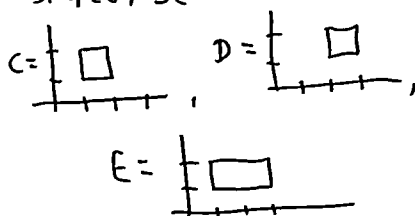
INÍCIO: 14:16

HOJE: MAIS INTRO-
DUÇÃO AO TEOREMA
DE GREEN, MAIS CASOS
FÁCEIS COM POLINÔMIOS,
E ALGUNS CASOS COM
CARA DE COISAS QUE
INTERESSAM PROS FÍSICOS!

LEMBREM QUE TODAS AS
DÚVIDAS SÃO BEM VINDAS,
INCLUSIVE - E ESPECIAL-
MENTE - DÚVIDAS SOBRE
MATÉRIA ANTIGA!

DÊ UMA OLHADA NA P. 1004
DO LIVRO DO STEWART - LÁ
TEM UNAS FIGURAS MUITO
BOAS SOBRE DIVIDIR UMA
REGIÃO EM VÁRIAS.

NOS NOSSOS CASOS MUITO
SIMPLES, SE



ENTÃO TEMOS:

$$\iint_C + \iint_D = \iint_E,$$

$$\int_{\partial C} + \int_{\partial D} = \int_{\partial E}.$$

LEMBRE QUE O STEWART
MOSTRA VÁRIAS NOTASÕES
DIFERENTES PRA INTEGRAL
DE LINHA - VEJA A P. 1001.

OS EXEMPLOS QUE
INTERESSAM PROS
FÍSICOS USAM
OPERADORES
DIFERENCIAIS.

A GENTE VU UM
OPERADOR DIFERENCIAL
EM C3: O GRADIENTE.

A GENTE COMEÇAVA
COM UMA FUNÇÃO

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

E O GRADIENTE DE F
ERA:

$$\nabla F = (\overline{F_x}, \overline{F_y}), \text{ ou:}$$

$$\vec{\nabla} F = (\overline{F_x}, \overline{F_y}), \text{ ou:}$$

$$(\nabla F)(x_0, y_0) = (\overline{F_x(x_0, y_0)}, \overline{F_y(x_0, y_0)}) \dots$$

OU:

$$\nabla F = \left(\frac{\partial}{\partial x} F, \frac{\partial}{\partial y} F \right)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) F$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

ESSA NOTAÇÃO SUPER CURTA
EM QUE $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$ É

NOVIDADE... VEJA NA P. 1007
DO STEWART COMO ELE
EXPLICA ISSO.

ALÉM, ELE USA UM TRUQUE

A MAIOR: PRA ELE

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} \text{ em 2D, e}$$

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \text{ em 3D.}$$

① QUANDO VOCÊS
TIVEREM TERMINADO
DE ENTENDER O
MATERIAL DAS DUAS
ÚLTIMAS AULAS,
FAÇAM ISSO AQUI:

② ENTENDA A
DEFINIÇÃO DE
ROTACIONAL DO
LIVRO (P. 1007).

③ ENTENDA O
"EXEMPLO 1" DA
PÁGINA 1008.

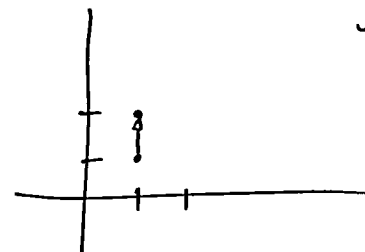
④ ENTENDA O
DIVERGENTE
PELA DEFINIÇÃO
NA PÁGINA 1010
E PELO EXEMPLO
LOGO ABAIXO
DA DEFINIÇÃO.

⑤ FAÇA OS EXERCÍCIOS
1 ATÉ 5 DA
PÁGINA 1013.

$$\int_{\partial R} x \cdot j \cdot (\overline{dx}, \overline{dy}) = \int_{C_1} x \cdot j \cdot (\overline{dx}, \overline{dy})$$

$$\int_{C_1} x \cdot j \cdot (\overline{dx}, \overline{dy}) =$$

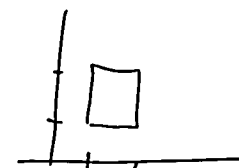
$$\oint_{\partial R_1}$$



$$\int_{\partial R_1} = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4}$$

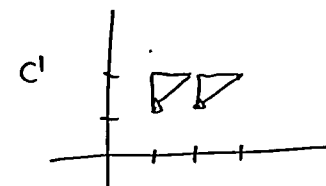
$$i = (\overline{1}, \overline{0})$$

$$x \cdot i$$



$$(\overline{a}, \overline{b}) \cdot (\overline{c}, \overline{d}) = ac + bd$$

$$(\overline{1}, \overline{0}) \cdot (\overline{c}, \overline{d}) = c$$



$$F(x, y)$$

$$x$$

QUE
S

① QUANDO VOCÊS
TIVEREM TERMINADO
DE ENTENDER O
MATERIAL DAS DUAS
ÚLTIMAS AULAS,
FAÇAM ISSO AQUI:

UM
REFERENCIAL
DO GRADIENTE.
COMEÇAVA
FUNÇÃO

GRADIENTE DE F

$$\overrightarrow{(F_x, F_y)}, \text{ ou: } \overrightarrow{(F_x, F_y)}, \text{ ou: } \overrightarrow{(F_x(x_0, y_0), F_y(x_0, y_0))} \dots$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) F$$

TAREFA SUPER CURTA
 $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$ É
DE... VEJA NA 9.1007
WART COMO ELE
FAZ ISSO.

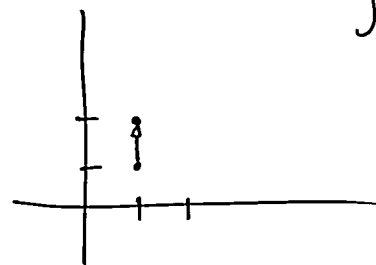
S, ELE USA UM TRUQUE
PAU: PRA ELE
 $= i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y}$ em 2D, e
 $= i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$ em 3D.

(a) ENTENDA A
DEFINIÇÃO DE
ROTACIONAL DO
LIVRO (P. 1007).

(b) ENTENDA O
"EXEMPLO 1" DA
PÁGINA 1008.

(c) ENTENDA O
DIVERGENTE
PELA DEFINIÇÃO
NA PÁGINA 1010
E PELO EXEMPLO
LOGO ABAIXO
DA DEFINIÇÃO.

(d) FAÇA OS EXERCÍCIOS
1 ATÉ 5 DA
PÁGINA 1013.



$$\oint_{\partial R_1}$$

$$\int_{\partial R} x \cdot j \cdot (\overrightarrow{dx}, \overrightarrow{dy}) = \int_{C_1} x \cdot j \cdot (\overrightarrow{dx}, \overrightarrow{dy}) + \dots$$

$$\int_{C_1} x \cdot j \cdot (\overrightarrow{dx}, \overrightarrow{dy}) =$$

$$\oint_{R_1} X(x, y)$$

$$\int_{\partial R_1} = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4}$$

$$i = \overrightarrow{(1, 0)}$$

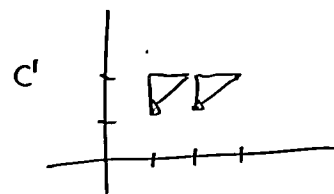
$$x \cdot i$$



$$\overrightarrow{(a, b)} \cdot \overrightarrow{(c, d)} = ac + bd$$

$$\overrightarrow{(1, 0)} \cdot \overrightarrow{(c, d)} = c$$

$$X(20, 30) = 20$$



$$F(x, y)$$

$$x$$

C4 23/MAIO/2023

INÍCIO: 16:15

A MAIORIA DOS EXEMPLOS DO TEOREMA DE GREEN "QUE INTERESSAM PROS FÍSICOS" VÃO SER MUITO MAIS FÁCEIS DE CALCULAR USANDO COORDENADAS POLARES. A GENTE SÓ VAI PRECISAR DAS COISAS SOBRE COORDENADAS POLARES QUE O STEWART APRESENTA NAS PÁGINAS 607 E 617, E UMAS POQUINHAS OUTRAS COISAS QUE ESTÃO ESPALHADAS PELO LIVRO E QUE EU VOU MOSTRAR DEPOIS.

O BÁSICO É ISSO AQUI: NÓS VAMOS IMAGINAR QUE x, y, r, θ SÃO QUATRO VARIÁVEIS QUE "VARIAM JUNTAS", E QUE OBEDECEM ISTO AQUI:

$$(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

SE PENSARMOS QUE CADA PONTO DE $\mathbb{R}^2$ TEM COORDENADAS x, y, r E θ ENTÃO PODEMOS REESCREVER O ENUNCIADO DO EXEMPLO 1 NA P. 607 COMO:

MARQUE NO PLANO (x, y) OS PONTOS CUJAS COORDENADAS (r, θ) SÃO:

a) $(r, \theta) = (1, \frac{5\pi}{4})$

b) $(r, \theta) = (2, 3\pi)$

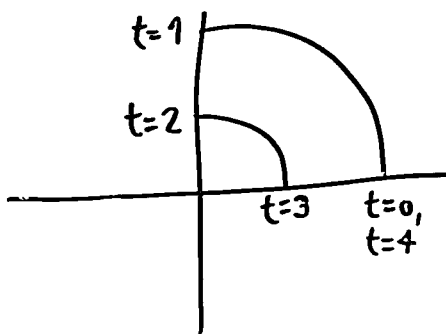
c) $(r, \theta) = (2, -\frac{2\pi}{3})$

d) $(r, \theta) = (-3, \frac{3\pi}{4})$

REPARE QUE O STEWART SÓ QUER QUE A GENTE VISUALIZE E DESENHE ESSES PONTOS - ELE NÃO QUER VALORES EXATOS PARA AS COORDENADAS (x, y) DELES.

EXERCÍCIO

ISTO AQUI É UM QUARTO DE UM BOLO DE RAIO (EXTERNO) 2; O RAIO DO BURACO NO MEIO DELE É 1.



DEFINA A PARAMETRIZAÇÃO ACIMA FORMALMENTE. VOCE VAI TER QUE COMPLETAR ISTO AQUI:

ENTRE	TEMOS
$t=0$ e $t=1$	$(r(t), \theta(t)) = (t+1, 0)$ $(x(t), y(t)) =$

$t=1$ e $t=2$	$(r(t), \theta(t)) =$ $(x(t), y(t)) =$
---------------	---

$t=2$ e $t=3$	$(r(t), \theta(t)) =$ $(x(t), y(t)) =$
---------------	---

$t=3$ e $t=4$	$(r(t), \theta(t)) =$ $(x(t), y(t)) =$
---------------	---

AVISO: SÃO 17:50 E NÃO VEIO NINGUÉM! VOU PRA CASA! FAÇAM ESSE EXERCÍCIO!

C4 29/MAIO/2023

INÍCIO: 14:10

AVISO: EU MUDEI OS DIAS DAS PROVAS PRA TODAS ELAS CAÍREM EM SEGUNDAS FEIRAS!

E ACHO QUE DAQUI A POUCO O PESSOAL QUE CUIDA DA ALOCAÇÃO DE SALAS VAI CONFIRMAR A SALA DAS NOSSAS AULAS DAS TERÇAS (QUE ERAM ÀS SEXTAS).

HOJE: MUDANÇA DE VARIÁVEIS NAS INTEGRAIS DUPLAS! O LIVRO EXPLICA ISSO NAS PÁGINAS 961-965; COMO EU ESTOU INTERESSADO PRINCIPALMENTE EM COORDENADAS POLARES EU VOU DIRETO PRA FÓRMULA DA PÁGINA 965.

LEMBRE QUE A MUDANÇA DE VARIÁVEL NA INTEGRAL SIMPLES ("UNPLA") TEM ESSA FÓRMULA AQUI:

$$\int \underbrace{f(g(x))}_{\frac{du}{dx}} \underbrace{g'(x)dx}_{du} = \int f(u) du$$

NA INTEGRAL DUPLA ISSO VIRA:

$$\iint f(u(x,y), v(x,y)) \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} dx dy = \iint f(u,v) du dv$$

O $\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}$ NÃO É EXATAMENTE A MATRIZ JACOBIANA... É O DETERMINANTE DA JACOBIANA.

NO CASO QUE NOS INTERESSA MAIS A MUDANÇA DE VARIÁVEL E ENTRE (x,y) E (r,θ) .

É BEM FÁCIL ESCREVER x E y COMO FUNÇÕES DE r E θ :

$$x = x(r,\theta) = r \cos \theta$$

$$y = y(r,\theta) = r \sin \theta$$

... MAS ESCREVER r E θ COMO FUNÇÕES DE x E y É NÉO CHATO.

ENTÃO:

$$x_r = \cos \theta \quad x_\theta = -r \sin \theta$$

$$y_r = \sin \theta \quad y_\theta = r \cos \theta$$

E:

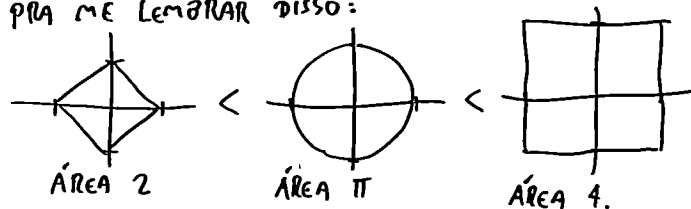
$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} &= x_r \cdot y_\theta - y_r \cdot x_\theta \\ &= (\cos \theta)(r \cos \theta) - (\sin \theta)(-r \sin \theta) \\ &= r(\cos \theta)^2 + r(\sin \theta)^2 \\ &= r((\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2) \\ &= r \end{aligned}$$

E AÍ:

$$\iint f(x(r,\theta), y(r,\theta)) \underbrace{\begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix}}_{=r} dr d\theta = \iint f(x,y) dx dy$$

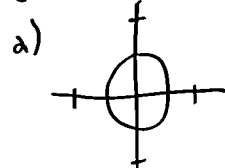
VAMOS TENTAR APLICAR ISSO A FIGURAS TIPO BOLOS E PEDACOS DE BOLO, COMO NA AULA PASSADA.

SABEMOS QUE UM BOLO DE RAIO 1 TEM ÁREA π ... EU USO ESSAS FIGURAS AQUI PRA ME LEMBRAR DISSO:

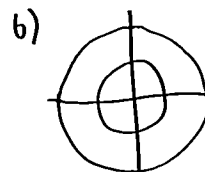


EXERCÍCIO 1

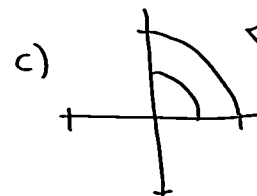
CALCULE AS ÁREAS DESTAS FIGURAS AQUI USANDO SÓ ARGUMENTOS GEOMÉTRICOS E OLHOMÉTRICOS:



↳ BOLO DE RAIO 1/2



↳ BOLO DE RAIO 1 COM FURO DE RAIO 1/2



↳ UM QUARTO DO BOLO DO ITEM (b)

EXERCÍCIO 2

AGORA CALCULE ESSAS ÁREAS DE NOVO USANDO INTEGRAIS. POR EXEMPLO, A ÁREA DO BOLO DE RAIO 1 PODE SER CALCULADA DESSE JEITO AQUI:

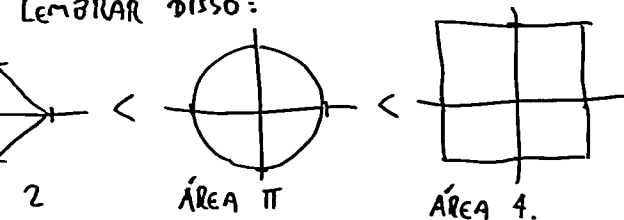
$$\begin{aligned} &\iint_{B_1} 1 dx dy \\ &= \iint_{B_1} f(x,y) dx dy \quad \leftarrow \text{SE DEFINIRMOS QUE } f(x,y)=1 \text{ PARA TODO } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ &= \iint_{B_1} f(x(r,\theta), y(r,\theta)) \cdot r dr d\theta \\ &= \int_{r=0}^1 \int_{\theta=0}^{2\pi} 1 \cdot r dr d\theta \end{aligned}$$

VOU DEIXAR VOCÊS TERMINAREM A CONTA!

$$\underbrace{y(r, \theta) \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix}}_{=r} dr d\theta = \iint f(x, y) dx dy$$

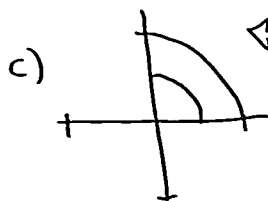
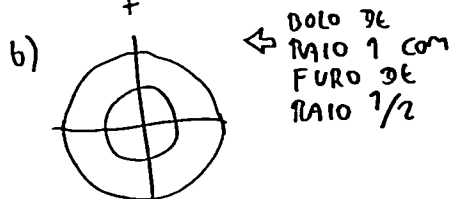
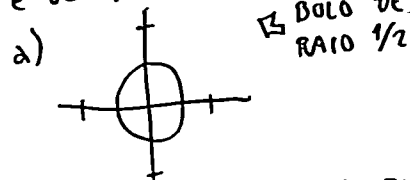
ENTÃO APLICAR ISSO A
TIPO BOLOS E PEDACOS
COMO NA AULA PASSADA.

QUE UM BOLO DE
TEM ÁREA π ...
ESSAS FIGURAS AQUI
LEMBRAR DISSO:



EXERCÍCIO 1

CALCULE AS ÁREAS DESTAS
FIGURAS AQUI USANDO SÓ
ARGUMENTOS GEOMÉTRICOS
E OLHOMÉTRICOS:

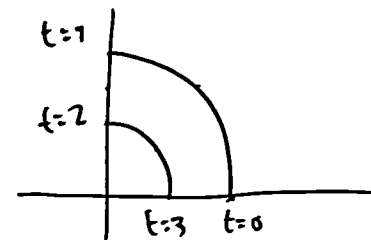
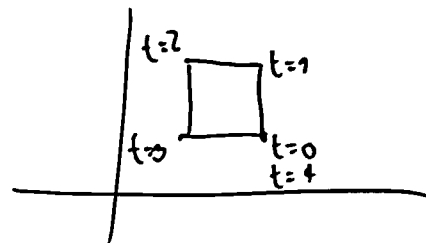


EXERCÍCIO 2

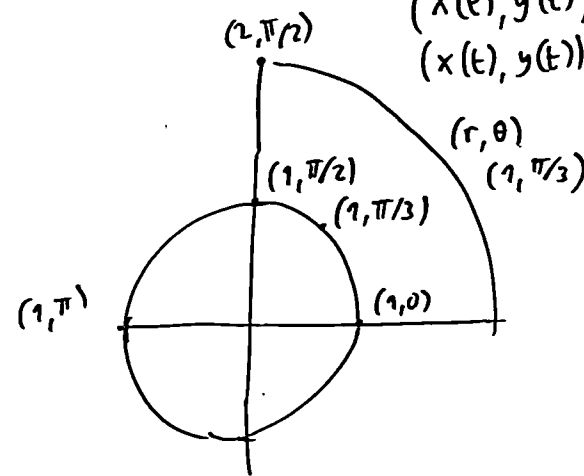
AGORA CALCULE ESSAS
ÁREAS DE NOVO USANDO
INTEGRAIS. POR
EXEMPLO, A ÁREA DO
BOLO DE RAIO 1
PODE SER CALCULADA
DESSE JEITO AQUI:

$$\begin{aligned} & \iint_{B_1} 1 dx dy \\ &= \iint_{B_1} f(x, y) dx dy \quad \leftarrow \text{SE DEFINIRMOS} \\ & \quad \text{QUE } f(x, y) = 1 \quad \text{PARA TODO } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ &= \iint_{B_1} f(x(r, \theta), y(r, \theta)) \cdot r dr d\theta \\ &= \int_{r=0}^1 \int_{\theta=0}^{2\pi} 1 \cdot r dr d\theta \end{aligned}$$

VÃO DEIXAR VOCÊS
TERMINAREM A
CONTA!



$$\begin{aligned} (x(t), y(t)) &= (t+2, 3t) \\ (x(t), y(t)) &= \end{aligned}$$



C4 30/MAIO/2023

INICIO: 16:09

E: C2 30/MAIO/2023 -
PRORROGAÇÃO DO TEMPO
DE PROVA! VOCÊS TÊM
ATÉ AS 17:00!

HOJE: ÚLTIMA AULA
ANTES DA PROVA DE C4!
REVISÃO E ALGUMAS DICAS
DO QUE VAI CAIR NA
PROVA!

DICA 1: A PROVA VAI
TER UMA QUESTÃO BEM
GRANDE - NO SENTIDO DE
"VALE MUITOS PONTOS" -
COM UM PROBLEMA
PARECIDO COM O DO DIA
19/MAIO, EM QUE

$P(x,y)$ e $Q(x,y)$ SÃO
POLINÔMIOS EM x e y ,
 R É UM RETÂNGULO COM
COORDENADAS SIMPLES,
E VOCÊS VÃO TER QUE
CALCULAR ESSA INTEGRAL
DE LINHA DAQUI:

$$\int_{\partial R} F \cdot (dx, dy); \text{ onde } F(x,y) = P(x,y) \cdot i + Q(x,y) \cdot j.$$

DICA 2: A PROVA
VAI TER UMA QUESTÃO
BEM PEQUENA DE
INTEGRAIS ITERADAS
EM COORDENADAS
CARTESIANAS NUMA
REGIÃO RETANGULAR.
ELA VAI TER ESSA
CARA AQUI: CALCULE

$$\iint_R F(x,y) dx dy,$$

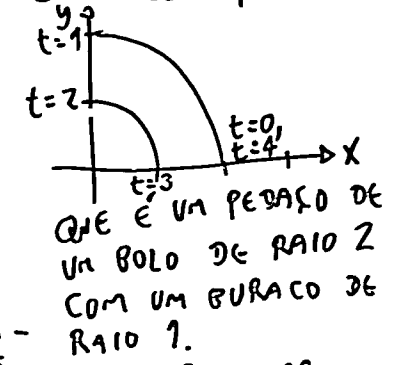
ONDE ESSE R É UM
RETÂNGULO SIMPLES.
ESSA QUESTÃO VAI
VALER POUCOS PONTOS
PORQUE
ELA VAI SER UMA
PREPARAÇÃO PARA A...

DICA 3: A PROVA
VAI TER UMA QUESTÃO
GRANDE NA QUAL B
É UMA REGIÃO TIPO
PEDAÇO DE BOLO - COMO
AS QUE EU APRESENTEI
NAS DUAS ÚLTIMAS AULAS -
E F VAI SER UMA FUNÇÃO
DE x e y QUE FICA
BEM SIMPLES QUANDO
É EXPRESSA COMO FUNÇÃO
DE r e θ . UM DOS ITENS
DESSA QUESTÃO VAI SER TIPO
CALCULE ISTO:

$$\iint_B F dr d\theta$$

MAS PRA VOCÊS
CONSEGUIREM
FAZER ESSA QUESTÃO
VOCÊS VÃO TER
QUE PARAMETRIZAR
A FRONTEIRA DESSA
REGIÃO USANDO
COORDENADAS
POLARES...

VAMOS REVER O
EXERCÍCIO PRINCIPAL
DE 23/MAIO, QUE
VOCÊS AINDA NÃO
CONSEGUIRAM
TERMINAR. SEJA B
ESTA REGIÃO,



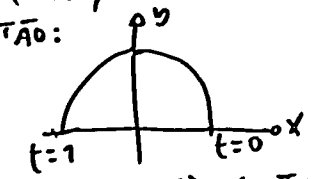
QUE É UM PEDAÇO DE
UM BOLO DE RAIO 2
COM UM BURACO DE
RAIO 1.

ENCONTREM UMA
FUNÇÃO DEFINIDA POR
CASOS QUE PERCORRA A
BORDA DA REGIÃO B
DO MODO QUE EU
DESCREVI ACIMA.

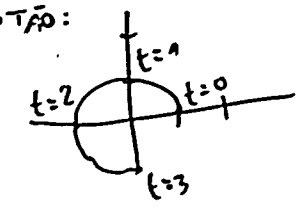
$$(x(t), y(t)) = \begin{cases} \end{cases}$$

$$(r(t), \theta(t)) = \begin{cases} \end{cases}$$

SE $(r(t), \theta(t)) = (2, \pi t)$
ENTÃO:



SE $(r(t), \theta(t)) = (1, \frac{\pi}{2}t)$
ENTÃO:



QUANDO $0 \leq t \leq 1$,
QUANDO $1 \leq t \leq 2$,
:

DICA: ENTÃO $t=2$ e $t=3$
 $(r(t), \theta(t)) = (1, 2t + \dots)$
QUEREMOS:

t	$\theta(t)$
2	$\pi/2$
3	0

AGU
OS VA
UM 3
DESCO
DE A
VEJ

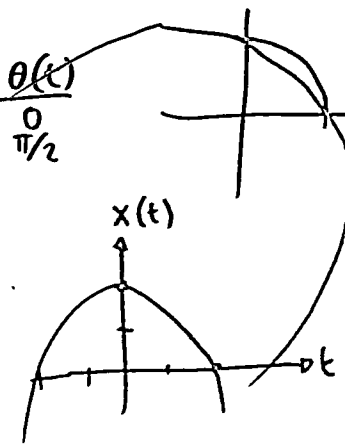
$$(x,y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

t	Δr
0	.
1/2	.
1	.

$$(r(t), \theta(t)) = (2, \frac{\pi}{2}t)$$

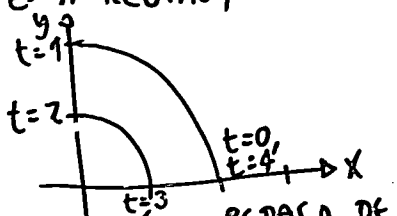
$$(x(t), y(t)) = (2-2t^2, t(t+...))$$

t	$x(t)$	$y(t)$	$r(t)$	$\theta(t)$
0	2	0	2	0
1	0	2	2	$\pi/2$



MAS PRA VOCÊS CONSEGUIREM FAZER ESSA QUESTÃO VOCÊS VÃO TER QUE PARAMETRIZAR A FRONTEIRA DESSA REGIÃO USANDO COORDENADAS POLARES...

VAMOS REVER O EXERCÍCIO PRINCIPAL DE 23/MAIO, QUE VOCÊS AINDA NÃO CONSEGUIRAM TERMINAR. SEJA B ESTA REGIÃO,



QUE É UM PEDAÇO DE UM BOLO DE RAIOS 2 COM UM BURACO DE RAIOS 1.

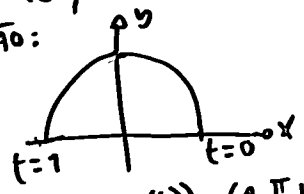
ENCONTREM UMA FUNÇÃO DEFINIDA POR CASOS QUE PERCORRA A BORDA DA REGIÃO B DO MODO QUE EU DESCREVI ACIMA.

$$(x(t), y(t)) = \begin{cases} \\ \\ \end{cases}$$

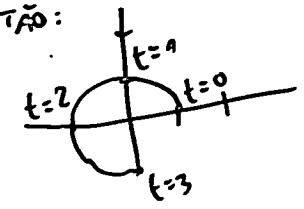
$$(r(t), \theta(t)) = \begin{cases} \\ \\ \end{cases}$$

QUANDO $0 \leq t \leq 1$,
QUANDO $1 \leq t \leq 2$,
...

Se $(r(t), \theta(t)) = (2, \pi t)$
ENTÃO:



Se $(r(t), \theta(t)) = (1, \frac{\pi}{2}t)$
ENTÃO:



DICA: ENTÃO $t=2$ e $t=3$,
 $(r(t), \theta(t)) = (1, at+b)$

QUEREMOS:

t	$\theta(t)$
2	$\pi/2$
3	0

$$(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

DICA: REVEJA OS EXERCÍCIOS DE "SEJA O SEU PRÓPRIO GEOGEBRA" QUE ESTÃO NO PRIMEIRO PDFZVHO DO CURSO!

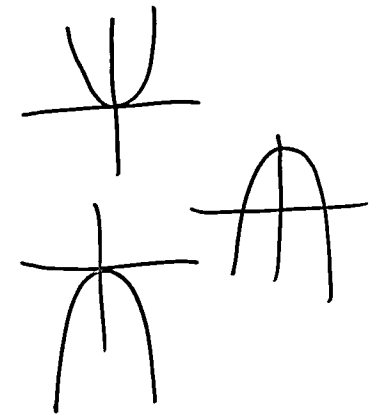
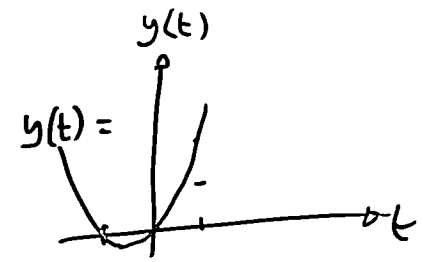
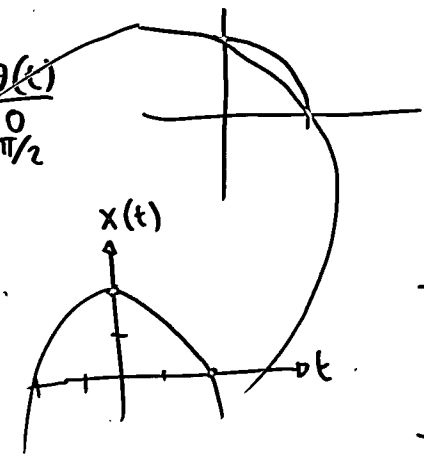
AQUI A GENTE QUER ENCONTRAR OS VALORES "CERTOS" DE a e b ... UM JEITO DE FAZER ISSO É DESCOBRIR O QUE OS VALORES DE a e b "QUEREM DIZER"... VEJA ESTA DICA:

t	Δr
0	.
1/2	.
1	.

$$(r(t), \theta(t)) = (2, \frac{\pi}{2}t)$$

$$(x(t), y(t)) = (2-2t^2, t(t+1))$$

t	$x(t)$	$y(t)$	$r(t)$	$\theta(t)$
0	2	0	2	0
1	0	2	2	$\pi/2$



C4 1º/JUL/2023

INÍCIO : 16:10

AULA DE REFORÇO!

NINGUÉM VEIO!

FUI EMBORA PRA
CASA ÀS 17:30.

C4 5/JUN/2023

INÍCIO: 14:20

HOJE: REVISÃO E
ALGUNS EXERCÍCIOS
DE TEOREMA DE
GREEN - OS DA
PÁGINA 1006
DO STEWART!

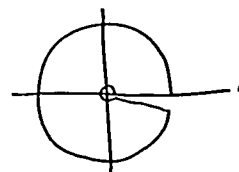
LEMBRE QUE O
TEOREMA DE
GREEN DIZ ISSO
AQUI: SE D É
UMA REGIÃO DO
PLANO, ENTÃO
$$\oint_{\partial D} (P dx + Q dy) = \iint_D (Q_x - P_y) dA$$

ELE ESTÁ EXPLICADO NA P. 1007
COM VÁRIAS NOTAS DIFERENTES.

O EXERCÍCIO 1 DA PÁGINA 1006
PEDE PRA GENTE CALCULAR ISTO AQUI
DE DOIS JEITOS DIFERENTES,
$$\oint_{\partial D} ((x-y) dx + (x+y) dy),$$

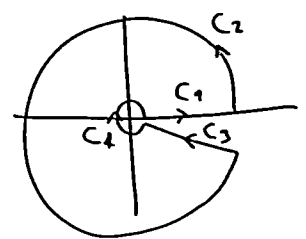
ONDE D É O CÍRCULO CENTRADO
EM (0,0) E DE RAIO 2.

DAÍ PRA PARAMETRIZAR O D
COMO UM PEDASO DE BOLO ASSM. ("D"):



ISTO AQUI É
UM PEDASO DE
BOLO COM UM FURTO
"PEQUENO" E Θ
INDO DE 0 ATÉ
"QUASE 2π"...

SE A GENTE FAZ
O "PEQUENO" TENDER
A 0 É O "QUASE 2π"
TENDER A 2π A GENTE
CHEGA A UM BOLO
INTEIRO DE RAIO 2,
SEM FURTO...
E SE A GENTE CHAMA
OS QUATRO PEDASOS
DE ∂D DE:



ENTÃO QUANDO
D' TENDER AO
BOLO INTEIRO
C1 E C3 SE
CANCELAM,
C4 VIRA UM
PONTO SÓ, E
C2 PODE SER
PARAMETRIZADA
DESSA FORMA:

$$(r(t), \theta(t)) = (2, t)$$

COM t INDO DE 0 ATÉ 2π.

E AÍ VAMOS TER:

$$(x(t), y(t)) = (r(t) \cos \theta(t), r(t) \sin \theta(t)) \\ = (2 \cos t, 2 \sin t)$$

E VAMOS TER:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} x(t) = \frac{d}{dt} (2 \cos t) = -2 \sin t \Rightarrow dx = -2 \sin t dt \\ \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} y(t) = \frac{d}{dt} (2 \sin t) = 2 \cos t \Rightarrow dy = 2 \cos t dt$$

VOU COMEÇAR CALCULANDO
ISSO AQUI,

$$\int_{\partial D} x dx$$

QUE É BEM MAIS SIMPLES
QUE O EXERCÍCIO 1 DA
PÁGINA 1006, E PODE
SER VIR COMO PREPARAÇÃO
PRO EXERCÍCIO 1.

A GENTE VIU QUE

$$\int_{\partial D} = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4} \\ = \int_{C_2} + \underbrace{(\int_{C_1} + \int_{C_3})}_0 + \underbrace{\int_{C_4}}_0 \\ = \int_{C_2} \\ \text{E } \int_{C_2} = \int_{(r,\theta)=(2,0)}^{(r,\theta)=(2,2\pi)} \dots$$

EU PUS ASPAS NO "="
PORQUE NÃO TENHO CERTeza
DA NOTASÃO QUE O LIVRO
USA PRA ISSO... VOU USAR
ESSA NOTASÃO IMPROVISADA
UM POQUINHO - ELA QUER
DIZER "A TRAJETÓRIA MAIS
SIMPLES INDO DE
(r,θ)=(2,0) ATÉ
(r,θ)=(2,2π)" - E DEPOIS
VOU DIZER QUAL NOTASÃO
O LIVRO USA PRA ISSO.

ÁREA DE
RASCUNHO:

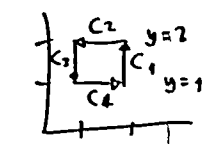
$$x \cdot j \cdot (\overrightarrow{dx}, \overrightarrow{dy}) \\ = x \cdot (0,1) \cdot (\overrightarrow{dx}, \overrightarrow{dy}) \\ = x \cdot dy \\ \int_{C_1} x \cdot j \cdot (\overrightarrow{dx}, \overrightarrow{dy}) \\ = \int_{C_1} x \cdot dy \\ = \int_{C_1} 2 dy = 2 \int_{C_1} dy \\ \int x^2 \frac{dx}{1} = \int x^2$$



$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) \cdot (\overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}) = ac + bd \\ x(t) = 3-t \\ y(t) = 2$$

$$(\overrightarrow{dx}, \overrightarrow{dy}) \\ \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) dt$$

$$j = \overrightarrow{(1,0)} \quad \int \dots dy \\ \int \dots dt \\ \oint_{\partial R} \\ \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4}$$



$$x(t) = 42t + 200 \\ \int_{t=1}^{t=2} x \cdot dy \\ = \int_{t=1}^{t=2} x(t) \cdot dy \\ = \int_{t=1}^{t=2} (42t + 200) dy \\ =$$

$$\frac{dy}{dt}$$

PAR CALCULAR
OVI,

X

BEM MAIS SIMPLES
EXERCÍCIO 1 DA
A 1006, E POIS
R COMO PREPARAÇÃO
EXERCÍCIO 1.

ENTE VIU QUE

$$= \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4}$$

$$= \int_{C_2} + \underbrace{\left(\int_{C_1} + \int_{C_3} \right)}_0 + \int_{C_4}$$

$$= \int_{C_2}$$

$$\int_{C_2} \text{ " " } \int_{(r,\theta)=(2,0)}^{(r,\theta)=(2,2\pi)}$$

EU PUS ASPAS NO " " PORQUE NÃO TENHO CERTeza DA NOTAÇÃO QUE O LIVRO USA PRA ISSO... VOU USAR ESSA NOTAÇÃO IMPROVADA UM POQUINHO - ELA QUER DIZER "A TRAJETÓRIA MAIS SIMPLES indo de $(r,\theta)=(2,0)$ ATÉ $(r,\theta)=(2,2\pi)$ " - E DEPOIS VOU DIZER QUAL NOTAÇÃO O LIVRO USA PRA ISSO.

$\theta(t), r(t)$ e $\theta(t)$
os $t, 2 \sin t$

$$\cos t = -2 \sin t \Rightarrow dx = -2 \sin t dt$$

$$\sin t = 2 \cos t \Rightarrow dy = 2 \cos t dt$$

ÁREA DE
RASCUNHO:

$$x \cdot j \cdot (\overrightarrow{dx}, \overrightarrow{dy})$$

$$= x \cdot (\overrightarrow{0,1}) \cdot (\overrightarrow{dx}, \overrightarrow{dy})$$

$$= x \cdot dy$$

$$\int_{C_1} x \cdot j \cdot (\overrightarrow{dx}, \overrightarrow{dy})$$

$$= \int_{C_1} x \cdot dy$$

$$= \int_{C_1} 2 dy = 2 \int_{C_1} dy$$

$$\int x^2 \frac{dx}{1} = \int x^2$$



$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) \cdot (\overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}) = ac + bd$$

$$x(t) = 3 - t$$

$$y(t) = 2$$

$$(\overrightarrow{dx}, \overrightarrow{dy})$$

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) dt$$

$$j = (\overrightarrow{1}, \overrightarrow{0})$$

$$\int \dots dy$$

$$\int \dots dt$$

$$\oint_{\partial R}$$

$$\int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4}$$

$$\int$$

$$x(t) = 42t + 200$$

$$\int_{t=1}^{t=2} x \cdot dy$$

$$= \int_{t=1}^{t=2} x(t) \cdot dy$$

$$= \int_{t=1}^{t=2} (42t + 200) dy$$

$$dy = \frac{dy}{dt} dt = \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) dt$$

$$\frac{dy}{dt} dt = \left(\frac{d}{dt} (99t + 32) \right) dt$$

$$[TFC2] = \left(\int_{t=a}^{t=b} f'(t) dt = f(t) \Big|_{t=a}^{t=b} \right)$$

$$[TFC2] \left[f(t) = \frac{t^2}{2} \right]$$

$$\int_{t=a}^{t=3} 1 dt$$

$$\int_{t=2}^{t=3} -2 + t dt = \underbrace{\int_{t=2}^{t=2} -2 dt}_0 + \int_{t=2}^{t=3} t dt$$

$$= \int_{t=2}^{t=3} t dt$$

C4 5/JUN/2023

INÍCIO: 14:20

HOJE: REVISÃO E
ALGUNS EXERCÍCIOS
DE TEOREMA DE
GREEN - OS DA
PÁGINA 1006
DO STEWART!

LEMBRE QUE O
TEOREMA DE
GREEN DIZ ISSO
AQUI: SE D É
UMA REGIÃO DO
PLANO, ENTÃO

$$\oint_{\partial D} (P dx + Q dy) = \iint_D Q_x - P_y dA$$

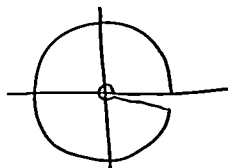
ELE ESTÁ EXPLICADO NA P. 1001
COM VÁRIAS NOTAS DIFERENTES.

O EXERCÍCIO 1 DA PÁGINA 1006
PEDE PRA GENTE CALCULAR ISTO AQUI
DE DOIS JEITOS DIFERENTES,

$$\oint_{\partial D} ((x-y) dx + (x+y) dy),$$

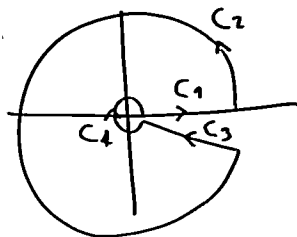
ONDE D É O CÍRCULO CENTRADO
EM (0,0) E DE RAIO 2.

DAÍ PRA PARAMETRIZAR O D
COMO UM PEDACO DE BOLO ASSIM ("D"):



ISTO AQUI É
UM PEDACO DE
BOLO COM UM FURTO
"PEQUENO" E θ
INDO DE 0 ATÉ
"QUASE 2π "...

SE A GENTE FAZ
O "PEQUENO" TENDER
A 0 E O "QUASE 2π "
TENDER A 2π A GENTE
CHEGA A UM BOLO
INTEIRO DE RAIO 2,
SEM FURTO...
E SE A GENTE CHAMA
OS QUATRO PEDACOS
DE ∂D DE:



ENTÃO QUANDO
D' TENDE AO
BOLO INTEIRO
 C_1 E C_3 SE
CANCELAM,
 C_4 VIRA UM
PONTO SÓ, E

C_2 PODE SER
PARAMETRIZADA
DESSA FORMA:

$$(r(t), \theta(t)) = (2, t)$$

COM t INDO DE 0 ATÉ 2π .

E AÍ VAMOS TER:

$$(x(t), y(t)) = (r(t) \cos \theta(t), r(t) \sin \theta(t)) \\ = (2 \cos t, 2 \sin t)$$

E VAMOS TER:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} x(t) = \frac{d}{dt} (2 \cos t) = -2 \sin t \Rightarrow dx = -2 \sin t dt$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} y(t) = \frac{d}{dt} (2 \sin t) = 2 \cos t \Rightarrow dy = 2 \cos t dt$$

VOU COMEÇAR CALCULANDO
ISSO AQUI,

$$\int_{\partial D} x dx$$

QUE É BEM MAIS SIMPLES
QUE O EXERCÍCIO 1 DA
PÁGINA 1006, E PODE
SER VIR COMO PREPARAÇÃO
PRO EXERCÍCIO 1.

A GENTE VIU QUE

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} &= \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4} \\ &= \int_{C_2} + \underbrace{(\int_{C_1} + \int_{C_3})}_0 + \underbrace{\int_{C_4}}_0 \\ &= \int_{C_2} \end{aligned}$$

$$E \int_{C_2} = \int_{(r,\theta)=(2,0)}^{(r,\theta)=(2,2\pi)} \dots$$

EU PUS ASPAS NO "="
PORQUE NÃO TENHO CERTEZA
DA NOTASÃO QUE O LIVRO
USA PRA ISSO... VOU USAR
ESSA NOTASÃO IMPROVISADA
UM POQUINHO - ELA QUER
DIZER "A TRAJETÓRIA MAIS
SIMPLES INDO DE
 $(r,\theta)=(2,0)$ ATÉ
 $(r,\theta)=(2,2\pi)$ " - E DEPOIS
VOU DIZER QUAL NOTASÃO
O LIVRO USA PRA ISSO.

TEMOS:

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} x dx &= \int_{C_2} \underbrace{x}_{r \cos \theta} \underbrace{dx}_{\frac{dx}{d\theta} d\theta} \\ &= \int_{C_2} \frac{d}{d\theta} (r \cos \theta) d\theta \\ &= \int_{(r,\theta)=(2,0)}^{(r,\theta)=(2,2\pi)} \end{aligned}$$

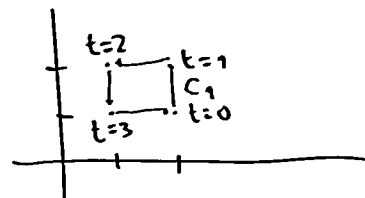
VOU TERMINAR
ISSO AMANHÃ!

C4 6/JUNHO/2023

INÍCIO: 16:20

HOJE: ÚLTIMA AULA
"DE VERDADE" ANTES DA
P1... AMANHÃ TEM UMA
AULA DE REFORÇO E
A P1 VAI SER NA
SEGUNDA!

HOJE:
AULA DE DÚVIDAS
SEM MATÉRIA NOVA!



QUEREMOS $y(t)$
QUE OBEDEÇA:

$$y(2)=2$$

$$y(3)=3$$

$$\text{Se } y = a + (t-b)c,$$

$$\text{ALÍAS, } y = a + (t-2)c,$$

$$\text{QUANDO } t=2 \quad y=a$$

$$\text{E QUANDO } t=3 \quad y=a+c$$

$$\text{ENTÃO: } y = 2 + (t-2)(-1)$$

$$\int_{x=2}^{x=7} 10 \, dx$$

$$[TFC2] = \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(x) \, dx = f(x) \right)_{x=a}^{x=b}$$

$$[TFC] \left[\begin{matrix} a:=2 \\ b:=7 \\ f(x):=10x \\ f'(x):=10 \end{matrix} \right] = \left(\int_{x=2}^{x=7} 10 \, dx = 10x \right)_{x=2}^{x=7}$$

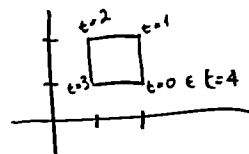
$$10x \Big|_{x=2}^{x=7} = 70 - 20 = 50$$

VAMOS PARAMETRIZAR
 C_1 DESSE JEITO:

$$(x(t), y(t)) = (2, t+1)$$

INÍCIO DE $t=0$ ATÉ $t=1$.

$$\int_{C_1} dy = \int_{t=0}^{t=1} \frac{dy}{dt} dt = \int_{t=0}^{t=1} 1 \, dt = 1$$



$t=0$ até $t=1$

$$(x(t), y(t)) = (2, t+1)$$

$t=1$ até $t=2$

$$(x(t), y(t)) = (3-t, 2)$$

$t=2$ até $t=3$

$$(x(t), y(t)) = (1, 4-t)$$

$t=3$ até $t=4$

$$(x(t), y(t)) = (t-2, 1)$$

$$\int_{C_2} = \int_{(x,y)=(2,2)}^{(x,y)=(1,2)}$$

$$\int_{C_2} \overrightarrow{(0, 1.5)} \, dy$$

$$\int_{t=1}^{t=2} \overrightarrow{(0, 1.5)} \frac{dy}{dt} \, dt$$

$$= \int_{t=1}^{t=2} \overrightarrow{(0, 1.5)} \cdot (-1) \, dt$$

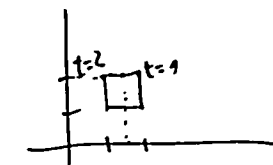
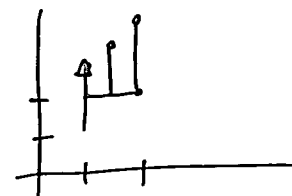
$$= \int_{t=1}^{t=2} \overrightarrow{(0, -1.5)} \, dt$$

$$= \overrightarrow{(0, -1.5)} \cdot t \Big|_{t=1}^{t=2} = \int_{x=2}^{x=b} (dx + dy) [d-c] \, dx = \dots$$

$$= \overrightarrow{(0, -3)} - \overrightarrow{(0, -1.5)} \int_{x=2}^{x=b} \left[\frac{d^2 - c^2}{2} \right] \, dx = \dots$$

$$= \overrightarrow{(0, -1.5)}$$

$$\int_{x=20}^{x=42} \int_{y=33}^{y=200}$$



$$t=1.5 \quad (x, y) = (1.5, 2)$$

$$F(x, y) = x \cdot y$$

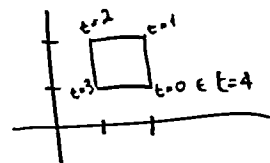
$$F(1.5, 2) = 1.5 \cdot (0, 1) = \overrightarrow{(0, 1.5)}$$

PARA PARAMETRIZAR
C, DESTE JEITO:

$$(x(t), y(t)) = (2, t+1)$$

INDO DE $t=0$ ATÉ $t=1$.

$$\int_{C_1} dy = \int_{t=0}^{t=1} \frac{dy}{dt} dt = \int_{t=0}^{t=1} 1 dt = 1$$



$t=0$ até $t=1$

$$(x(t), y(t)) = (2, t+1)$$

$t=1$ até $t=2$

$$(x(t), y(t)) = (3-t, 2)$$

$t=2$ até $t=3$

$$(x(t), y(t)) = (1, 4-t)$$

$t=3$ até $t=4$

$$(x(t), y(t)) = (t-2, 1)$$

$$\int_{C_2} = \int_{(x,y)=(1,2)}^{(x,y)=(2,2)}$$

$$\int_{C_2} (0, 1.5) dy$$

$$\int_{t=1}^{t=2} (0, 1.5) \frac{dy}{dt} dt$$

$$= \int_{t=1}^{t=2} (0, 1.5) \cdot (-1) dt$$

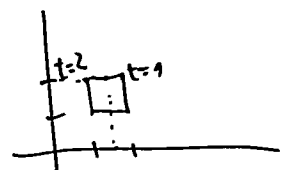
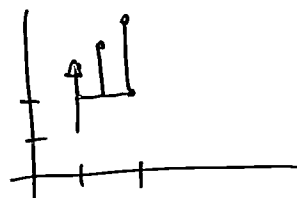
$$= \int_{t=1}^{t=2} (0, -1.5) dt$$

$$= (0, -1.5) \cdot t \Big|_{t=1}^{t=2} = \int_{x=2}^{x=3} (0, -1.5) dx = \dots$$

$$= (0, -3) - (0, -1.5) = \int_{x=2}^{x=3} \left[\frac{d^2 - c^2}{2} \right] dx = \dots$$

$$= (0, -1.5)$$

$$\int_{x=20}^{x=42} \int_{y=33}^{y=200}$$



$$t=1.5 \quad (x, y) = (1.5, 2)$$

$$F(x, y) = x \cdot j$$

$$F(1.5, 2) = 1.5 \cdot (0, 1) = (0, 1.5)$$

$$F(x, y) = (2x^2 + y, y)$$

$$R = \int \square$$

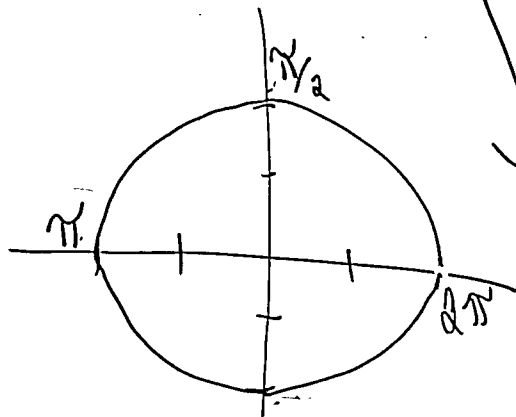
$$\partial R = \int_{C_1} \int_{C_2} \int_{C_3} \int_{C_4}$$

$$\oint_{\partial R} F(x, y) \cdot (dx, dy)$$

C4 7/JUNHO/2023

HOJE: AULA DE
REFORÇO!!!

1) Intervalo onde C está parametrizado
vari de $0 \leq t \leq 2\pi$



$$\int_0^{2\pi} \underbrace{4(\underbrace{\sin^2(t) + \cos^2(t)}_1)}_4 dt = 8\pi$$

$\frac{d(x-y)}{dt} \quad (x-y)(t) = x(t) - y(t)$

$$\oint_C (x-y) dx + (x+y) dy$$

$$\left[\begin{array}{l} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = 2\sin t \\ \frac{dx}{dt} = -\sin t \cdot 2 \\ \frac{dy}{dt} = 2\cos t \\ dx = 2 \cdot (-\sin(t)) \cdot dt \\ dy = 2 \cdot (\cos(t)) \cdot dt \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} & \int_{t=0}^{t=2\pi} (x(t) - y(t)) dx + (x(t) + y(t)) dy \\ & \int_0^{2\pi} (2\cos(t) - 2\sin(t)) dx + (2\cos(t) + 2\sin(t)) dy \\ & \int_0^{2\pi} (2\cos(t) - 2\sin(t)) \cdot (-2 \cdot \sin(t)) dt \\ & \int_0^{2\pi} (-4 \cos(t) \sin(t) + 4 \sin^2(t)) dt \end{aligned}$$

parametrizado

$$\cos^2(t)) dt = 8\pi$$

$$dx + (x + y) dy$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos t \\ \sin t \\ \sin t \cdot 2 \\ \cos t \\ (-\sin(t)) \cdot dt \\ (\cos(t)) \cdot dt \end{array} \right]$$

$$\int_{t=0}^{t=2\pi} (x(t) - y(t)) dx + (x(t) + y(t)) dy$$

$$\int_0^{2\pi} (2\cos(t) - 2\sin(t)) dx + (2\cos(t) + 2\sin(t)) dy$$

$$\int_0^{2\pi} (2\cos(t) - 2\sin(t)) \cdot (-2 \cdot \sin(t)) dt$$

$$\int_0^{2\pi} (-4 \cos(t) \sin(t) + 4 \sin^2(t)) dt$$

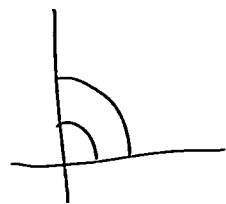
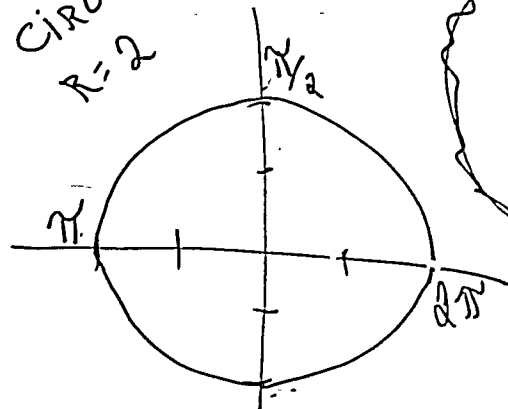
$$\int_0^{2\pi} (2\cos(t) + 2\sin(t)) \cdot (2\cos(t)) dt$$

$$\int_0^{2\pi} 4\cos^2(t) + 4\sin(t) \cos(t) dt$$

C4 7/JUNHO/2023

HOJE: AULA DE
REFORÇO!!!

CÍRCULO
 $R=2$



O intervalo onde C está parametrizado
vai de $0 \leq t \leq 2\pi$

T. GREEN

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

$$\oint_C \underbrace{(x-y)}_{P(x,y)} dx + \underbrace{(x+y)}_{Q(x,y)} dy$$

$$\iint_D (1+0-(+0-1)) dA$$

$$\iint_D 2 dA = 2 \iint_D 1 dA$$

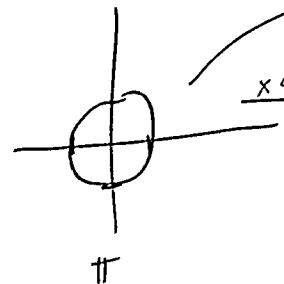
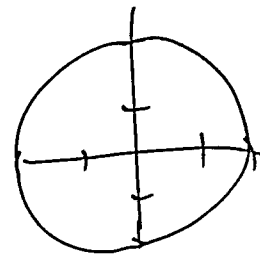
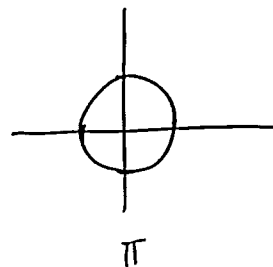
$$\iint_D$$

$$\int_0^{2\pi} x dx$$

$$\int_0^{2\pi}$$

$$\iint_D$$

$$\iint_D 1 dA$$



esta parametrizado

T. GREEN

$$Q dy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

$$(x, y) \quad Q(x, y)$$

$$0 - (+0 - 1)) dA$$

$$A = 2 \iint_D 1 dA$$

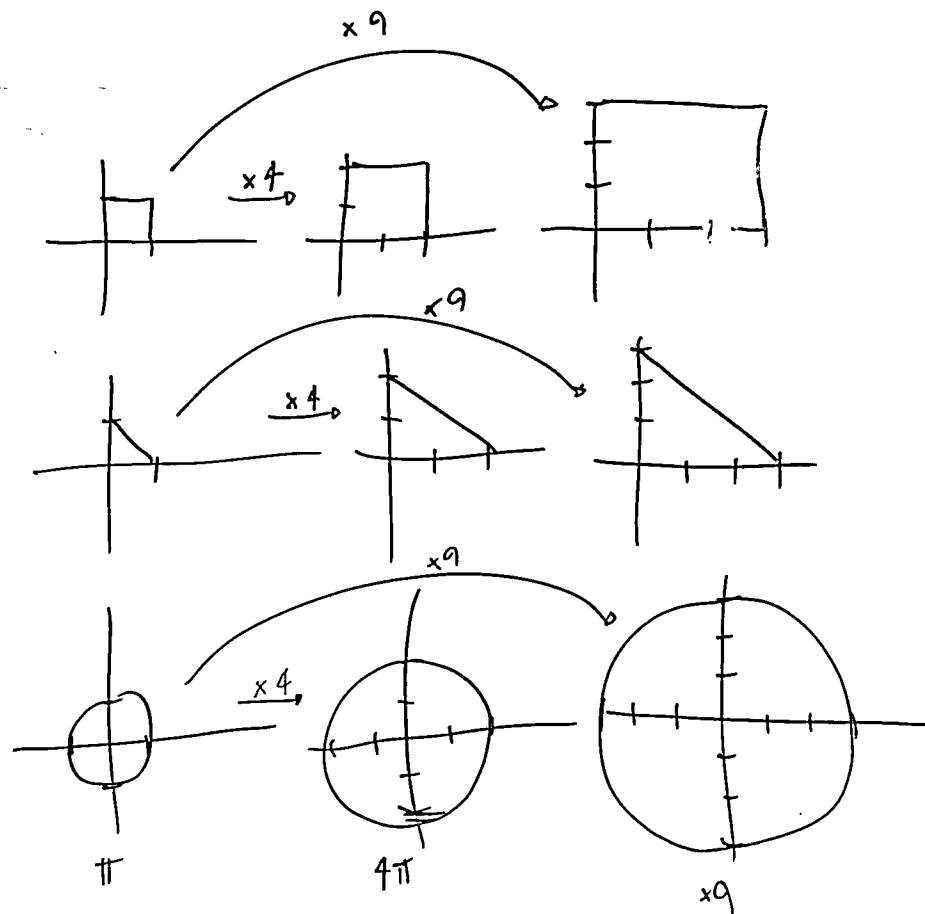
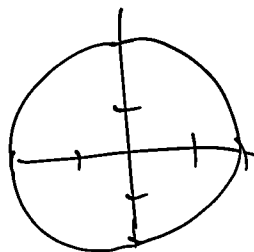
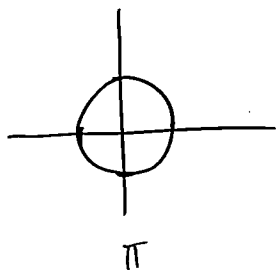
$$\iint_D$$

$$\int_0^{2\pi} x dx$$

$$\int_0^{2\pi}$$

$$\iint_D$$

$$\iint_D 1 dA$$



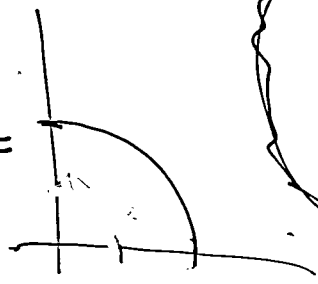
C4 7/JUNHO/2023

HOJE: AULA DE
REFORÇO!!!

O intervalo onde C está parametrizado
vai de $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

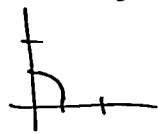
CIRCULO
 $R=2$

① $D_1 =$



② Área $D = \iint_D 1 dA = \pi$

③ $D_2 =$



④ Área $D_2 = \iint_{D_2} 1 dA = \frac{1}{4} \pi$

⑤ Definição temporária p/
parametrização entre $\theta=0$ até $\theta=\frac{\pi}{2}$
de raio 2.

$$(r \cdot \cos \theta, r \cdot \sin \theta) = (2 \cdot \cos \theta, 2 \cdot \sin \theta)$$

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

→ T. GREEN

∫

① Se $y(x) = \sin x$
então $y'(x) = \cos x$

② Se $y(x) = x$
então $y'(x) = 1$

$f(t) = 42t$
 $a(t)b(t) = 99t$ ③ DIGAMOS QUE
 $D =$

$(x,y) =$

DEFINIÇÕES (TEMPORÁRIAS):

- ① $D =$
- ② $P =$
- $Q =$
- $x(t) = 2 \cos t$
- $y(t) =$
- $\theta =$
- $r =$
- $x(t) = \cos t$

C4 12/Junho/2023

Início: 14:10

Hoje: P1!

$A \times C \hookrightarrow A$

$\downarrow$

$B \times C \hookrightarrow B$

C4 13/JUNHO/2023

INÍCIO: 16:20

EM 22/MAIO EU PASEI
UNS EXERCÍCIOS DE OPERADORES
DIFERENCIAIS PRA VOCÊS MAS
VOCÊS ACABARAM SÓ TIRANDO
DÚVIDAS SOBRE ASSUNTOS
ANTERIORES... VOU COPIAR
ELAS AQUI.

- a) ENTENDA A DEFINIÇÃO
DE ROTACIONAL DO LIVRO
(P. 1007)
- b) ENTENDA O "EXEMPLO 1"
DA PÁGINA 1008.
- c) ENTENDA O DIVERGENTE
PELA DEFINIÇÃO NA
PÁGINA 1010 E PELO
EXEMPLO LOUO ABAIXO DA
DEFINIÇÃO.
- d) FAÇA OS EXERCÍCIOS
1 ATÉ 5 DA PÁGINA 1013
... ALIÁS, FAÇAM SÓ O 1 E O 2
DA PÁGINA 1013 AGORA E
DEPOIS PULEM PROS EXERCÍCIOS
9, 10 E 11.
PRA FAZER O 9, O 10 E O 11
VOCÊS VÃO TER QUE USAR O
CHUTAR-E-TESTAR PRA
DESCOBRIR CAMPOS VETORIAIS
QUE SE PAREÇAM COM ESSES
DESENHOS.

O LANCE É QUE
SE A GENTE
ENTENDE OPERADORES
DIFERENCIAIS BEM
A GENTE CONSEGUE
ENTENDER GEOMETRI-
CAMENTE/VISUALMENTE/
FISICAMENTE O QUE O
TEOREMA DE GREEN
"QUER DIZER"... ELE
É UMA VERSÃO 2D
DO TEOREMA DO
DIVERGENTE.

DIGAMOS QUE
 $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \dots$
NOTAÇÃO:
 $F_x = \frac{\partial}{\partial x} F = \partial_x F$
 $F_y = \partial_y F$
 $\nabla F = (\overline{F_x, F_y})$
 $= (\partial_x F, \partial_y F)$
 $= (\partial_x, \partial_y) F$

$\nabla = (\partial_x, \partial_y)$
ALIÁS, O STEWART USA
ISTO AQUI:
 $\nabla = i\partial_x + j\partial_y$ em 2D e
 $\nabla = i\partial_x + j\partial_y + k\partial_z$ em 3D.

LEMBRE QUE

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfi + cdh - ceg - afh - bdi$$

$$\begin{vmatrix} a & b & a \\ d & e & f \\ g & h & g \end{vmatrix}$$

ESSES PRODUTOS CONTAM
POSITIVAMENTE, E

$$\begin{vmatrix} a & b & -a \\ d & e & -f \\ g & h & -g \end{vmatrix}$$

ESSES CONTAM
NEGATIVAMENTE.

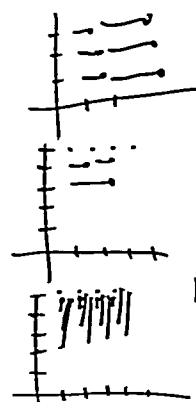
d) 1) $F(x, y, z) = xyz i - x^2 y k$

$$\begin{aligned} \nabla \times F &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ xyz & 0 & -x^2 y \end{vmatrix} = i \partial_y(-x^2 y) + j \partial_z(xyz) + k \partial_x 0 \\ &= -k \partial_y(xyz) - i \partial_z(0) - j \partial_x(-x^2 y) \\ &= i(-x^2) + j(xy) + k \cdot 0 \\ &= -x^2 i + (xy + 2xy)j - xz k \\ &= -x^2 i + 3xy j - xz k \end{aligned}$$

$$F(x, y) = \overline{(x, 0)}$$

$$F(x, y) = \overline{(s-y, 0)}$$

$$F(x, y) = \overline{(0, s-y)}$$



$\text{div } F =$
 $\text{rot } F =$

PRÓXIMA AULA:
FORMAS VETORIAIS
DO TEOREMA DE
GREEN - PÁGINAS
1011 E 1012
DO STEWART!

C2 19/JUN/2023

INÍCIO: 14:18

HOJE NÓS VAMOS VER
MAIS COISAS SOBRE A
FORMA VETORIAL DO
TEOREMA DE GREEN,
QUE É ESSA AQUI:

$$\oint F \cdot dr = \iint_D (\text{rot } F) \cdot k \, dA$$

QUE APARECE NA PÁGINA 1012
DO LIVRO...

PARA ENTENDER DIREITO ELA -
ELA VAI SER UMA PREPARAÇÃO
PROS TEOREMAS DE GREEN,
GAUSS E STOKES EM $\mathbb{R}^3$! -
A GENTE VAI TER QUE REVER
UMAS COISAS SOBRE DETERMINANTES...

VOCÊ(S) CONSEGU(M) CALCULAR
ESSES DETERMINANTES AQUI NO
OLHO? EU VOU USAR ESSA NOTACÃO
AQUI, QUE NÃO É PADRÃO...

Se $\vec{U} = (u_1, u_2, u_3)$, ENTÃO $[\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$

$\vec{V} = (v_1, v_2, v_3)$
 $\vec{W} = (w_1, w_2, w_3)$

$[\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$

E SE $\vec{U} = (u_1, u_2)$ ENTÃO $[\vec{U}, \vec{V}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$

$[\vec{U}, \vec{V}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$

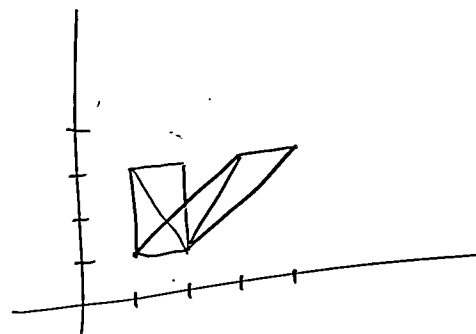
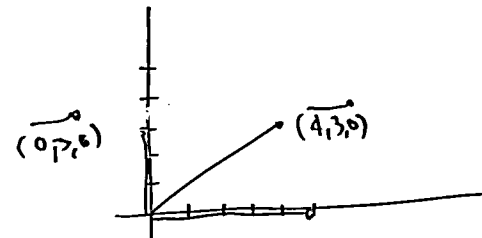
REVISÃO DE DETERMINANTES EM $\mathbb{R}^2$
(MP637)...

NAS DUAS FIGURAS
DESSA PÁGINA
TEREMOS

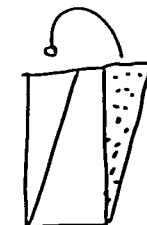
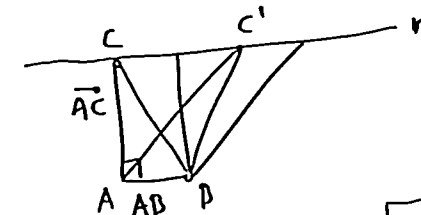
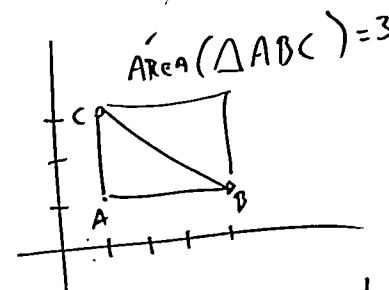
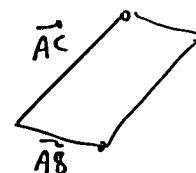
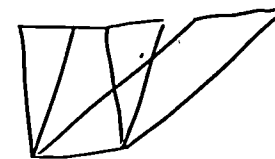
$[\vec{AB}, \vec{AC}]$
 $= [\vec{AB}, \vec{AC}]$
 $= |[\vec{AB}, \vec{AC}]|$

VOCÊ CONSEGUE
CALCULAR ESSES
DETERMINANTES
PENSANDO SO
EM TERMOS DE
ÁREAS?

$k = (0, 0, 1)$
 $\alpha = 4$
 $\alpha k \cdot k = 4 = \alpha$
 $(0, 0, 4) \cdot (0, 0, 1)$



Área $(\vec{AB}, \vec{AC})$



$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

CA 20/JUNHO/2023

HOJE VAMOS FAZER OS
EXERCÍCIOS 21 E 22
DA PÁGINA 1013 DO

STEWART... OS ENUNCIADOS
DELES SÃO:

(21) MOSTRE QUE QUALQUER
CAMPO VETORIAL DA
FORMA

$$F(x, y, z) = f(x)i + g(y)j + h(z)k$$

ONDE f, g E h SÃO DIFERENCIÁVEIS
E IRROTACIONAL - OU SEJA,

$$(\text{ROT } F)(x, y, z) = 0$$

EM TODO PONTO.

(22) MOSTRE QUE QUALQUER CAMPO
VETORIAL DA FORMA

$$F(x, y, z) = f(y, z)i + g(x, z)j + h(x, y)k$$

E INCOMPRESSÍVEL - OU SEJA,

$$(\text{DIV } F)(x, y, z) = 0.$$

DICA: VOCÊ PODE COMEÇAR COM f, g, h
POLINOMIAIS.

$$\partial_x F = ?$$

$$\partial_y F = ?$$

$$\partial_z F = ?$$

DEPOIS: REVISÃO DE
DETERMINANTES EM
2D E 3D E DO
PRODUTO CRUZADO (X)
EM 3D!

ACESSSE ESSES LINKS
NA PÁGINA DO CURSO:

MPG37

$$\text{ÁREA}(\vec{AB}, \vec{AC})$$

$$\text{ÁREA}(\Delta ABC)$$

$$\text{ÁREA}(\vec{AB}, \vec{AC}')$$

$$\text{ÁREA}(\Delta ABC')$$

C4 26/JUN/2023

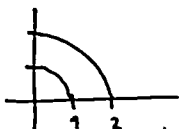
INÍCIO: 14:10!

HOJE: INTRODUÇÃO ÀS
VERSÕES 3D DOS TEOREMAS
DE GREEN, GAUSS, E
STOKES! COORDENADAS
ESFÉRICAS! O ROTACIONAL
COMO MEDIDA DE ALGO
QUE RODA! O DIVERGENTE
COMO UMA MEDIDA DE
EXPANSÃO!

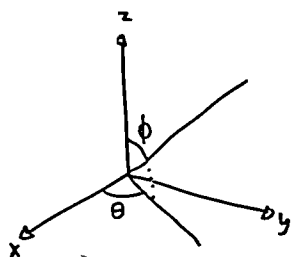
EU AINDA NÃO CORRIGI
AS PROVAS - VOU FAZER
ISSO HOJE À NOITE -
MAS ONTEM EU DIGITEI
OS GABARITOS. VOU
PEGAR ELES NA XERÓF
E DAQUI A POUCO EU
DOU UMA CÓPIA PRA
CADA UM DE VOCÊS!

FAÇAM OS EXERCÍCIOS 1 E 2
DA PÁGINA 959 E DEPOIS
VEJA SE VOCÊ CONSEGUE
VISUALIZAR OS CONJUNTOS
DA TERCEIRA COLUNA.

LEMBRE QUE NUMA
QUESTÃO DA PROVA
VOCÊS INTERPRETARAM
ESTE PEDACINHO DE BOLO



COMO O CONJUNTO DOS
PONTOS CUJAS COORDENADAS
POLARES OBEDECEM ISTO
AQUI: $r \in [1, 2]$,
 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.



$$(x, y, z) = (\rho \cos \phi \cos \theta, \rho \cos \phi \sin \theta, \rho \sin \phi) \quad (*)$$

POX EXEMPLO, DA
Fm FAZEMO 3b
ASSIM:

$$(\rho, \phi, \theta) = (\rho(t), \phi(t), \theta(t)) \\ = (1, 0, t)$$

$$(x, y, z) = (\rho \cos \phi \cos \theta, \rho \cos \phi \sin \theta, \rho \sin \phi)$$

$$= (1 \cdot \cos 0 \cdot \cos t, 1 \cdot \cos 0 \cdot \sin t, 1 \cdot \sin 0)$$

$$= (0, 0, 1)$$

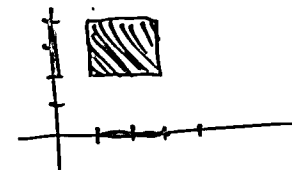
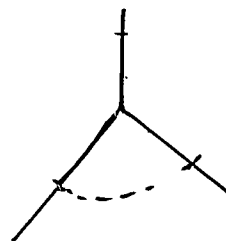
... OU SEJA, ISSO É
UMA TRAJETÓRIA PARADA!

TEM-SE FAZENDO O 3c.

⑤ LEMBRE QUE O
VOLUME DA
ESFERA DE RAIO r
É

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

VEJA SE VOCÊ CONSEGUE
USAR ISTO PRA CALCULAR
(NO OLHÔMETRO!) O
VOLUME DO CONJUNTO 4c.



$$x \in [1, 3] \\ y \in [2, 4]$$

③ EXERCÍCIOS QUE NÃO
ESTÃO NO LIVRO:

VISUALIZE ESTAS TRAJETÓRIAS:

a) $(\rho(t), \phi(t), \theta(t)) = (t, 0, 0), t \in [0, 3]$

b) $(\rho(t), \phi(t), \theta(t)) = (1, 0, t), t \in [0, \pi]$

c) $(\rho(t), \phi(t), \theta(t)) = (1, \frac{\pi}{2}, t), t \in [0, \pi]$

d) $(\rho(t), \phi(t), \theta(t)) = (1, t, 0), t \in [0, \pi]$

e) $(\rho(t), \phi(t), \theta(t)) = (1, t, \frac{\pi}{2}), t \in [0, \pi]$

a') $(\rho(t), \theta(t), \phi(t)) = (t, 0, 0), t \in [0, 3]$

b') $(\rho(t), \theta(t), \phi(t)) = (1, t, 0), t \in [0, \pi]$

c') $(\rho(t), \theta(t), \phi(t)) = (1, t, \frac{\pi}{2}), t \in [0, \pi]$

d') $(\rho(t), \theta(t), \phi(t)) = (1, 0, t), t \in [0, \pi]$

e') $(\rho(t), \theta(t), \phi(t)) = (1, \frac{\pi}{2}, t), t \in [0, \pi]$

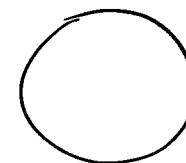
④ NOS CONJUNTOS
ABAIXO SUPONHA QUE
A RELAÇÃO ENTRE
 (x, y, z) E (ρ, θ, ϕ)
É A DA IGUALDADE (*).

VISUALIZE ESTES CONJUNTOS:

a) $\{(x, y, z) \mid \rho = 1, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \phi \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$

b) $\{(x, y, z) \mid \rho \in [1, 2], \theta = 0, \phi \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$

c) $\{(x, y, z) \mid \rho \in [0, 1], \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \phi \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$



C4 27/JUN/2023

INÍCIO: 14:16

SEJA B UM QUEIJO
PRATO BOLA ESFÉRICO
DE RAIO 1 CENTRADO
NA ORIGEM, E C A
METADE DE CIMA
DELE.

- ① DESCREVA C
EM COORDENADAS
POLARES. A
GENTE PODE
DEIXAR A RELAÇÃO
ENTRE (x, y, z) E
 (ρ, ϕ, θ) IMPLÍCITA,
E ESCRIVER C
NESTA FORMA AQUI:

$$C = \{(x, y, z) \mid \rho \in \dots, \phi \in \dots, \theta \in \dots\}$$

- ② CALCULE ESTA INTEGRAL
$$\iiint_C 1 \, dx \, dy \, dz$$

DE DOIS JEITOS:

- ② NO OLHÔMETRO, A
PARTIR DA FÓRMULA
DO RAIO DA ESFERA;
③ PELA FÓRMULA DA
PÁGINA 957 DO
LIVRO.

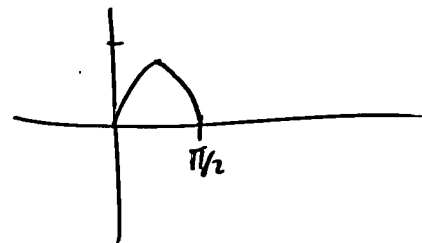
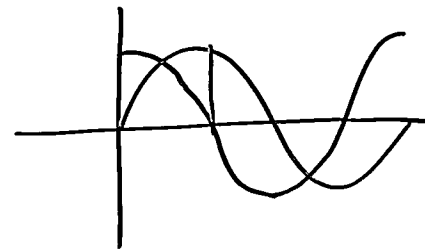
- ③ CALCULE ESTA
INTEGRAL:

$$\iiint_C z \, dx \, dy \, dz$$

$$\iiint_B f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{\rho=0}^1 \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi} 1 \, \rho^2 \sin \phi \, d\phi \, d\theta \, d\rho$$

$$(x, y, z) = (\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi)$$

$$\begin{aligned} \iiint_C z \, dx \, dy \, dz &= \int_{\rho=0}^1 \int_{\phi=0}^{\pi/2} \int_{\theta=0}^{2\pi} (\rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\ &= \int_{\rho=0}^1 \rho^3 \int_{\phi=0}^{\pi/2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \cos \phi \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi \\ &= \left(\int_{\rho=0}^1 \rho^3 \, d\rho \right) \left(\int_{\phi=0}^{\pi/2} \cos \phi \sin \phi \, d\phi \right) \left(\int_{\theta=0}^{2\pi} 1 \, d\theta \right) \end{aligned}$$



$$\int \frac{\sin x \cos x \, dx}{ds}$$

$$= \int s \, ds$$

$$= \frac{s^2}{2}$$

$$= \frac{(\sin x)^2}{2}$$

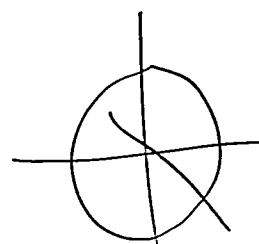
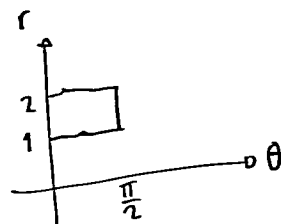
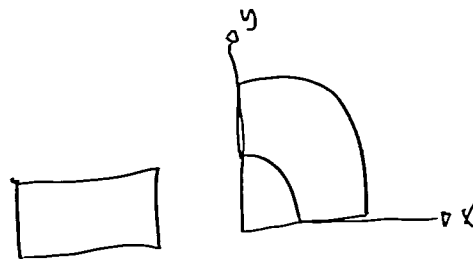
$$\int_{\phi=0}^{\pi/2} \cos \phi \sin \phi \, d\phi = \frac{(\sin \phi)^2}{2} \Big|_{\phi=0}^{\pi/2} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} s = \sin x \\ \frac{ds}{dx} = \cos x \\ ds = \cos x \, dx \end{cases}$$

C4 03/JULHO/2023

INÍCIO: 14:18

HOJE: PREPARAÇÃO PRA
P2! VOCÊS JÁ PRECISAM
TITAR 2 DELA PRA
PASSAREM DIRETO,
MAS A GENTE PRECISA
VER NO CURSO PELO
MENOS UM EXEMPLO
DE TEOREMA DE
GAUSS OU STOKES EM
3D, ENTÃO EU PREPAREI
UM PDF CHAMADO
"DICAS PRA P2" COM
LINKS PRA TUDO QUE
A GENTE VAI VER
HOJE. A PROVA TALVEZ
VÁ TER UMA QUESTÃO
SÓ, MAS COM VÁRIOS
SUBITEMS, E ALGUNS
DELES VÃO SER INDE-
PENDENTES DOS OUTROS...
E O OBJETIVO FINAL
DA PROVA VAI SER VOCÊS
RESOLVEREM ALGUNS
EXERCÍCIOS DE TEOREMA
DO DIVERGENTE EM
ESFERAS, QUE VÃO SER
PARECIDOS COM EXERCÍCIOS
QUE ESTÃO MARCADOS
ASSIM NO PDF DE
DICAS.



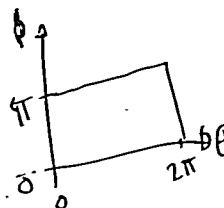
(r, ϕ, θ)

$r=1$

$\phi \in [0, \pi]$

$\theta \in [0, 2\pi]$

(x, y, z)

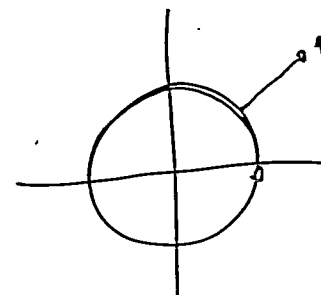


$$\begin{aligned} r(\phi, \theta) &= \sin \phi \cos \theta i \\ &\quad + \sin \phi \sin \theta j \\ &\quad + \cos \phi k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_\phi &= \cos \phi \cos \theta i \\ &\quad + \cos \phi \sin \theta j \\ &\quad - \sin \phi k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_\theta &= -\sin \phi \sin \theta i \\ &\quad + \sin \phi \cos \theta j \end{aligned}$$

$$r_\phi \times r_\theta$$



$$\begin{aligned} i \cdot i &= \langle 1, 0, 0 \rangle \\ &\quad \cdot \langle 1, 0, 0 \rangle \end{aligned}$$

$$= 1$$

$$i \times i = 0$$

$$i \cdot j = 0$$

$$i \times j = k$$

$$\begin{aligned} r(\phi, \theta) &= (x, y, z) \\ F(r(\phi, \theta)) \end{aligned}$$

