

C2 4/ABRIL/2022

INÍCIO: 14:20
(EM PRIMEIRAS
14:05 MAS NÓS
TIVEMOS PROBLEMAS
COM A SALA)

<http://anggtwo.net/>

SOPRE OS LINKS
CURTOS:

2 e T 62
CÁLCULO 2 SEMESTRE 2022.1 "POFZÃO COM TUDO" #page=62

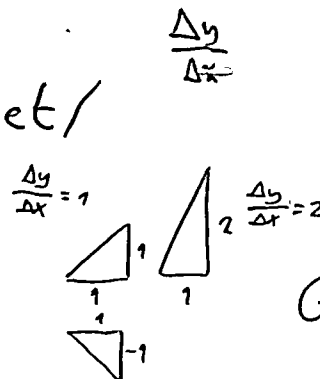
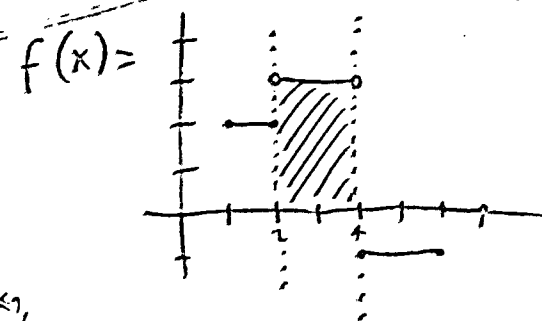
EXERCÍCIO 1 DE HOJE:

ACESSEM O LINK QUE DIZ
2eT69 (TFC1, PAGE 10)

E TENTEM FAZER
O GRÁFICO DA DERIVADA
DA FUNÇÃO $G(x)$ QUE
APARECE NESTA PÁGINA:

EXERCÍCIO 2 DE HOJE:

ACESSEM O LINK QUE DIZ: 3eT66 (TFC1)

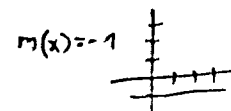


$G(x) =$

$G'(1.5) = 1$
 $G'(2.5) =$

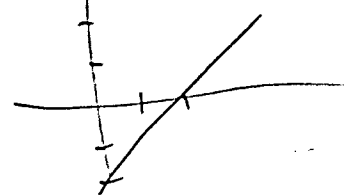
$$G(x) = \begin{cases} -1 & \text{QUANDO } x \leq 1, \\ -2+x & \text{QUANDO } 1 < x \leq 2, \end{cases}$$

$F(x) =$

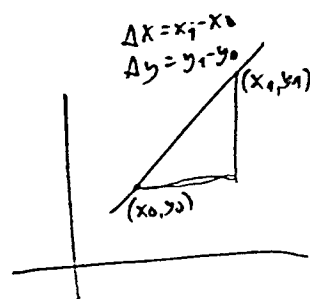
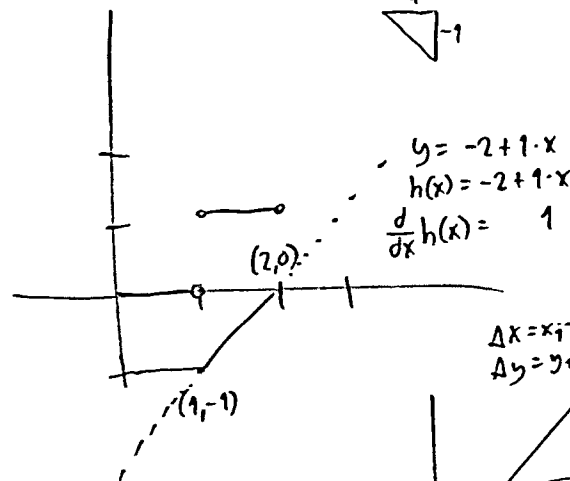


$h(x) = -2+x$

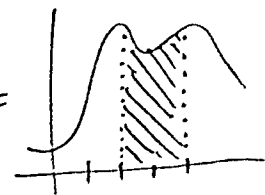
$h(x) =$



$TOPODO(x) = -2+x$



$$\int_{x=2}^{x=4} f(x) dx =$$



A ÁREA SOB A
CURVA DA FUNÇÃO $f(x)$
ENTRE $x=2$ E $x=4$.

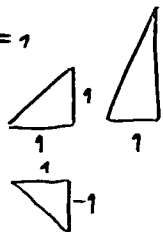
<http://anggtwu.net/>

62

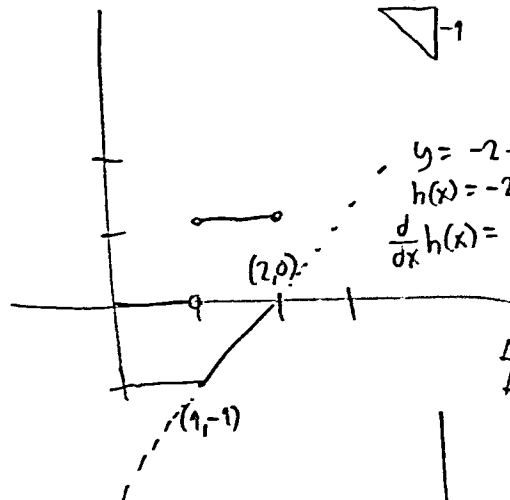
#page=62

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$$



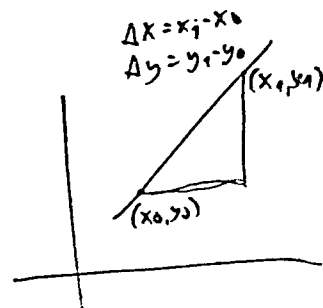
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$$



$$y = -2 + 1 \cdot x$$

$$h(x) = -2 + 1 \cdot x$$

$$\frac{d}{dx} h(x) = 1$$

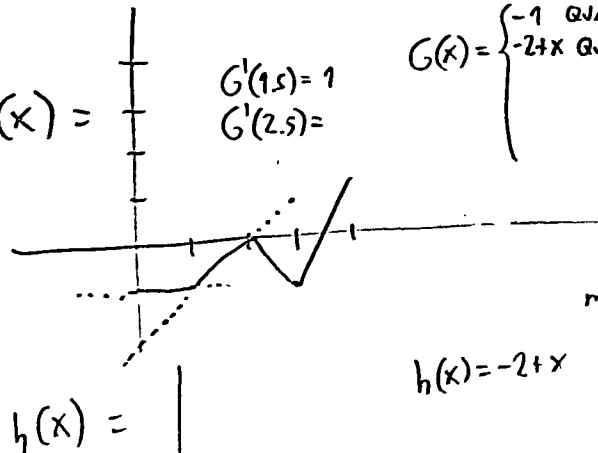


$$G(x) =$$

$$G'(1.5) = 1$$

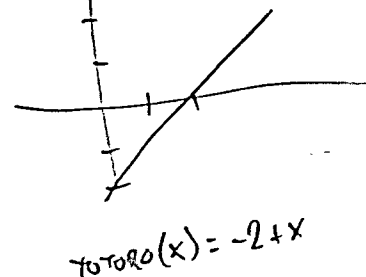
$$G'(2.5) =$$

$$G(x) = \begin{cases} -1 & \text{quando } x \leq 1, \\ -2+x & \text{quando } 1 < x \leq 2, \end{cases}$$



$$h(x) =$$

$$h(x) = -2 + x$$



$$h(x) = -2 + x$$

EXERCÍCIO 1 DE HOJE:

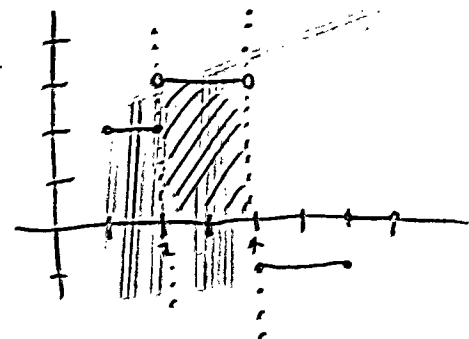
Acessem o LINK QUE DIZ
2eT69 (TFC1, PAGE 10)

E TENTEM FAZER
O GRÁFICO DA DERIVADA
DA FUNÇÃO $G(x)$ QUE
APARECE NESTA PÁGINA:

EXERCÍCIO 2 DE HOJE:

Acessem o LINK QUE DIZ: 3eT66 (TFC1, PAGE 10)

$$f(x) =$$

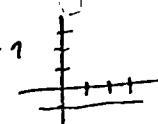


← VELOCIDADE

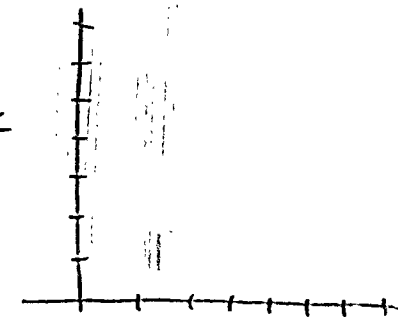
$$\int_{x=2}^{x=4} f(x) dx$$

$$F(x) =$$

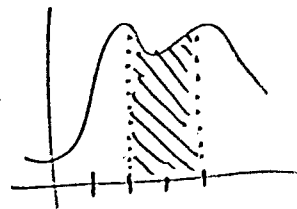
← DISTÂNCIA
PERCORRIDA



$$m(x) = -1$$



$$\int_{x=2}^{x=4} f(x) dx =$$



A ÁREA SOB A
CURVA DA FUNÇÃO $f(x)$
ENTRE $x=2$ E $x=4$.

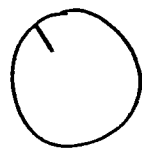
C2 11/ABRIL/2023

INÍCIO: 14:07

QUASE TODO O

MATERIAL QUE
A GENTE VAI USAR
HOJE ESTÁ NO PDF
SOBRE O CARRO!
ELE ESTÁ NA
PÁGINA DO CURSO -
PROCUREM OS LINKS
ONDE DIZ "AULA 1"
E "AULA 3"!

HOJE A GENTE
VAI COMEÇAR A
APRENDER A
USAR O BOTÃO
QUE REGULA O
NÍVEL DE DETALHE...



MIN MAX

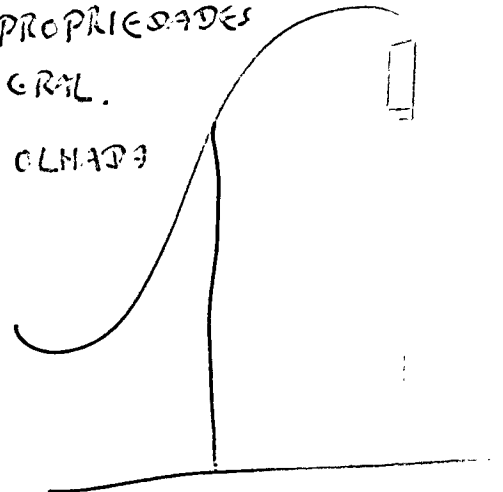
UM DOS OBJETIVOS
DE HOJE É A GENTE
APRENDER A CALCULAR
CERTAS COISAS DE
CABEÇA E FAZER
UNS GRÁFICOS "NO
OLHÔMETRO" SEM
ESCREVER AS CONTAS
DELES... MAS TODA
VEZ QUE VOCÊS
TIVEREM ALGUMA
DÚVIDA A GENTE
VAI VER COMO
ESCREVER ELA E
COMO TESTAR ELA.

AVISO: A PÁGINA 3
DO PDF DE HOJE
TEM UM MONTE DE
LINKS, E UM DELES
É ASSIM:

2eT62 (TFC1, p.3)

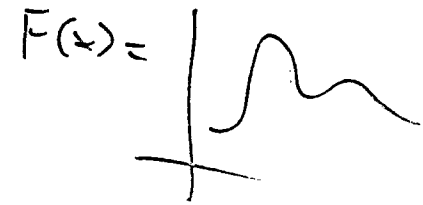
ALGUMAS PROPRIEDADES
DA INTEGRAL.

DÊEM UMA OLHADA
NELE!!!

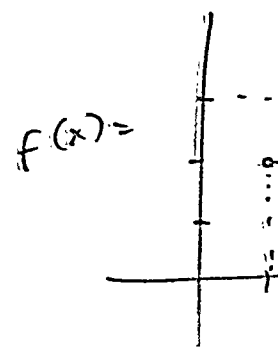


$$c) \int_{x=1.5}^{x=4} f(x) dx = \int_{x=1.5}^{x=2} f(x) dx$$

HIPÓTESE:



SE AL
-ESTIVE
INTERN
AVISE!



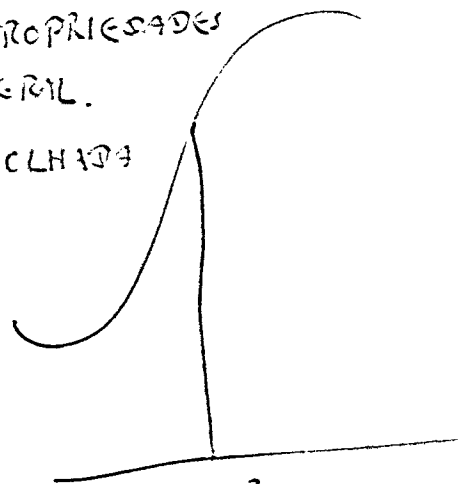
NTE
 ER A
 A
 TÃO
 LA O
 DETALHE...
 MAX
 OBJETIVOS
 É A GENTE
 A CALCULAR
 ECAS DE
 E FAZER
 FICOS "NO
 RO" SEN
 AS CONTAS
 NAS TODA
 VOCÊS
 ALGUMA
 A GENTE
 COMO
 R ELA E
 TESTAR ELA.

AVISO: A PÁGINA 3
 DO PDF DE HOJE
 TEM UM MONTE DE
 LINKS, E UM DELES
 É ASSIM:

2eT62 (TFC1, p.3)

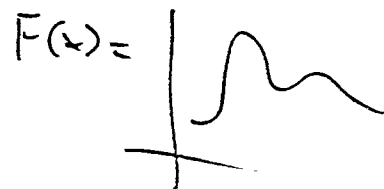
ALGUMAS PROPRIEDADES
DA INTEGRAL.

DÊEM UMA OLHADA
NELE!!!

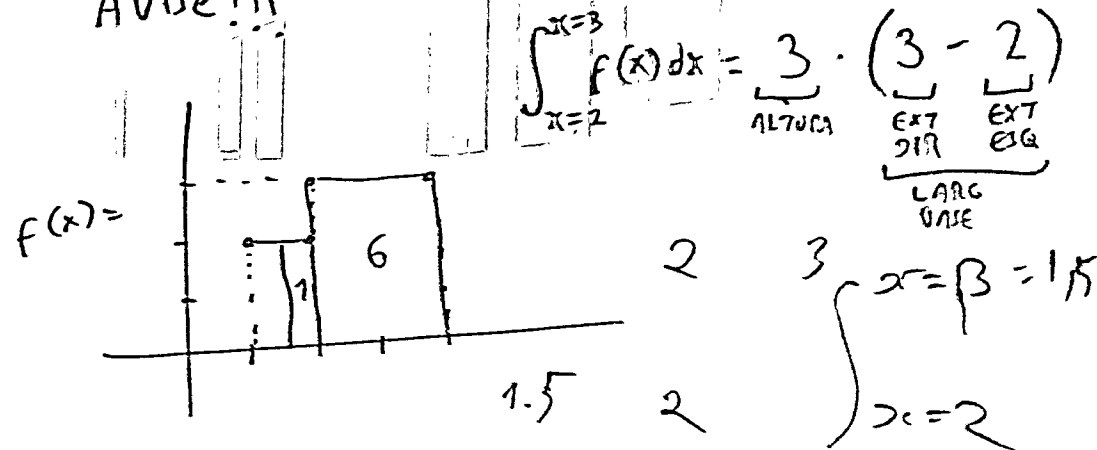


$$c) \int_{x=1.5}^{x=4} f(x) dx = \int_{x=1.5}^{x=2} f(x) dx$$

HIPÓTESE:



SE ALGUÉM
 ESTIVER SEM
 INTERNET ME
 AVISE!!!



A. b

$$\underline{A. (2 + 1.5)}$$

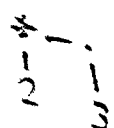
C2 14/ABRIL/2023

INÍCIO: 15:15

NOTAR O NÚMERO
E AS ÁRVORES!

NOTAR SEN, NOTAR OP

$$\frac{2-3}{2} + \frac{4-5}{2}$$



(%/i) 2+3;

(%/o) 5

(%/i) x+y;

(%/o) x+y

(%/i) a = x+y;

(%/o) x+y

(%/i) op(x);

(%/o) +

(%/i) lhs(x);

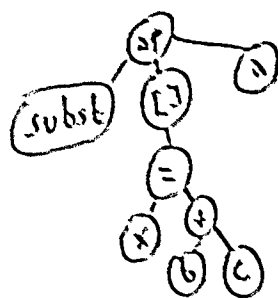
(%/o) x

(%/i) 2x;

(%/o) 2x+2y;

(%/i) subst([x=b+c], a);

(%/o) b+c+y



EXERCÍCIO 1

ENCONTRE REPRESENTAÇÕES
EM ÁRVORES RAZOÁVEIS PARA
CADA UMA DAS EXPRESSÕES
ABAIXO. DUCUTA COM OS
SEUS COLEGAS!

a) $\frac{x + \sin x}{2 + x^3}$

b) $\frac{(\ln x)^3}{5 + \sin x}$

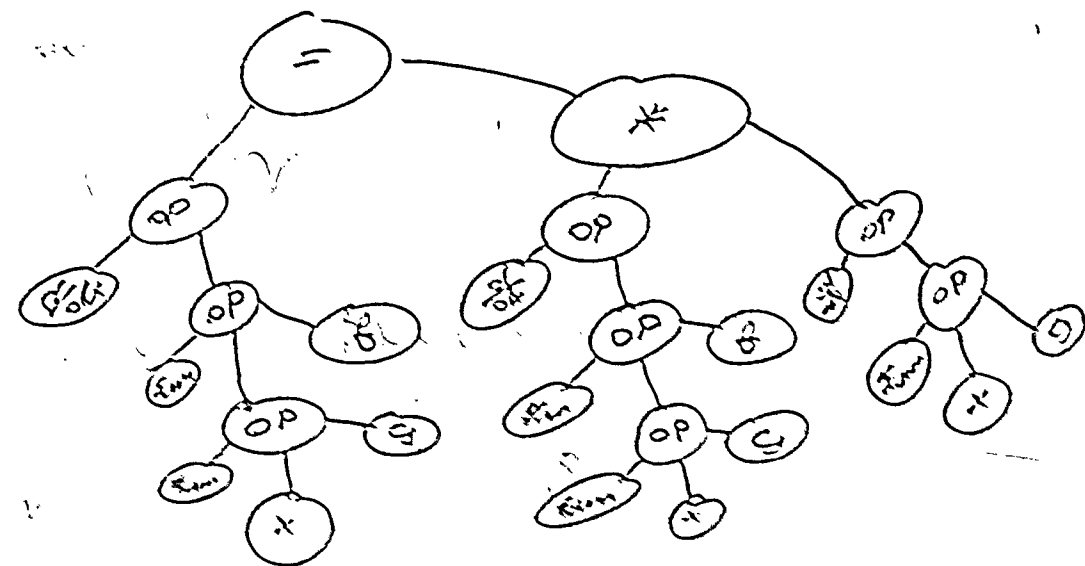
c) $\frac{d}{dx} f(g(x))$

d) $\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$

e) $\int f(x) dx$

f) $\int_a^b f(x) dx$

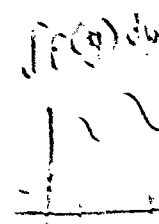
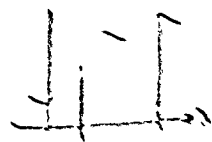
g) $\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx$



Obs: esse é o
JEITO NORMAL
DE ESCREVER
A INTEGRAL
DEFINIDA

EU PREFIRO
ESCREVER ELA
DEU JAITO,
COM OS "x="s

$\int_a^b f(x) dx$

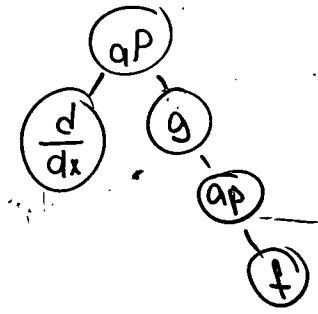
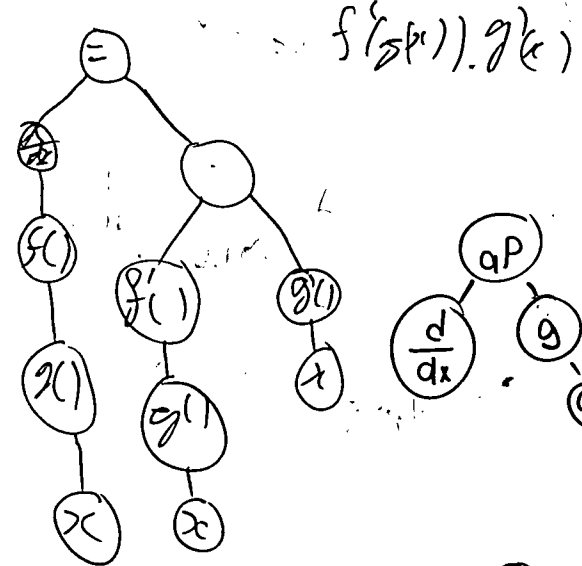
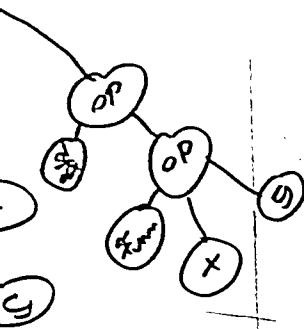


VIDEO DO MATHOLOGER, 17:19:

$$\left(\frac{5 + \sin x}{x^3 \ln x}\right)' = \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} = \frac{(5 + \sin x)'g - (5 + \sin x)g'}{g^2}$$

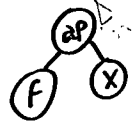
PRA CASA: PRATIQUEM TRANSFORMAR AS 1 CONTAS DO MATHOLOGER EM ÁRVORES! COMECEM POR ESSAS AQUI! COMECEM AGORA!

DEVIK

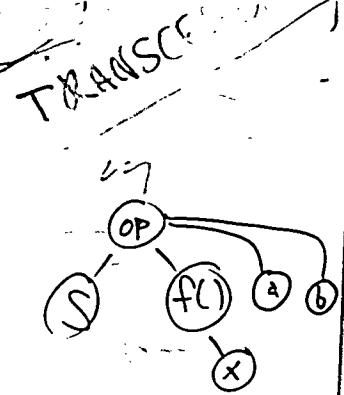
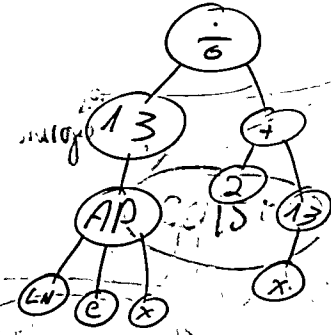
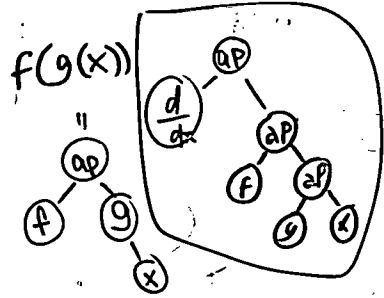
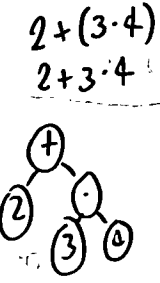


$$\frac{d}{dx}(f(g(x)))$$

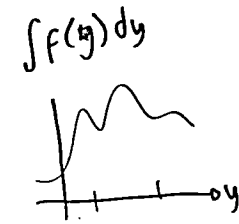
$$op(f(g(x)))$$



f(x)



$$2^4 \quad 2 \cdot 4$$



C2 ABRIL/2023

INÍCIO: 14:11

HOJE: CONTAS COM JUSTIFICATIVAS, COMO AS JUSTIFICATIVAS FUNCIONAM, O OPERADOR $[:=]$, O MACACO SUBSTITUIDOR, EDOS POR CHUTAR E TESTAR, E TALVEZ UM POUCO DE INTEGRAÇÃO POR CHUTAR E TESTAR.

NO VÍDEO DO MATHOLOGER A PARTIR DO 17:15 ELE FAZ VÁRIAS COISAS QUE SÓ FICAM FÁCEIS DE ENTENDER PORQUE ELE USA ANIMAÇÕES E CORES... ELE FAZ ISSO AQUI: ↗

$$\Rightarrow \left(\frac{5 + \text{sen } x}{x^3 \ln x} \right)' = \left(\frac{f}{g} \right)'$$

$$= \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad (\text{PELA REGRA } \div)$$

$$= \frac{(5 + \text{sen } x)'g - (5 + \text{sen } x)g'}{g^2}$$

$$= \frac{(5 + \text{sen } x)'(x^3 \ln x) - (5 + \text{sen } x)(x^3 \ln x)'}{(x^3 \ln x)^2}$$

$$(5 + \text{sen } x)' = (f + g)'$$

$$= f' + g' \quad (\text{PELA REGRA } +)$$

$$= 5' + (\text{sen } x)'$$

$$= 0 + (\text{sen } x)'$$

$$= (\text{sen } x)'$$

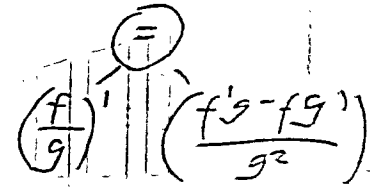
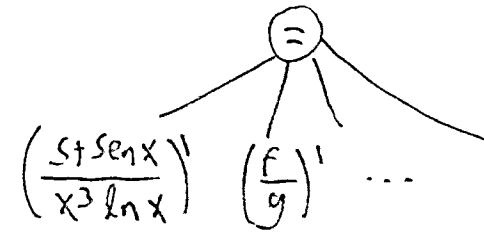
$$= \cos x$$

NESSO CASO O MATHOLOGER USOU AS REGRAS $\div$ E $+$ LITERALMENTE...

$$+ (f + g)' = f' + g'$$

$$\div \left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$\boxed{+} : (f + g)' = f' + g' \quad \leftarrow \text{ATRIBUIÇÃO!}$$



ISTO AQUI SERIA ALGO BEM MAIS COMUM DO QUE O QUE O MATHOLOGER FAZ:

$$\left(\frac{5 + \text{sen } x}{x^3 \ln x} \right)'$$

E A JUSTIFICATIVA SIMPLIFICADA

E QUANDO É ÓBVIA A JUSTIFICATIVA.

VOU DAR ACIMA:

A JUSTIFICATIVA

POR

EXPANDINDO

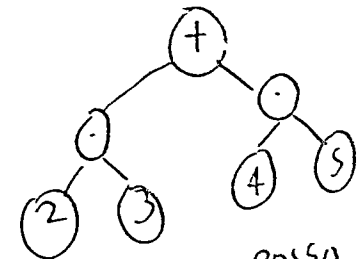
$$\text{POR } \left(\frac{f}{g} \right)'$$

EXERCÍCIO (VERSÃO 1) QUAL É SUBSTITUTO

NA LOVA

$$\text{op}(2 \cdot 3 + 4 \cdot 5) = "+"$$

$$\text{lhs}(2 \cdot 3 + 4 \cdot 5) = 2 \cdot 3$$



NO MÁXIMA EU POSSO FAZER COISAS COMO ISTO:

$a : b = c$
ISSO É UMA ATRIBUIÇÃO, E A PARTIR DESSE MOMENTO A VARIÁVEL PASSA A CONTER ISTO:



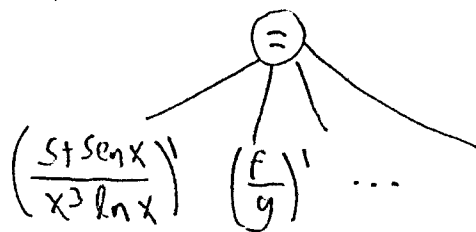
$$\begin{aligned} \left(\frac{f + \sin x}{\ln x} \right)' &= \left(\frac{f}{g} \right)' \\ &= \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad (\text{PELA REGRA } \div) \\ &= \frac{(5 + \sin x)'g - (5 + \sin x)g'}{g^2} \\ &= \frac{(5 + \sin x)'(x^3 \ln x) - (5 + \sin x)(x^3 \ln x)'}{(x^3 \ln x)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f + \sin x)' &= (f + g)' \\ &= f' + g' \quad (\text{PELA REGRA } +) \\ &= 5' + (\sin x)' \\ &= 0 + (\sin x)' \\ &= (\sin x)' \\ &= \cos x \end{aligned}$$

NESSE CASO O MATHOLOGER
USOU AS REGRAS $\div$ E $+$
LITERALMENTE...

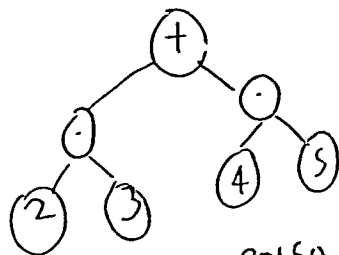
$$\begin{aligned} + (f + g)' &= f' + g' \\ \div \left(\frac{f}{g} \right)' &= \frac{f'g - fg'}{g^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{+} : (f + g)' = f' + g' \quad \leftarrow \text{ATRIBUIÇÃO!}$$



$$\left(\frac{f}{g} \right)' = \left(\frac{f'g - fg'}{g^2} \right)$$

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 &= " + " \\ \text{op}(2 \cdot 3 + 4 \cdot 5) &= " + " \\ \text{lhs}(2 \cdot 3 + 4 \cdot 5) &= 2 \cdot 3 \end{aligned}$$



NO MÁXIMA EU POSSO
FAZER COISAS COMO ISTO:

$$a : b = c;$$

ISSO É UMA ATRIBUIÇÃO,
E A PARTIR DESSE
MOMENTO A VARIÁVEL
PASSA A CONTER ISTO:



ISTO AQUI SERIA
ALGO BEM MAIS
COMUM DO QUE O
QUE O MATHOLOGER

$$\text{FAZ: } \left(\frac{f + \sin x}{x^3 \ln x} \right)' = \frac{(f + \sin x)'(x^3 \ln x) - (f + \sin x)(x^3 \ln x)'}{(x^3 \ln x)^2}$$

E A JUSTIFICATIVA À DIREITA É
SIMPLEMENTE "PELA REGRA $\div$ "
E QUANDO A JUSTIFICATIVA É
ÓBVIA O SUFICIENTE ELA É
OMITIDA.

VOU DAR UM NOME PARA IGUALDADE
ACIMA: (1). SE A GENTE EXPANDIR
A JUSTIFICATIVA DELA ELA
VIRARIA ISTO:

$$\text{POR } \left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad (\text{VER A PÁGINA 234})$$

EXPANDINDO MAIS,

$$\text{POR } \left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \text{ COM:}$$

$$\begin{aligned} f &:= 5 + \sin x \\ g &:= x^3 \ln x \\ f' &:= ? \\ g' &:= ? \end{aligned}$$

EXERCÍCIO 1

(VERSÃO EM PORTUGUÊS):

QUAL É O RESULTADO DE
SUBSTITUIR

$$\begin{aligned} f &\text{ POR } x^3 \ln x, \\ f' &\text{ POR } 3x^2 \ln x + x^3 \ln x, \\ g &\text{ POR } 4 + \sin x, \\ g' &\text{ POR } 0 + \cos x \end{aligned}$$

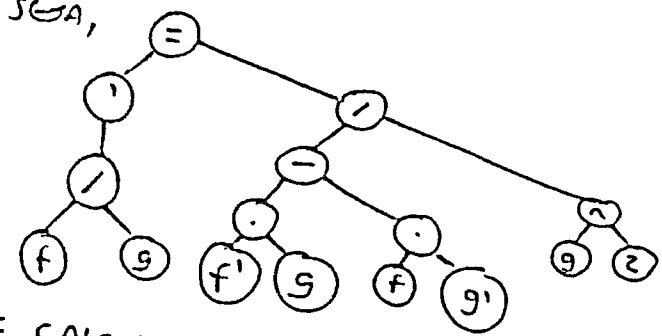
NA IGUALDADE $\div$?

C2 ABRIL/2023
 INÍCIO: 14:17

VERSÃO "MENOS EM PORTUGUÊS" DO EXERCÍCIO 1:

SEJA $\diamond = \left(\left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \right)$,

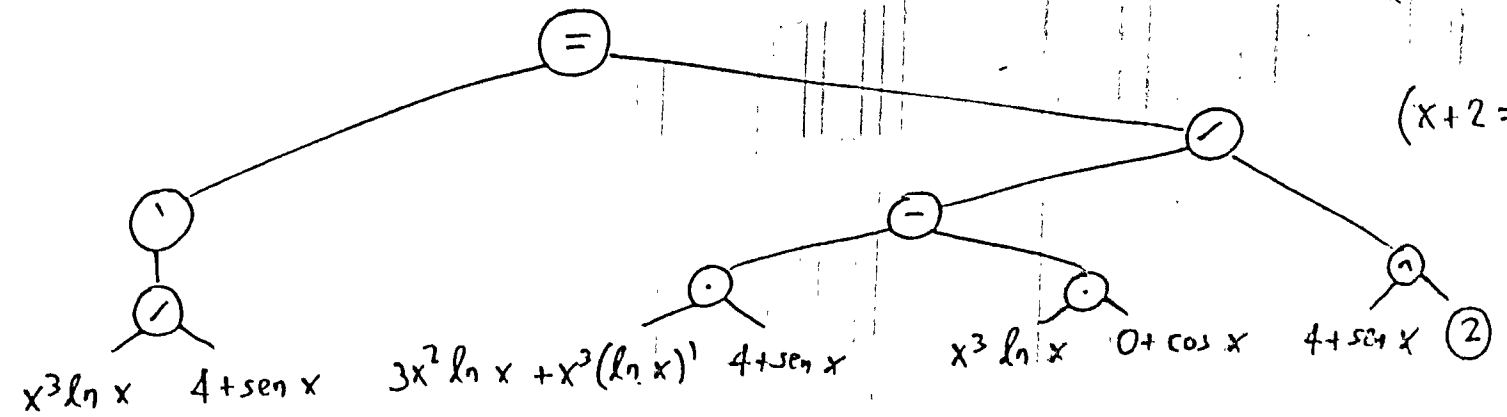
OU SEJA,



E CALCULE:

$\diamond = \left[\begin{array}{l} f := x^3 \ln x \\ f' := 3x^2 \ln x + x^3 (\ln x)' \\ g := 4 + \sin x \\ g' := 0 + \cos x \end{array} \right]$

UM JEITO DE OBTEN O RESULTADO DITO É MONTANDO ESTA ÁRVORE AQUI, E DEPOIS TRADUZINDO ELA PARA NOTACÃO ALGÉBRICA.



COMO É QUE A GGNTÉ P EQUAÇÕES POR CHU TESTAR?

$x+2 = 5$

$((x+2=5)[x:=4])$

$((x+2=5)[x:=3])$

SIGAR 20

DE VEZ EM QUANDO A GGNTÉ VAI PRECISAR SUBSTITUIR FUNÇÕES COM ARGUMENTOS...

POUR EXEMPLO, DIGAMOS QUE $f(x) = x^2$. OU: $f(y) = y^2$

$f(200) = 200^2$

$f(3u+4) = (3u+4)^2$

$f(42x^3+99) = (42x^3+99)^2$

$f'(x) = 2x$

$f'(200) = 2 \cdot 200$

$f'(3u+4) = 2 \cdot (3u+4)$

$f'(42x^3+99) = 2 \cdot (42x^3+99)$

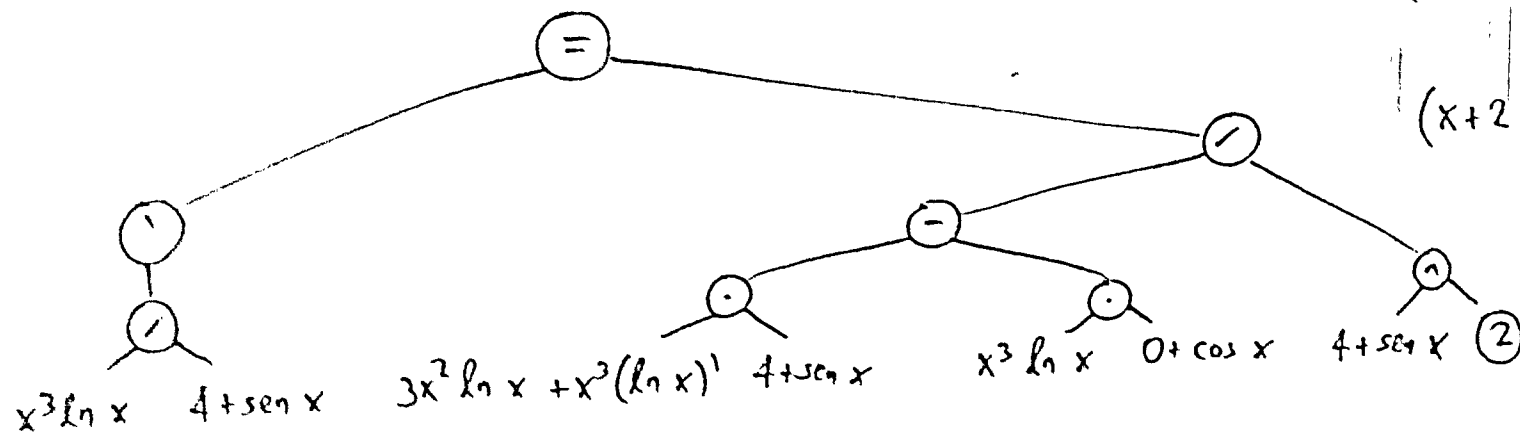
EXEMPLO: SEJA ④ ESTA ENDO:

$f'(x) = x^3$

SERÁ QUE $f(x) = x^4$ É SOLUÇÃO DELA?

$(f'(x) = x^3) \left[\begin{array}{l} f(x) := \\ f'(x) := \end{array} \right]$

FEITO DE OBTER O
LADO DITO É MONTANDO
A ÁRVORE AQUI,
DEPOIS TRADUZINDO ELA
NA NOTACÃO ALGÉBRICA.



COMO É QUE A GENTE RESOLVE
EQUAÇÕES POR CHUTAR E
TESTAR?

$$x+2=5$$

$$(x+2=5)[x:=4] = (\underbrace{4+2=5}_6)$$

$$(x+2=5)[x:=3] = (\underbrace{3+2=5}_5^F_V)$$

SIGAM ESTE LINK:

2dT13: EDOs POR
CHUTAR E
TESTAR

DE VEZ EM QUANDO A GENTE

VAI PRECISAR SUBSTITUIR
FUNÇÕES COM ARGUMENTOS...

OU:
POR EXEMPLO, DIGAMOS QUE $f(x)=x^2$. $f(y)=y^2$

$$f(200)=200^2$$

$$f(30+4)=(30+4)^2$$

$$f(42x^3+99)=(42x^3+99)^2$$

$$f'(x)=2x$$

$$f'(200)=2 \cdot 200$$

$$f'(30+4)=2 \cdot (30+4)$$

$$f'(42x^3+99)=2 \cdot (42x^3+99)$$

EXEMPLO:

SEJA ④ ESTA EDO:

$$f'(x)=x^3$$

SERÁ QUE $f(x)=x^4$
É SOLUÇÃO DELA?

$$(f'(x)=x^3) \left[\begin{matrix} f(x) := x^4 \\ f'(x) := 4x^3 \end{matrix} \right] = (4x^3 \stackrel{?}{=} x^3)$$

ISTO É VERDADE
PRÓ TODOS OS VALORES
DE x ? NÃO, SÓ PRA
ALGUNS...

$$(c) \quad f''(x) + f'(x) = 6f(x)$$

Caso 1: $f(x) = e^{2x}$

Caso 2: $f(x) = e^{3x}$

$$((e^x)^2)'' \cdot (e^x)^2 = 6e^{2x}$$

Se $f(x) = e^{2x}$
então: $f'(x) = 2e^{2x}$
 $f''(x) = (2e^{2x})'$

$$= 2(e^{2x})'$$

$$= 2 \cdot 2e^{2x} = 4e^{2x}$$

$$\frac{d}{dx} e^{2x}$$

Se $f(x) = e^{3x}$

então $f'(x) = 3e^{3x}$

$$f''(x) = 3 \cdot e^{3x} + 3 \cdot 3e^{3x} \\ = 0 \cdot e^{3x} + 9e^{3x} \\ = 9e^{3x}$$

$$(6) \quad \begin{bmatrix} f(x) := e^{2x} \\ f'(x) := 3e^{2x} \\ f''(x) := 9e^{2x} \end{bmatrix} = \underbrace{(9e^{2x} + 3e^{2x})}_{F} = 6e^{2x}$$

$$(6) \quad \begin{bmatrix} f(x) := e^{2x} \\ f'(x) := 2e^{2x} \\ f''(x) := 4e^{2x} \end{bmatrix} = \underbrace{(4e^{2x} + 2e^{2x})}_{Y} = 6e^{2x}$$

Para cada

fazemos

E DOU POR

DA PIGOR

Ele vai do

A 2000000

com o

Exemplos:
Seja $f(x) = x^2$

$$f'(x) = 2x$$

Seja $f(x) = x^3$

Seja $f(x) = x^4$

$$\begin{bmatrix} f(x) = x^2 \\ f'(x) = 2x \\ f''(x) = 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2$$

(x)

$$6e^{2x}$$

$$(e^{2x})' = 2e^{2x}$$

$$\frac{d}{dx} e^{2x}$$

Se $f(x) = e^{3x}$
 então $f'(x) = 3e^{3x}$
 $f''(x) = 3 \cdot e^{3x} + 3 \cdot 3e^{3x}$
 $= 0 \cdot e^{3x} + 9e^{3x}$
 $= 9e^{3x}$

$$\textcircled{6} \begin{bmatrix} f(x) := e^{3x} \\ f'(x) := 3e^{3x} \\ f''(x) := 9e^{3x} \end{bmatrix} = \underbrace{(9e^{3x} + 3e^{3x})}_{F} = 6e^{3x}$$

$$\textcircled{6} \begin{bmatrix} f(x) := e^{2x} \\ f'(x) := 2e^{2x} \\ f''(x) := 4e^{2x} \end{bmatrix} = \underbrace{(4e^{2x} + 2e^{2x})}_V = 6e^{2x}$$

PARA CASA:

FAÇAM OS EXERCÍCIOS DE
EDOS POR CHUTAR E TESTAR!
DA PÁGINA

20713

ELE VAI OBRIGAR VOCÊS
A REAPRENDER MUITA
COISA SOBRE DERIVADA! //

EXEMPLO:
SEJA $\textcircled{4}$ ESTA EDO:

$$f'(x) = x^3$$

SERÁ QUE $f(x) = x^4$
É SOLUÇÃO DELA?

$$(f'(x) = x^3) \begin{bmatrix} f(x) := x^4 \\ f'(x) := 4x^3 \end{bmatrix} = \underbrace{(4x^3)}_{\uparrow} = x^3$$

ISTO É VERDADE
PARA TODOS OS VALORES
DE x ? NÃO, SÓ PARA
ALGUNS...

C2 25/ABRIL/2023

INÍCIO: 14:11

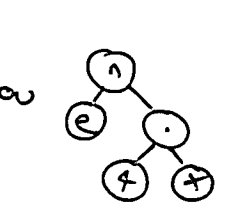
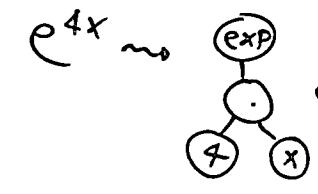
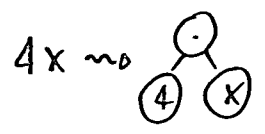
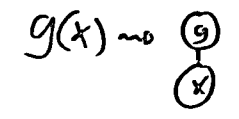
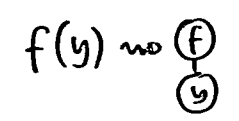
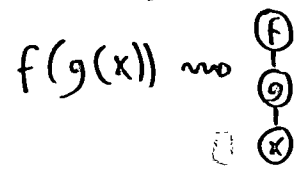
HOJE: O MACACO
DERIVADOR! O
MACACO SUBSTITUIDOR!
O MACACO QUE
RESOLVE INTEGRAIS
POR CONTAS!

LEMBRE QUE A
PRONÚNCIA DISSO
AQUI

$$(f(g(x))) [f(y) := e^y, g(x) := 4x] = e^{4x}$$

É: SE SUBSTITUÍRMOS
TODAS AS OCORRÊNCIAS
DE $f(y)$ POR e^y E
TODAS AS OCORRÊNCIAS
DE $g(x)$ POR $4x$ NA
EXPRESSION $f(g(x))$
OBTENEMOS A EXPRESSION
 e^{4x} .

LEMBRE QUE
EXPRESSIONES
PRA GENTE SÃO
ÁRVORES!



$exp(4.x)$

$$\frac{1}{2x} \quad \frac{1}{2} x^2$$

DÁ PRA GENTE USAR
O $[:=]$ PRA
RELEMBRAR REGRA
DA CADEIA, E PRA
GENTE ENTENDER
COMO É QUE
MUITAS PESSOAS
PARECEM TER
DECORADO MAIS
FÓRMULAS DE
DERIVAÇÃO DO
QUE CABEM
NA CABEÇA
DE UM SER
HUMANO NORMAL...

$$[RC] = ((f(g(x)))' = f'(g(x))g')$$

$$(f(g(x))) [f(y) := e^y] = ?$$

$$(f(g(x))) [f(y) := y^{1/2}] = ?$$

$$(f(g(x))) [f(y) := \sqrt{y}] = ?$$

$$(f(g(x))) [g(x) := 4x] = ?$$

PERGUNTAS (PASSADO):

$$\frac{d}{dx} e^{g(x)} = ?$$

$$\frac{d}{dx} g(x)^{1/2} = ?$$

$$\frac{d}{dx} \sqrt{g(x)} = ?$$

$$\frac{d}{dx} f(4x) = ?$$

AGORA AS MESMAS
PERGUNTAS, MAS
USANDO O $[:=]$:

$$[RC] [f(y) := e^y, f'(y) := e^y] = ?$$

$$[RC] [f(y) := y^{1/2}, f'(y) := \frac{1}{2} y^{-1/2}] = ?$$

$$[RC] [f(y) := \sqrt{y}, f'(y) := \frac{1}{2\sqrt{y}}] = ?$$

$$[RC] [g(x) := 4x, g'(x) := 4] = ?$$

$$f(g(x)) [f(y) := e^y, f'(y) := e^y] = e^{g(x)}$$

$$f(g(x)) [f(y) := e^y, f'(y) := e^y] = (e^{g(x)})'$$

$$h(x) =$$

$$h(a+b) =$$

$$m(x) =$$

$$m(a+b) =$$

$$m(g(x)) =$$

$$(a+b+c) [t]$$

$$(a+b+c) [x]$$

$$f(g(x)) [f(y) := e^y]$$

$$f(g(x)) [g(x) := 4x]$$

$$f(g(x)) [f(y) := e^y, g(x) := 4x]$$

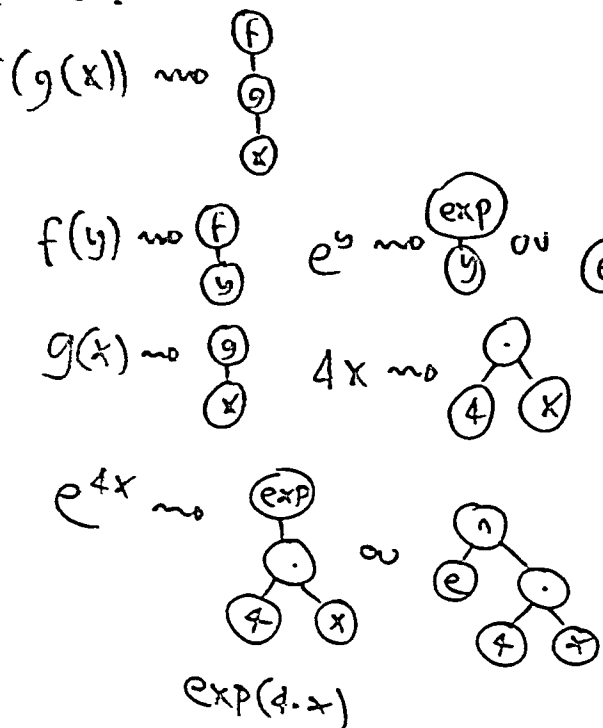
$$f(g(x)) [f(y) := e^y, g'(x) := 4]$$

$$f(g(x)) [g(x) := 4x, g'(x) := 4]$$

$$f(g(x)) [f(y) := e^y, g(x) := 4x, g'(x) := 4]$$

$$f(g(x)) [f(y) := e^y, g(x) := 4x, g'(x) := 4]$$

que que
reissos
a gente são
viores!



Dá pra gente usar
o $[:=]$ pra
relembrar regra
da cadeia, e pra
gente entender
como é que
muitas pessoas
parecem ter
decorado mais
fórmulas de
derivação do
que cabem
na cabeça
de um ser
humano normal...

$$[RC] = ((f(g(x)))' = f'(g(x))g')$$

$$(f(g(x))) [f(y) := e^y] = ?$$

$$(f(g(x))) [f(y) := y^{1/2}] = ?$$

$$(f(g(x))) [f(y) := \sqrt{y}] = ?$$

$$(f(g(x))) [g(x) := 4x] = ?$$

PERGUNTAS (passado):

$$\frac{d}{dx} e^{g(x)} = ?$$

$$\frac{d}{dx} g(x)^{1/2} = ?$$

$$\frac{d}{dx} \sqrt{g(x)} = ?$$

$$\frac{d}{dx} f(4x) = ?$$



AGORA AS MESMAS
PERGUNTAS, MAS
USANDO O $[:=]$:

$$[RC] \left[\begin{array}{l} f(y) := e^y \\ f'(y) := e^y \end{array} \right] = ?$$

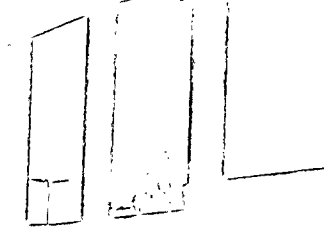
$$[RC] \left[\begin{array}{l} f(y) := y^{1/2} \\ f'(y) := \frac{1}{2} y^{-1/2} \end{array} \right] = ?$$

$$[RC] \left[\begin{array}{l} f(y) := \sqrt{y} \\ f'(y) := \frac{1}{2\sqrt{y}} \end{array} \right] = ?$$

$$[RC] \left[\begin{array}{l} g(x) := 4x \\ g'(x) := 4 \end{array} \right] = ?$$

$$f(g(x)) \left[\begin{array}{l} f(y) := e^y \\ f'(y) := e^y \end{array} \right] = e^{g(x)}$$

$$f(g(x))' \left[\begin{array}{l} f(y) := e^y \\ f'(y) := e^y \end{array} \right] = (e^{g(x)})'$$



$$h(x) = x^2 + x^3$$

$$h(a+b) = (a+b)^2 + (a+b)^3$$

$$m(x) = e^x$$

$$m(a+b) = e^{a+b}$$

$$m(g(a)) = e^{g(a)}$$

$$(a+b+c) [b := 2+3] = a + (2+3) + c$$

$$= (a+b+c) [x := 2+3] = a + b + c$$

$$f(g(x)) [x := 42] = f(g(42))$$

$$f(g(x)) [g(x) := 200 \cdot x] = f(200 \cdot x)$$

$$f(g(x)) [f(y) := y^2 + y^3] = g(x)^2 + g(x)^3$$

$$f(g(x)) [f(y) := e^y] = e^{g(x)}$$

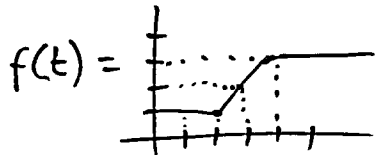
$$f(g(x)) [g(x) := 4x] = f(4x)$$

$$f(g(x)) \left[\begin{array}{l} f(y) := e^y \\ g(x) := 4x \end{array} \right] = e^{4x}$$

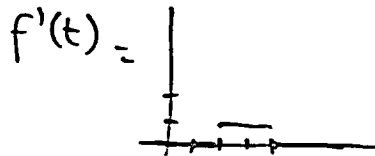
C2 25/ABRIL/2023

INÍCIO: 14:11

HOJE: O MACACO
DERIVADOR! O
MACACO SUBSTITUIDOR!
O MACACO QUE
RESOLVE INTEGRAIS
POR CONTAS!



← POSIÇÃO
DO MATHO-
LOGERMOVEL
NO TEMPO



$$\int_{t=1}^{t=3} f'(t) dt = 1 = \underbrace{f(3)}_2 - \underbrace{f(1)}_1 = 1$$

O SEGUNDO TEOREMA
FUNDAMENTAL DO
CÁLCULO - TFC2 -

~~PRA QUALQUER FUNÇÃO f(x)~~

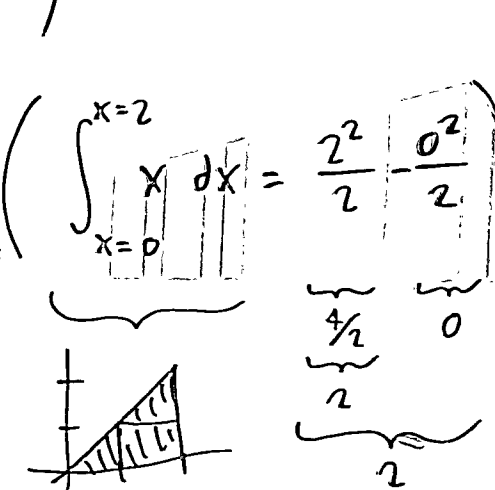
(- QUALQUER a e b reais:

$$\int_{x=a}^{x=b} f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

NOTAÇÃO:
f(x) |_{x=a}^{x=b}

$$[TFC2] = \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(x) dx = f(b) - f(a) \right)$$

$$[TFC2] \left[\begin{array}{l} f(x) := \frac{x^2}{2} \\ f'(x) := x \\ a := 0 \\ b := 2 \end{array} \right] =$$



$$f(g(x)) \left[\begin{array}{l} f'(x) \\ f'(x) \end{array} \right]$$

PRA CASA:
LEIAM AS SEÇÕES
DO MIRANDA E
DO LEITHOLD
SOBRE REGRA DA
CADEIA E TFC2 -
EU PUS LINKS PRA
ELAS NA PAGINA
DO CURSO - E
FAÇAM TODOS OS
EXERCÍCIOS DELAS
QUE VOCÊS CONSEGUIREM.

LEMBREM QUE
ALGUMAS QUESTÕES
DAS PROVAS VÃO
TESTAR SE VOCÊS
SABEM FAZER
CONTAS MUITO BEM !!
ENTÃO COMEÇEM A
TREINAR!

C2 28/ABRIL/2023

INÍCIO: 14:17 (ACHO)

HOJE: INTEGRAL INDEFINIDA!

UMA INTERPRETAÇÃO PRO "J"

$$\int_{x=0}^{x=2} x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{x=0}^{x=2}$$

$$\int x dx = \frac{x^2}{2}$$

$$[II] \left(\int f'(x) dx = f(x) \right)$$

$$[II] \left[\begin{array}{l} f(x) = x^3 \\ f'(x) = 3x^2 \end{array} \right] =$$

$$\left(\int 3x^2 dx = x^3 \right)$$

$$\int f'(x) dx = f(x)$$

$$42 = 99$$

$$\int 2t \cos(t^2) dt$$

$$r) [8] \left[\begin{array}{l} f(x) = \sqrt{1-x^2} \\ f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right]$$

$$[RC] = \left(f(g(x))' = f'(g(x)) g'(x) \right)$$

$$l) [RC] \left[\begin{array}{l} f(y) := e^y \\ f'(y) := e^y \end{array} \right] = \left(e^{g(x)} \right)' = e^{g(x)} g'(x)$$

$$[II] \left[\begin{array}{l} f(x) := ag(x) \\ f'(x) := ag'(x) \end{array} \right] =$$

$$\left(\int ag'(x) dx = ag(x) \right)$$

$$\int ag'(x) dx \stackrel{(1)}{=} ag(x)$$

$$\int g'(x) dx \stackrel{(2)}{=} g(x)$$

$$a \int g'(x) dx \stackrel{(3)}{=} ag(x)$$

$$\int ag'(x) dx \stackrel{(4)}{=} a \int g'(x) dx$$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

$$\int g(x) + h(x) dx = \int g(x) dx + \int h(x) dx$$

$$\text{JUSTIFICATIVA:} \\ [II] \left[\begin{array}{l} f(x) := ag(x) \\ f'(x) := ag'(x) \end{array} \right]$$

POR (2), MULTIPLICANDO
CADA LADO POR a.

POR (1) e (3)

$$\int 0 dx \stackrel{(1)}{=} 42$$

$$\int 0 dx \stackrel{(2)}{=} 99$$

$$42 \stackrel{(3)}{=} 99$$

$$[II] = \left(\int f'(x) dx = f(x) \right)$$

$$[II] \left[\begin{array}{l} f(x) := \frac{x^2}{2} + C \\ f'(x) := x \end{array} \right] =$$

$$\left(\int x dx = \frac{x^2}{2} + C \right)$$

POR
[II]

POR
[II]

POR (1)

$$-)$$

$$\left. \begin{aligned} & \text{VA:} \\ & \text{ag}(x) \\ & = \text{ag}'(x) \end{aligned} \right\}$$

$$42^{(3)} = 99$$

$$[I I] = \left(\int f'(x) dx = f(x) \right)$$

$$[II] \begin{bmatrix} f(x) := \frac{x^2}{2} + C \\ f'(x) := x \end{bmatrix} =$$

$$\left(\int x \, dx = \frac{x^2}{2} + C \right)$$

POR
[II] $\begin{bmatrix} f(x) := 42 \\ f'(x) := 0 \end{bmatrix}$

POR
[II] $\begin{bmatrix} f(x) := 99 \\ f'(x) := 0 \end{bmatrix}$

por (1) e (2)

Propomos que:

$$f(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$f'(x) = x$$

Sendo:

$$\int f'(x) dx = f(x) + C$$

Logo:

$$\int x \, dx = \int f'(x) \, dx = \int x \, dx = \frac{x^2}{2} + C$$

Antropo Alolo egocentric

$$[II] \begin{bmatrix} f(x) := gh \\ f'(x) := g'h + gh' \end{bmatrix}$$

$$23. \quad = \left(\int g'h + gh' dx = gh \right)$$

$$\int g'h + gh' dx = gh$$

$$\int g'h + gh' dx = \int g'h dx + \int gh' dx$$

$$\int g'h \, dx + \int gh' \, dx = gh$$

$$[IP] = \left(\int g' h dx \right) = g h - \int g h' dx$$

C2 02/MAIO/2023

INÍCIO: 14:13

COMO MUITAS PESSOAS
FALTARAM AS ÚLTIMAS
AULAS HOJE A GENTE VAI
FAZER O SEGUINTE:

REVISÃO RÁPIDA DE
CONTAS FORMAIS -
QUE SÃO AS CONTAS
QUE O MACACO FAZ
SEM CHECAR AS HIPÓ-
TESES, REVISÃO RÁPIDA
DE INTEGRAL INDEFINIDA,
E (SEM SER REVISADO)
INTEGRAÇÃO POR
PARTES.

TODAS AS DÚVIDAS
SÃO BEM VINDAS -
COMO SEMPRE -
MAS AS DÚVIDAS
SOBRE A MATÉRIA
DE HOJE VÃO TER
PRIORIDADE!

A OPERAÇÃO
"DIFERENÇA":

$$F(x) \Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$$

$$[TFC2] = \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(x) dx = f(x) \Big|_{x=a}^{x=b} \right)$$

$$[II] = \left(\int f'(x) dx = f(x) \right)$$

$$[II] \left[\begin{matrix} f(x) := 42 \\ f'(x) := 0 \end{matrix} \right] = \left(\int 0 dx = 42 \right)$$

$$[II] \left[\begin{matrix} f(x) := 99 \\ f'(x) := 0 \end{matrix} \right] = \left(\int 0 dx = 99 \right)$$

ENTÃO: (???)

$$42 = \int 0 dx = 99$$

$$[II] \left[\begin{matrix} f(x) := ag(x) \\ f'(x) := ag'(x) \end{matrix} \right]$$

$$\int ag'(x) dx = ag(x)$$

$$\int g'(x) dx = g(x)$$

$$a \int g'(x) dx = ag(x)$$

$$\int ag'(x) dx = a \int g'(x) dx$$

$$\int ah(x) dx = a \int h(x) dx$$

UMA DAS "PROPRIEDADES
DA INTEGRAL INDEFINIDA".

$$[II] \left[\begin{matrix} f(x) := 4f(x) \\ f'(x) := 4f'(x) \end{matrix} \right] = ?$$

O QUE ACONTECERIA SE
A GENTE USASSE "=" AO
INVÉS DE ":=?"

$$\int f'(x) dx = f(x)$$

$$\int 4f'(x) dx = 4f(x)$$

$$\int 4 \cdot 4f'(x) dx = 4 \cdot 4f(x)$$

$$\int 4 \cdot 4 \cdot 4f'(x) dx = 4 \cdot 4 \cdot 4f(x)$$

$$\int 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4f'(x) dx = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4f(x)$$

$$[II] \left[\begin{matrix} f(x) := af(x) \\ f'(x) := af'(x) \end{matrix} \right] = \left(\int af'(x) dx = a \int f'(x) dx \right)$$

$$\int af'(x) dx \stackrel{(1)}{=} af(x)$$

$$\int f'(x) dx \stackrel{(2)}{=} f(x)$$

$$a \int f'(x) dx \stackrel{(3)}{=} af(x)$$

$$\int af'(x) dx \stackrel{(4)}{=} a \int f'(x) dx$$

$$\int af(x) dx \stackrel{(5)}{=} a \int f(x) dx$$

DEVER DE CASA
(OU PRA AGORA):
DESCUBRAM COMO É
QUE O LEITHOLD E O
MIRANDA PROVAM (5)
A PARTIR DA (4).

$$[II] \left[\begin{matrix} f(x) := f(x) + g(x) \\ f'(x) := f'(x) + g'(x) \end{matrix} \right] = ?$$

$$\int f'(x) + g'(x) dx \stackrel{(6)}{=} f(x) + g(x)$$

$$\int f'(x) dx \stackrel{(7)}{=} f(x)$$

$$\int g'(x) dx \stackrel{(8)}{=} g(x)$$

$$\int f'(x) dx + \int g'(x) dx \stackrel{(9)}{=} f(x) + g(x)$$

$$\int f'(x) + g'(x) dx \stackrel{(10)}{=} \int f'(x) dx + \int g'(x) dx$$

A OPERAÇÃO
"DIFERENÇA":

$$F(x) \Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$$

$$[TFC2] = \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(x) dx = f(x) \Big|_{x=a}^{x=b} \right)$$

$$[II] = \left(\int f'(x) dx = f(x) \right)$$

$$[II] \left[\begin{matrix} f(x) := 42 \\ f'(x) := 0 \end{matrix} \right] = \left(\int 0 dx = 42 \right)$$

$$[II] \left[\begin{matrix} f(x) := 99 \\ f'(x) := 0 \end{matrix} \right] = \left(\int 0 dx = 99 \right)$$

ENTÃO: (???)

$$42 = \int 0 dx = 99$$

$$[II] \left[\begin{matrix} f(x) := ag(x) \\ f'(x) := ag'(x) \end{matrix} \right]$$

$$\int ag'(x) dx = ag(x)$$

$$\int g'(x) dx = g(x)$$

$$a \int g'(x) dx = ag(x)$$

$$\int ag'(x) dx = a \int g'(x) dx$$

$$\boxed{\int ah(x) dx = a \int h(x) dx}$$

UMA DAS "PROPRIEDADES
DA INTEGRAL INDEFINIDA".

$$[II] \left[\begin{matrix} f(x) := 4f(x) \\ f'(x) := 4f'(x) \end{matrix} \right] = ?$$

O QUE ACONTECERIA SE
A GENTE USASSE "=" AO
INVÉS DE ":=?"

$$\begin{array}{l} \int f'(x) dx = f(x) \\ \int 4f'(x) dx = 4f(x) \\ \int 4 \cdot 4f'(x) dx = 4 \cdot 4f(x) \\ \int 4 \cdot 4 \cdot 4f'(x) dx = 4 \cdot 4 \cdot 4f(x) \end{array} \quad \text{||}$$

$$[II] \left[\begin{matrix} f(x) := af(x) \\ f'(x) := af'(x) \end{matrix} \right] = \left(\int af'(x) dx = af(x) \right)$$

$$\int af'(x) dx \stackrel{(1)}{=} af(x)$$

$$\int f'(x) dx \stackrel{(2)}{=} f(x)$$

$$a \int f'(x) dx \stackrel{(3)}{=} af(x)$$

$$\int af'(x) dx \stackrel{(4)}{=} a \int f'(x) dx$$

$$\int af(x) dx \stackrel{(5)}{=} a \int f(x) dx$$

DEVER DE CASA
(OU PRA AGORA):
DESCUBRAM COMO É
QUE O LEITHOLD E O
MIRANDA PROVAM (5)
A PARTIR DA (4).

$$[II] \left[\begin{matrix} f(x) := f(x) + g(x) \\ f'(x) := f'(x) + g'(x) \end{matrix} \right] = ? \quad \leftarrow \text{FAÇAM ISSO AGORA!}$$

$$\int f'(x) + g'(x) dx \stackrel{(6)}{=} f(x) + g(x)$$

$$\int f'(x) dx \stackrel{(7)}{=} f(x)$$

$$\int g'(x) dx \stackrel{(8)}{=} g(x)$$

$$\int f'(x) dx + \int g'(x) dx \stackrel{(9)}{=} f(x) + g(x)$$

$$\int f'(x) + g'(x) dx \stackrel{(10)}{=} \int f'(x) dx + \int g'(x) dx$$

C2 02/MAIO/2023
INÍCIO: 14:13

LEMBRE QUE O MATHOLOGER
ÀS VEZES OMITE OS ARGUMENTOS...
POR EXEMPLO, ELE FAZ:

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$(f+g)' = f' + g'$$

VOU MUDAR A FÓRMULA
BÁSICA DA INTEGRAL
INDEFINIDA PRA ESSA
AQUI:

$$[II] = \left(\int f' dx = f \right)$$

$$[II] \begin{cases} f := gh \\ f' := g'h + gh' \end{cases} = \left(\int g'h + gh' dx = gh \right)$$

$$\int f'g + fg'dx \stackrel{(11)}{=} fg$$

$$\int f'g dx + \int fg'dx \stackrel{(12)}{=} fg$$

$$\int fg'dx \stackrel{(13)}{=} fg - \int f'g dx$$

$$[IP] = \left(\int f g' dx = fg - \int f' g dx \right)$$

$$[IP] \begin{cases} f := x \\ f' := 1 \\ g := e^x \\ g' := e^x \end{cases} = \left(\int \underbrace{x}_{f} \underbrace{e^x}_{g'} dx = \underbrace{x}_{f} \underbrace{e^x}_{g} - \int \underbrace{1}_{f'} \underbrace{e^x}_{g} dx \right)$$

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x}_{f} \underbrace{e^x}_{g'} dx &= \underbrace{x}_{f} \underbrace{e^x}_{g} - \int \underbrace{1}_{f'} \underbrace{e^x}_{g} dx \\ &= x e^x - \int e^x dx \\ &= x e^x - e^x \end{aligned}$$

EXERCÍCIO PRA AGORA:

$$\int \underbrace{x^2}_{f} \underbrace{e^x}_{g'} dx = ?$$

PORQUE É QUE EU
SEMPRE ESCREVO

$$\int 3x^2 dx = x^3$$

$$\int 3x^2 dx = x^3 + C ?$$

É PORQUE PRA MIM CADA
IGUALDADE QUE A GENTE
USA DO CURSO TEM QUE
SER FÁCIL DE TESTAR...

PRA TESTAR UMA IGUALDADE
COMO

$$\int x^4 dx \stackrel{?}{=} x^5$$

A GENTE DERIVA OS DOIS
LADOS DELA E CANCELA
A DERIVADA COM A INTEGRAL:

$$\int x^4 dx \stackrel{?}{=} x^5 \quad \text{É VERDADE SSE}$$

$$(\int x^4 dx)' \stackrel{?}{=} (x^5)', \quad \text{QUE É VERDADE SSE}$$

$$x^4 \stackrel{?}{=} 5x^4$$

$$[IP] = \left(\int f g' dx = f g - \int f' g dx \right)$$

$$[17] \begin{bmatrix} f := x \\ f' := 1 \\ g := e^x \\ g' := e^x \end{bmatrix} = \left(\int \underbrace{x}_{f} \underbrace{e^x}_{g'} dx = \underbrace{x e^x}_{f g} - \int \underbrace{1}_{f'} \underbrace{e^x}_{g} dx \right)$$

$$\int \underbrace{x}_{f} \underbrace{e^x}_{g'} dx = \underbrace{x}_{f} \underbrace{e^x}_{g} - \int \underbrace{1}_{f'} \underbrace{e^x}_{g} dx$$

$$= x e^x - \int e^x dx$$

$$= x e^x - e^x$$

$$\int x e^x = x e^x - e^x$$

EXERCÍCIO PRA AGORA:

$$\int \underbrace{x^2}_{f} \underbrace{e^x}_{g'} dx = ?$$

Porque é que eu
sempre escrevo

$$\int 3x^2 dx = x^3$$

e não

$$\int 3x^2 dx = x^3 + C?$$

é porque pra mim cada
igualdade que a gente
usa no curso tem que
ser fácil de testar...

pra testar uma igualdade
como

$$\int x^4 dx \stackrel{?}{=} x^5$$

A gente deriva os dois
lados dela e cancela
a derivada com a integral:

$$\int x^4 dx \stackrel{?}{=} x^5 \quad \text{é verdade se}$$

$$(\int x^4 dx)' \stackrel{?}{=} (x^5)', \quad \text{que é verdade se}$$

$$x^4 \stackrel{?}{=} 5x^4$$

Acabei de pôr esses
dois links na página
do curso:

2fT23 (p.4): OUTRA DEFINIÇÃO
PRA INTEGRAL
INDEFINIDA

2fT30 (p.11): EXERCÍCIOS
PRA CASA

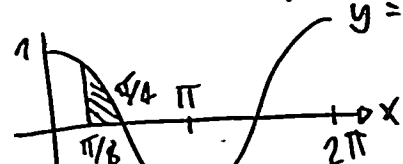
TENTEM FAZER
ESTES EXERCÍCIOS
PRA CASA!!!

C2 / MA10/2023

Início: 14:17

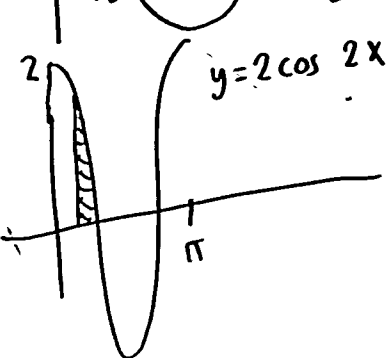
HOJE: MUDANÇA DE VARIÁVEIS!

- ① EU VOU CONVENCER VOCÊS DE QUE A FÓRMULA FUNCIONA,
- ② VOCÊS VÃO FAZER MUITOS EXERCÍCIOS DE APLICAR A FÓRMULA COMO O MACACÔ QUE APLICA UM MÉTODO SEM SABER O QUE ESTÁ FAZENDO!



$$y = \cos x$$

$$\int_{x=\pi/6}^{x=\pi/4} \cos x \, dx$$



$$y = 2 \cos 2x$$

$$\int_{x=\pi/16}^{x=\pi/8} 2 \cos 2x \, dx$$

PÁGINA 1:

A IGUALDADE

(3) É VERDADE

por $[TFCZ] \begin{cases} f(x) := \sin x \\ f'(x) := \cos x \end{cases}$

E A (4) É VERDADE POR:

LEMBRE QUE $[RC] = (f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$
 E $[RC] \begin{cases} f(y) := \sin y \\ f'(y) := \cos y \\ g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \end{cases} = ((\sin 2x)' = (\cos 2x) \cdot 2)$

LEMBRE QUE

$$f(x) \Big|_{x=a}^{x=b} = f(b) - f(a)$$

$$g(u) \Big|_{u=a}^{u=b} = g(b) - g(a)$$

$$g(u) \Big|_{u=2a}^{u=4a} = g(4a) - g(2a)$$

$$\sin 2b - \sin 2a \stackrel{(6)}{=} \sin u \Big|_{u=2a}^{u=2b}$$

$$\sin u \Big|_{u=2a}^{u=2b} \stackrel{(9)}{=} \sin 2b - \sin 2a$$

COMO JUSTIFICAR A (12)?

$$a \stackrel{(8)}{=} b \stackrel{(9)}{=} c \stackrel{(10)}{=} d \stackrel{(11)}{=} e$$

$$a \stackrel{(12)}{=} e \quad \text{por (8), (9), (10) e (11).}$$

PÁGINA 2:

A IGUALDADE (7) É CONSEQUÊNCIA DAS IGUALDADES (3), (4), (5) e (6). ASSIM:

$$a \stackrel{(3)}{=} b \stackrel{(4)}{=} c \stackrel{(5)}{=} d \stackrel{(6)}{=} e$$

EXERCÍCIO PRA AGORA: TENTE JUSTIFICAR AS IGUALDADES (8), (9), (10), (11), (12).



C2 / MA10/2023

Início: 14:17

HOJE: MUDANÇA
DE VARIÁVEIS!

① EU VOU CONVENCER
VOCÊS DE QUE
A FÓRMULA FUNCIONA,

② VOCÊS VÃO FAZER
MUITOS EXERCÍCIOS
DE APLICAR A
FÓRMULA COMO O
MACACO QUE APLICA
UM MÉTODO SEM
SABER O QUE
ESTÁ FAZENDO!

③ ↗ NOS LIVROS!!

$$\int \underbrace{\cos(2x+3)}_u \cdot \underbrace{2}_{\frac{du}{dx}} dx = \int \cos u \cdot du$$
$$= \sin u$$
$$= \sin(2x+3)$$

Lembrem que

$$\int \cos(2x+3) \cdot 2 dx = \sin(2x+3)$$

é verdade se e só se:

$$\cos(2x+3) \cdot 2 = \frac{d}{dx}(\sin(2x+3))$$

$$\int \cos u du = \sin u$$

é verdade se e só se

$$\cos u = \frac{d}{du} \sin u$$

MAIS UM TRUQUE:
A CAIXINHA DE
ANOTAÇÕES SOBRE
UMA MUDANÇA DE
VARIÁVEL.

$$\left[\begin{array}{l} u = 2x+3 \\ \frac{du}{dx} = 2 \\ du = 2 dx \\ \frac{1}{2} du = dx \\ dx = \frac{1}{2} du \end{array} \right]$$

TRUQUE:
A GENTE SÓ PODE
FAZER AFIRMAÇÕES
TIPO $du = 2 dx$
DENTRO DA
CAIXINHA DE
ANOTAÇÕES...
SE VOCÊS QUISER
ENTENDER COMO
ATRIBUIR UM
SIGNIFICADO PARA
 $du = 2 dx$, LEIAM
OS CAPÍTULOS
SOBRE DIFERENCIAIS.

$$\int \underbrace{\cos(2x+3)}_u \cdot \underbrace{dx}_{\frac{1}{2} du} = \int (\cos u) \cdot \frac{1}{2} du$$
$$= \frac{1}{2} \int \cos u du$$
$$= \frac{1}{2} \sin u$$
$$= \frac{1}{2} \sin(2x+3)$$

FAÇAM OS EXERCÍCIOS DAS
PÁGINA 196 DO MIRANDA!

Des/Am

Alc

C2 9/MAIO/2023

INÍCIO: 14:17

HOJE: COMO A GENTE USA A MUDANÇA DE VARIÁVEL NA PRÁTICA; INTEGRAÇÃO DE POTÊNCIAS DE SENOS E COSSENOIS; INTRODUÇÃO À SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMETRICA.

TUDO QUE A GENTE VAI VER HOJE - FORA OS EXERCÍCIOS - ESTÁ NO PDF SOBRE MUDANÇA DE VARIÁVEIS!

$$\begin{aligned} \int 2 \cos(3x+4) dx &= \int 2(\cos u) \cdot \frac{1}{3} du \\ &= \frac{2}{3} \int \cos u du \\ &= \frac{2}{3} \sin u \\ &= \frac{2}{3} \sin(3x+4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{x=a}^{x=b} 2 \cos(3x+4) dx &= \int_{u=3a+4}^{u=3b+4} 2(\cos u) \cdot \frac{1}{3} du \\ &= \frac{2}{3} \int_{u=3a+4}^{u=3b+4} \cos u du \\ &= \frac{2}{3} \left(\sin u \right) \Big|_{u=3a+4}^{u=3b+4} \\ &= \frac{2}{3} \left(\sin(3x+4) \right) \Big|_{x=a}^{x=b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= 3x+4 \\ \frac{du}{dx} &= \frac{d}{dx}(3x+4) = 3 \\ \frac{du}{dx} &= 3 \\ du &= 3dx \\ 3dx &= du \\ dx &= \frac{1}{3} du \end{aligned}$$

P.12:

$$[II] = \left(\int f'(x) dx = f(x) \right)$$

$$\int 0 dx \stackrel{(1)}{=} 42$$

$$\int 0 dx \stackrel{(2)}{=} 99$$

$$42 \stackrel{(3)}{=} 99$$



$$\begin{aligned} \int_{x=a}^{x=b} 0 dx &\stackrel{(4)}{=} 42 \Big|_{x=a}^{x=b} \\ \int_{x=a}^{x=b} 0 dx &\stackrel{(5)}{=} 99 \Big|_{x=a}^{x=b} \\ 42 \Big|_{x=a}^{x=b} &\stackrel{(6)}{=} 99 \Big|_{x=a}^{x=b} \end{aligned}$$

① EXERCÍCIO: VERIFIQUEM A IGUALDADE (6).

PÁGINA 9:

$$\begin{aligned} \int (\sin \theta)^4 (\cos \theta)^7 d\theta &= \int (\sin \theta)^4 (\cos \theta)^6 \cos \theta d\theta \\ &= \int (\sin \theta)^4 ((\cos \theta)^2)^3 \cos \theta d\theta \\ &= \int (\sin \theta)^4 (1 - (\sin \theta)^2)^3 \cos \theta d\theta \\ &= \int s^4 (1 - s^2)^3 ds \\ &= \int s^4 (1 - 3s^2 + 3s^4 - s^6) ds \\ &= \int s^4 - 3s^6 + 3s^8 - s^{10} ds \\ &= \frac{1}{5} s^5 - \frac{3}{7} s^7 + \frac{3}{9} s^9 - \frac{1}{11} s^{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin \theta &= s \\ \frac{ds}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta} \sin \theta = \cos \theta \\ ds &= \cos \theta d\theta \\ \cos \theta d\theta &= ds \\ (\cos \theta)^2 &= 1 - (\sin \theta)^2 \\ (\cos \theta)^2 &= 1 - s^2 \\ (\cos \theta)^6 &= (1 - s^2)^3 \end{aligned}$$

② EXERCÍCIO:

RESOLVA ESTA INTEGRAL:

$$\int \sin \theta \cos \theta d\theta$$

E TESTE O SEU RESULTADO.

③ EXERCÍCIO:

RESOLVA ESTA INTEGRAL:

$$\int (\cos \theta)^2 (\sin \theta)^3 d\theta$$

AQUI VOCÊ VAI PRECISAR DE UMA CAIXINHA DE ANOTAÇÕES QUE VAI COMEÇAR COM $c = \cos \theta$, E VOCÊ VAI PRECISAR CONSTRUIR ELA VOCÊ MESMO.

DEPOIS TESTE O SEU RESULTADO.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(1-b)^3 = 1^3 - 3 \cdot 1^2 \cdot b + 3 \cdot 1 \cdot b^2 - b^3$$

$$= 1 - 3b + 3b^2 - b^3$$

$$(1-s^2)^3 = 1 - 3s^2 + 3s^4 - s^6$$

$$\begin{aligned} \int 3s^6 ds &= \frac{1}{7} 3s^7 \\ [II] \left[\begin{array}{l} f(x) = \frac{3}{7} x^7 \\ f'(x) = 3x^6 \end{array} \right] &= \int 3x^6 dx \end{aligned}$$

$$\cos(3x+4) dx$$

$$3x+4$$

$$2(\cos u) \cdot \frac{1}{3} du$$

$$3x+4$$

$$u=3x+4$$

$$\cos u du$$

$$u=3x+4$$

$$\left(\sin u \right) \Big|_{u=3x+4}^{u=3x+4}$$

$$\left(\sin(3x+4) \right) \Big|_{x=a}^{x=b}$$

$$\frac{1}{3} \left(\sin(3x+4) \right) \Big|_{x=a}^{x=b}$$

$$\frac{1}{3} \left(\sin(3x+4) \right) \Big|_{x=a}^{x=b}$$

$$\frac{1}{3} \left(\sin(3x+4) \right) \Big|_{x=a}^{x=b}$$

$$\frac{1}{3} \left(\sin(3x+4) \right) \Big|_{x=a}^{x=b}$$

$$\frac{1}{3} \left(\sin(3x+4) \right) \Big|_{x=a}^{x=b}$$

$$\frac{1}{3} \left(\sin(3x+4) \right) \Big|_{x=a}^{x=b}$$

$$\frac{1}{3} \left(\sin(3x+4) \right) \Big|_{x=a}^{x=b}$$

$$\frac{1}{3} \left(\sin(3x+4) \right) \Big|_{x=a}^{x=b}$$

$$\frac{1}{3} \left(\sin(3x+4) \right) \Big|_{x=a}^{x=b}$$

$$\frac{1}{3} \left(\sin(3x+4) \right) \Big|_{x=a}^{x=b}$$

$$\frac{1}{3} \left(\sin(3x+4) \right) \Big|_{x=a}^{x=b}$$

$$\frac{1}{3} \left(\sin(3x+4) \right) \Big|_{x=a}^{x=b}$$

$$\frac{1}{3} \left(\sin(3x+4) \right) \Big|_{x=a}^{x=b}$$

$$\frac{1}{3} \left(\sin(3x+4) \right) \Big|_{x=a}^{x=b}$$

$$\frac{1}{3} \left(\sin(3x+4) \right) \Big|_{x=a}^{x=b}$$

$$\frac{1}{3} \left(\sin(3x+4) \right) \Big|_{x=a}^{x=b}$$

$$\frac{1}{3} \left(\sin(3x+4) \right) \Big|_{x=a}^{x=b}$$

$$\frac{1}{3} \left(\sin(3x+4) \right) \Big|_{x=a}^{x=b}$$

$$\frac{1}{3} \left(\sin(3x+4) \right) \Big|_{x=a}^{x=b}$$

$$\frac{1}{3} \left(\sin(3x+4) \right) \Big|_{x=a}^{x=b}$$

$$\frac{1}{3} \left(\sin(3x+4) \right) \Big|_{x=a}^{x=b}$$

P.12:

$$[II] = \left(\int f'(x) dx = f(x) \right)$$

$$\int 0 dx \stackrel{(1)}{=} 42$$

$$\int 0 dx \stackrel{(2)}{=} 99$$

$$42 \stackrel{(3)}{=} 99$$



$$\int_{x=2}^{x=b} 0 dx \stackrel{(4)}{=} 42 \Big|_{x=2}^{x=b}$$

$$\int_{x=2}^{x=b} 0 dx \stackrel{(5)}{=} 99 \Big|_{x=2}^{x=b}$$

$$42 \Big|_{x=2}^{x=b} \stackrel{(6)}{=} 99 \Big|_{x=2}^{x=b}$$

① EXERCÍCIO:
VERIFIQUEM
A IGUALDADE (6).

PÁGINA 9:

$$\int (\sin \theta)^4 (\cos \theta)^7 d\theta$$

$$= \int (\sin \theta)^4 (\cos \theta)^6 \cos \theta d\theta$$

$$= \int (\sin \theta)^4 ((\cos \theta)^2)^3 \cos \theta d\theta$$

$$= \int (\sin \theta)^4 (1 - (\sin \theta)^2)^3 \cos \theta d\theta$$

$$= \int s^4 (1 - s^2)^3 ds$$

$$= \int s^4 (1 - 3s^2 + 3s^4 - s^6) ds$$

$$= \int s^4 - 3s^6 + 3s^8 - s^{10} ds$$

$$= \frac{1}{5} s^5 - \frac{3}{7} s^7 + \frac{3}{9} s^9 - \frac{1}{11} s^{11}$$

$$\left[\begin{aligned} \sin \theta &= s \\ \frac{ds}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta} \sin \theta = \cos \theta \\ ds &= \cos \theta d\theta \\ \cos \theta d\theta &= ds \\ (\cos \theta)^2 &= 1 - (\sin \theta)^2 \\ (\cos \theta)^2 &= 1 - s^2 \\ (\cos \theta)^6 &= (1 - s^2)^3 \end{aligned} \right]$$

② EXERCÍCIO:

RESOLVA ESTA INTEGRAL:

$$\int \sin \theta \cos \theta d\theta$$

E TESTE O SEU RESULTADO.

③ EXERCÍCIO:

RESOLVA ESTA INTEGRAL:

$$\int (\cos \theta)^2 (\sin \theta)^3 d\theta$$

AQUI VOCÊ VAI PRECISAR

DE UMA CAIXINHA DE

ANOTAÇÕES QUE VAI

COMEÇAR COM $c = \cos \theta$,

E VOCÊ VAI PRECISAR

CONSTRUIR ELA VOCÊ MESMO.

DEPOIS TESTE

O SEU

RESULTADO.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(1-b)^3 = 1^3 - 3 \cdot 1^2 b + 3 \cdot 1 \cdot b^2 - b^3$$

$$= 1 - 3b + 3b^2 - b^3$$

$$(1-s^2)^3 = 1 - 3s^2 + 3s^4 - s^6$$

$$\int 3s^6 ds = \frac{3}{7} s^7$$

$$[II] \left[\begin{aligned} f(x) &:= \frac{3}{7} x^7 \\ f'(x) &:= 3x^6 \end{aligned} \right] = \left(\int 3x^6 dx = \frac{3}{7} x^7 \right)$$

$$\int x^4 dx = \frac{1}{5} x^5$$

$$x^4 \stackrel{?}{=} \frac{d}{dx} \frac{1}{5} x^5$$

$$= \frac{1}{5} x^4$$

C2 12/MAIO/2023

INÍCIO: 14:12

HOJE: SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA E DERIVADA DA FUNÇÃO INVERSA!

ISSO AQUI É UM PRIMEIRO EXEMPLO DE SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} ds = \frac{1}{\cos \theta} \cos \theta d\theta$$

$$= \int 1 d\theta$$

$$= \theta$$

$$= \arcsen s$$

ESSE EXEMPLO TÁ NA P.10 DO PDF DE MUDANÇA DE VARIÁVEIS. ELE USA UMA CAIXINHA DE ANOTAÇÕES ENORME:

$$\left[\begin{array}{l} s = \sin \theta \\ \frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \sin \theta = \cos \theta \\ ds = \cos \theta d\theta \\ s^2 = (\sin \theta)^2 \\ 1-s^2 = 1-(\sin \theta)^2 \\ 1-s^2 = (\cos \theta)^2 \\ \sqrt{1-s^2} = \cos \theta \\ \arcsen s = \arcsen \sin \theta \\ \arcsen s = \theta \end{array} \right]$$

COMO É QUE A GENTE TESTA ISTO?

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} ds \stackrel{?}{=} \arcsen s$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-s^2}} \stackrel{?}{=} \frac{d}{ds} \arcsen s$$

$$\left[\begin{array}{l} f(g(x)) = x \\ \frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{d}{dx} x = 1 \\ \frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) g'(x) \\ f'(g(x)) g'(x) = 1 \\ g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \end{array} \right] = [DFI]$$

$$[DFI] \left[\begin{array}{l} g(x) := \ln x \\ g'(x) := \ln' x \\ f(x) := e^x \\ f'(x) := e^x \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} e^{\ln x} = x \\ \frac{d}{dx} e^{\ln x} = \frac{d}{dx} x = 1 \\ \frac{d}{dx} e^{\ln x} = e^{\ln x} \ln' x \\ e^{\ln x} \ln' x = 1 \\ \ln' x = \frac{1}{e^{\ln x}} \end{array} \right]$$

$$[DFI] \left[\begin{array}{l} g(x) := \arcsen x \\ g'(x) := \arcsen' x \\ f(x) := \sin x \\ f'(x) := \cos x \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \sin \arcsen x = x \\ \frac{d}{dx} \sin \arcsen x = \frac{d}{dx} x = 1 \\ \frac{d}{dx} \sin \arcsen x = (\cos \arcsen x) (\arcsen' x) \\ (\cos \arcsen x) (\arcsen' x) = 1 \\ \arcsen' x = \frac{1}{\cos \arcsen x} \end{array} \right]$$

$$\ln' x \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{e^{\ln x}}$$

$$e^{\ln x} \stackrel{(2)}{=} x$$

$$\ln' x \stackrel{(3)}{=} \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx} \ln x \stackrel{(4)}{=} \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} (\cos \theta)^2 &\stackrel{(5)}{=} 1 - (\sin \theta)^2 \\ (\cos \theta) &\stackrel{(6)}{=} \sqrt{1 - (\sin \theta)^2} \end{aligned}$$

$$[\theta := \arcsen x]$$

$$\cos(\arcsen x) \stackrel{(7)}{=} \sqrt{1 - (\sin(\arcsen x))^2}$$

$$\cos(\arcsen x) \stackrel{(8)}{=} \sqrt{1-x^2}$$

$$\arcsen' x \stackrel{(9)}{=} \frac{1}{\cos \arcsen x}$$

$$\arcsen' x \stackrel{(10)}{=} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arcsen' s = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}$$

$$\frac{d}{ds} \arcsen s = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}$$

QUAIS SÃO AS COISAS ÚTEIS QUE A GENTE VAI APRENDER HOJE?

① AS P1 SEMPRE TEM UMA QUESTÃO DE SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA.

② LEMBREM QUE O IDEAL É NÓS VIRARMOS PRODUTORES DE FÓRMULAS AO INVÉS DE SIMPLES CONSUMIDORES DE FÓRMULAS! A GENTE VER COMO RECONSTRUIR ESSAS FÓRMULAS A PARTIR DE VAGAS LEMBRANÇAS.

③ SUBST. TRIG. TEM ALGUMAS APLICAÇÕES EM FÍSICA.

$$\ln' x \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{e^{\ln x}}$$

$$e^{\ln x} \stackrel{(2)}{=} x$$

$$\ln' x \stackrel{(3)}{=} \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx} \ln x \stackrel{(4)}{=} \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} (\cos \theta)^2 &\stackrel{(5)}{=} 1 - (\sin \theta)^2 \\ (\cos \theta) &\stackrel{(6)}{=} \sqrt{1 - (\sin \theta)^2} \end{aligned}$$

$$[\theta := \arcsen x]$$

$$\cos(\arcsen x) \stackrel{(7)}{=} \sqrt{1 - (\sin(\arcsen x))^2}$$

$$\cos(\arcsen x) \stackrel{(8)}{=} \sqrt{1 - x^2}$$

$$\arcsen' x \stackrel{(9)}{=} \frac{1}{\cos \arcsen x}$$

$$\arcsen' x \stackrel{(10)}{=} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\arcsen' s = \frac{1}{\sqrt{1 - s^2}}$$

$$\frac{d}{ds} \arcsen s = \frac{1}{\sqrt{1 - s^2}}$$

$$\begin{aligned} \bar{x} x &= 1 \\ \ln x \ln' x &= 1 \\ x &= \frac{1}{\ln' x} \\ x &= \frac{1}{e^{\ln x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \arcsen x &= x \\ \arcsen x &= \frac{d}{dx} x = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\arcsen x) (\arcsen' x) &= 1 \\ \arcsen' x &= \frac{1}{\cos \arcsen x} \end{aligned}$$

QUAIS SÃO AS COISAS ÚTEIS QUE A GENTE VAI APRENDER HOJE?

① AS PQ SEMPRE TÊM UMA QUESTÃO DE SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA.

② LEMBREMOS QUE O IDEAL É NÓS VIRARMOS PRODUTORES DE FÓRMULAS AO INVÉS DE SIMPLES CONSUMIDORES DE FÓRMULAS!

A GENTE VER COMO RECONSTRUIR ESSAS FÓRMULAS A PARTIR DE VAGAS LEMBRANÇAS.

③ SUBST. TRIG. TEM ALGUMAS APLICAÇÕES EM FÍSICA.

$$\underbrace{\cos \theta}_{-1} = \underbrace{\sqrt{1 - (\underbrace{\sin \theta}_0)^2}}_1$$

F

A PARTIR DAQUI NÓS VAMOS TRATAR OS SÍMBOLOS s, c, z, t COMO ABREVIATURAS...

$$\begin{aligned} s &= \sin \theta \\ c &= \cos \theta \\ z &= \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{1}{c} \\ t &= \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{s}{c} \end{aligned}$$

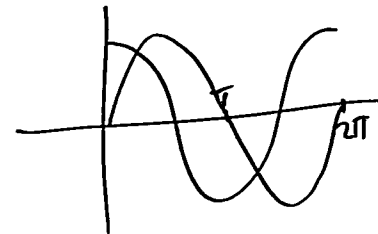
$$\begin{aligned} s^2 + c^2 &= 1 \\ s^2 &= 1 - c^2 & s &= \sqrt{1 - c^2} \\ c^2 &= 1 - s^2 & c &= \sqrt{1 - s^2} \end{aligned}$$

$$z^2 = \frac{1}{c^2} = \frac{s^2 + c^2}{c^2} = \frac{s^2}{c^2} + \frac{c^2}{c^2} = t^2 + 1$$

$$t^2 = \frac{s^2}{c^2}$$

$$z^2 = t^2 + 1 \quad z = \sqrt{t^2 + 1}$$

$$z^2 - 1 = t^2 \quad t = \sqrt{z^2 - 1}$$



EXERCÍCIO:

A GENTE VIU QUE $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsen x$.

RESOLVA ESTA INTEGRAL:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}} dx$$

DICA: FAÇA DUAS MUDANÇAS DE VARIÁVEIS - A PRIMEIRA VAI SER $U=3x$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{1}{3} du$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$$

$$= \frac{1}{3} \arcsen u \quad \left(\begin{array}{l} \text{POR } \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsen x, \\ \text{COM } [x:=u] \end{array} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \arcsen 3x$$

C2 16/MAIO/2023

INÍCIO: 14:14

HOJE: MAIS SOBRE
SUBSTITUIÇÃO TRIGONÔ-
MÉTRICA ("ST")!!!

PRA QUE SERVE
APRENDER ST?

① SE A SUA MEMÓRIA
FOR MÉRVEL VOCÊ
VAI APRENDER UM
MÉTODO PRA SIMPLI-
FICAR INTEGRAIS
CUJOS TERMOS
MALVADOS SEJAM
ASSIM,

CASO 1: $\sqrt{a^2 - b^2 x^2}$

CASO 2: $\sqrt{a^2 + b^2 x^2}$

CASO 3: $\sqrt{b^2 x^2 - a^2}$

E ESSE MÉTODO VAI
TER ALGUMAS APLICA-
ÇÕES...

② SE A SUA MEMÓRIA
FOR RUIM VOCÊ VAI
APRENDER ESSE MÉTODO
E OU VAI ESQUECER
ELE LOGO DEPOIS
OU ELE VAI FICAR
ENTULHANDO A SUA
CABEÇA.

③ SE A SUA MEMÓRIA
FOR MUITO RUIM
VOCÊ VAI APRENDER
UM MONTE DE TÉCNI-
CAS ÚTEIS, E VAI
APRENDER A RECON-
STRUI-LAS A PARTIR
DE VAGAS LEMBRANÇAS.

(a) COMO SIMPLIFICAR
INTEGRAIS COM
ESTES TERMOS
MALVADOS DAQUI
EM

(b) VAMOS MELHORAR
UM POUCO A
NOSSA NOÇÃO DE
"INTEGRAL MAIS
SIMPLES",

(c) VOCÊS VÃO TREINAR
DEMONSTRAR AS
PRÓPRIAS FÓRMULAS.

$\int x \sqrt{1-x^2} dx$ → QUASE!
EXERCÍCIO!
 $\int x^a \sqrt{1-x^2} dx$

LEMBRANDO...

$$\begin{aligned} s &= \sin \theta \\ \sqrt{1-s^2} &= \cos \theta \\ \frac{ds}{d\theta} &= \cos \theta \\ ds &= \cos \theta d\theta \\ \theta &= \arcsin s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin \theta &= s \\ (\cos \theta)^2 &= 1 - (\sin \theta)^2 = 1 - s^2 \\ \frac{ds}{d\theta} &= \cos \theta \\ \cos \theta d\theta &= ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= c \\ (\sin \theta)^2 &= 1 - (\cos \theta)^2 = 1 - c^2 \\ \frac{dc}{d\theta} &= -\sin \theta \\ \sin \theta d\theta &= (-1) dc = -dc \end{aligned}$$

NOVIDA

$$\begin{aligned} t &= \tan \theta \\ \sqrt{1+t^2} &= \sec \theta \\ \frac{dt}{d\theta} &= \sec^2 \theta \\ dt &= \sec^2 \theta d\theta \end{aligned}$$

LEMBRE DESSAS
ABREVIATURAS DA
AULA PASSADA:

$$\begin{aligned} s &= \sin \theta \\ c &= \cos \theta \\ z &= \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{1}{c} \\ t &= \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{s}{c} \end{aligned}$$

$$s^2 + c^2 = 1$$

① EXERCÍCIO:
RESOLVA

$$\int x \sqrt{1-x^2} dx$$

LEMBRE QUE:

$$\int s \sqrt{1-s^2} ds$$

$$= \int \sin \theta \cos \theta \cos \theta d\theta$$

$$\int s^{20} \sqrt{1-s^2} ds$$

$$= \int (\sin \theta)^{20} (\cos \theta)^{19} \cos \theta d\theta$$

$$= \int (\sin \theta)^{20} (\cos \theta)^{100} d\theta$$

EXERCÍCIO:

MOSTRE COMO TRANSFORMAR

$$\int s^a \sqrt{1-s^2} ds$$

EM ALGO PARECIDO COM

$$\int (\sin \theta)^a (\cos \theta)^b d\theta$$

A GENTE VIU QUE:

$$z^2 = \frac{1}{c^2} = \frac{s^2 + c^2}{c^2} = \frac{s^2}{c^2} + \frac{c^2}{c^2} = t^2 + 1$$

$$\begin{aligned} z^2 &= t^2 + 1 & z &= \sqrt{t^2 + 1} \\ z^2 - 1 &= t^2 & t &= \sqrt{z^2 - 1} \end{aligned}$$

ISSO AQUI É NOVO...

LEMBRE QUE:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{1'g - 1g'}{g^2} = \frac{0g - g'}{g^2} = -\frac{g'}{g^2}$$

ENTÃO:

$$t' = \left(\frac{s}{c}\right)' = \frac{s'c - sc'}{c^2} = \frac{c(-s) - (-s)c}{c^2} = \frac{-cs + sc}{c^2} = \frac{0}{c^2} = 0$$

$$z' = \left(\frac{1}{c}\right)' = \frac{c' - (-s)}{c^2} = \frac{-s}{c^2} = -\frac{1}{c} \frac{s}{c} = -zt$$

③ SE A SUA MEMÓRIA FOR MUITO RUIM VOCÊ VAI APRENDER UM MONTE DE TÉCNICAS ÚTEIS, E VAI APRENDER A RECONSTRUI-LAS A PARTIR DE VAGAS LEMBRANÇAS.

② COMO SIMPLIFICAR INTEGRAIS COM ESTES TERMOS MALVADOS DAQUI EM

VARIOS PASSOS,
⑥ VAMOS MELHORAR UM POUCO A NOSSA NOÇÃO DE "INTEGRAL MAIS SIMPLES",

⑦ VOCÊS VÃO TREINAR DEMONSTRAR AS PRÓPRIAS FÓRMULAS.

$$\int x \sqrt{1-x^2} dx \quad \text{QUASE! EXERCÍCIO!}$$

$$\int x^4 \sqrt{1-x^2} dx$$

LEMBRANDO...

$$\begin{aligned} s &= \sin \theta \\ \sqrt{1-s^2} &= \cos \theta \\ \frac{ds}{d\theta} &= \cos \theta \\ ds &= \cos \theta d\theta \\ \theta &= \arcsin s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin \theta &= s \\ (\cos \theta)^2 &= 1 - (\sin \theta)^2 = 1 - s^2 \\ \frac{ds}{d\theta} &= \cos \theta \\ \cos \theta d\theta &= ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= c \\ (\sin \theta)^2 &= 1 - (\cos \theta)^2 = 1 - c^2 \\ \frac{dc}{d\theta} &= -\sin \theta \\ \sin \theta d\theta &= (-1) dc \end{aligned}$$

NOVIDADE:

$$\begin{aligned} t &= \tan \theta \\ (\tan \theta)^2 + 1 &= (\sec \theta)^2 \\ \sqrt{(\tan \theta)^2 + 1} &= \sec \theta \\ \sqrt{t^2 + 1} &= \sec \theta \\ dt &= (\sec \theta)^2 d\theta \end{aligned}$$

LEMBRE DESSAS ABREVIATURAS DA AULA PASSADA:

$$\begin{aligned} s &= \sin \theta \\ c &= \cos \theta \\ z &= \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{1}{c} \\ t &= \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{s}{c} \end{aligned}$$

A GENTE VIU QUE:

$$z^2 = \frac{1}{c^2} = \frac{s^2 + c^2}{c^2} = \frac{s^2}{c^2} + \frac{c^2}{c^2} = t^2 + 1$$

$$\begin{aligned} z^2 &= t^2 + 1 & z &= \sqrt{t^2 + 1} \\ z^2 - 1 &= t^2 & t &= \sqrt{z^2 - 1} \end{aligned}$$

ISSO AQUI É NOVO...

LEMBRE QUE:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{1'g - 1g'}{g^2} = \frac{0g - g'}{g^2} = -\frac{g'}{g^2}$$

ENTÃO:

$$t' = \left(\frac{s}{c}\right)' = \frac{s'c - sc'}{c^2} = \frac{cc - s(-s)}{c^2} = \frac{c^2 + s^2}{c^2} = \frac{1}{c^2} = z^2$$

$$z' = \left(\frac{1}{c}\right)' = \frac{c'}{c^2} = \frac{(-s)}{c^2} = -\frac{s}{c^2} = -\frac{1}{c} \frac{s}{c} = -zt$$

$$\frac{dt}{d\theta} = z^2 \quad \frac{dt}{dz} = z^2 d\theta$$

① EXERCÍCIO: RESOLVA

$$\int x \sqrt{1-x^2} dx$$

LEMBRE QUE:

$$\int s \sqrt{1-s^2} ds$$

$$= \int \sin \theta \cos \theta \cos \theta d\theta$$

$$\int s^{20} \sqrt{1-s^2} ds$$

$$= \int (\sin \theta)^{20} (\cos \theta)^{19} \cos \theta d\theta$$

$$= \int (\sin \theta)^{20} (\cos \theta)^{100} d\theta$$

EXERCÍCIO:

MOSTRE COMO TRANSFORMAR

$$\int s^4 \sqrt{1-s^2} ds$$

EM ALGO PARECIDO COM

$$\int (\sin \theta)^7 (\cos \theta)^8 d\theta$$

C2 19/MAIO/2023

INÍCIO: 17:20

MODE: FRAÇÕES PARCIAIS -
QUE A GENTE VAI TRATAR
COMO UMA DESCULPA PRA
GENTE APRENDER COISAS
SOBRE POLINÔMIOS!

OBS: VOCÊS DEVEM TER
VISTO NO PDF DE DICAS
PRA P1 QUE NA P1
VA TER UMA QUESTÃO
TIPO ISSO AQUI:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{b+a}{ab}$$

$$\int \frac{ax+b}{cx^2+dx+e} dx$$

DÊEM UMA OLHA NA P. 4
DO PDF SOBRE FRAÇÕES
PARCIAIS...

$$\begin{array}{r} 11 \\ 42 \\ + 99 \\ \hline 141 \end{array} + \begin{array}{r} 4x^1 + 2x^0 \\ 9x^1 + 9x^0 \\ \hline 13x^1 + 11x^0 \end{array} + \begin{array}{r} 42 \\ 99 \\ \hline 1311 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x + 2 \\ x^1 + 2x^0 \\ 1x^1 + 2x^0 \\ 1x + 2 \end{array}$$

$$\boxed{1} \boxed{2}$$

$$4x^3 + 5x = \boxed{4} \boxed{0} \boxed{5} \boxed{0}$$

$$\boxed{1} \boxed{2} = 1x^1 + 2x^0$$

$$\boxed{999} \boxed{42} = 999x^1 + 42x^0$$

$$42 = \boxed{42}$$

$$C = \boxed{C}$$

$$0 = \boxed{0}$$

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\begin{aligned} & 1000x^2 + 100x + 10 + \frac{2}{x+3} + \frac{4}{x-5} \\ &= \boxed{1000} \boxed{0} \boxed{0} + \boxed{100} \boxed{0} + \boxed{10} + \frac{\boxed{2}}{\boxed{1} \boxed{3}} + \frac{\boxed{4}}{\boxed{1} \boxed{5}} \\ &= \boxed{1000} \boxed{100} \boxed{10} + \boxed{2} \cdot \boxed{1} \boxed{-5} + \boxed{4} \cdot \boxed{1} \boxed{-3} \\ &= \boxed{1000} \boxed{100} \boxed{10} \cdot \boxed{1} \boxed{-2} \boxed{-15} + \boxed{2} \boxed{-10} + \boxed{4} \boxed{12} \\ &= \boxed{1000} \boxed{-1900} \boxed{-15190} \boxed{-1520} \boxed{-150} + \boxed{6} \boxed{2} \\ &= \boxed{1000} \boxed{-1900} \boxed{-15190} \boxed{-1514} \boxed{-148} \\ &= \boxed{1} \boxed{-2} \boxed{-15} \end{aligned}$$

1 2

= 4 0 5 0

$1x^1 + 2x^0$

$999x^1 + 42x^0$

$42 = 42$

$C = C$

$0 = 0$

$$\begin{aligned}
 & 1000x^2 + 100x + 10 + \frac{2}{x+3} + \frac{4}{x-5} \\
 &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1000 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 100 & 0 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 10 \\ \hline \end{array} + \frac{\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array}} + \frac{\begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & -5 \\ \hline \end{array}} \\
 &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1000 & 100 & 10 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & -5 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} \\
 &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1000 & 100 & 10 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & -2 & -15 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & -10 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 12 \\ \hline \end{array} \\
 &= \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1000 & -1900 & -15190 & -1520 & -150 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 2 \\ \hline \end{array} \\
 &= \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1000 & -1900 & -15190 & -1514 & -148 \\ \hline \end{array} \\
 &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & -2 & -15 \\ \hline \end{array}
 \end{aligned}$$

$100x$

$100x + 0$

$100x + 0 \cdot 1$

$100x^1 + 0x^0$

$\begin{array}{|c|c|} \hline 100 & 0 \\ \hline \end{array}$

$0 = 0 \cdot 1 = 0 \cdot x^0$

$$2(x-5) = 2x - 10$$

$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1000 & 100 & 10 \\ \hline \end{array}$

$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & -2 & -15 \\ \hline \end{array}$

$\begin{array}{|c|c|c|} \hline -15000 & -1500 & -150 \\ \hline \end{array}$

$\begin{array}{|c|c|c|} \hline -2000 & -200 & -20 \\ \hline \end{array}$

$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1000 & 100 & 10 \\ \hline \end{array}$

$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1000 & -1900 & -15190 & -1520 & -150 \\ \hline \end{array}$

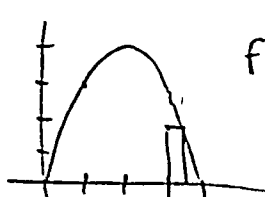
$$\begin{array}{|c|c|} \hline 100 & 1 \\ \hline \end{array} = 100x^1 + 1x^0 = 100x + 1$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 100 & 0 \\ \hline \end{array} = 100x^1 + 0x^0 = 100x$$

C2 23/MAIO/2023

INÍCIO: 14:20

HOJE A GENTE VAI VER UM DOS ASSUNTOS DO CURSO QUE VÃO SER MAIS ÚTEIS PARA OUTRA MATÉRIAS - COMO ENTENDER DEFINIÇÕES COMPLICADAS VISUALIZANDO O QUE ELAS "QUEREM DIZER" - MAS ISSO VAI VALER POUCOS PONTOS NA PROVA.



$$f(x) = 4 - (x-2)^2$$

JEITO BURRO VS JEITO LÉPITO

$$f(3.5)(3.5-3.0) = (4 - (3.5-2)^2)(3.5-3.0) =$$

TUDO QUE A GENTE VAI VER E FAZER HOJE VAI ESTAR NO PDFZINHO SOBRE SOMAS DE RIEMANN EM BREVE... MAS TEM POUCO COISA NELE POR ENQUANTO!

PRÓXIMO ASSUNTO: PARTIÇÕES.

$$P = \{2, 4, 7, 9\}$$

$$x_0, x_1, x_2, x_3$$

$$a_1, b_1$$

$$a_2, b_2$$

$$a_3, b_3$$

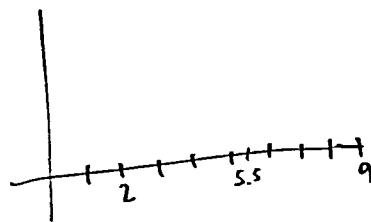
$$a$$

$$b$$

$$N=3$$

$$[2, 9] = [2, 4] \cup [4, 7] \cup [7, 9]$$

$$[2, 9]_2 = \{2, 5.5, 9\}$$



$$[2, 10]_4 =$$

$$\frac{13-2}{4} = \frac{9}{4}$$

$$[2, 13]_4 =$$

$$\{2, 2+\frac{9}{4}, 2+2\frac{9}{4}, 2+3\frac{9}{4}, 2+4\frac{9}{4}\}$$

2fT93:

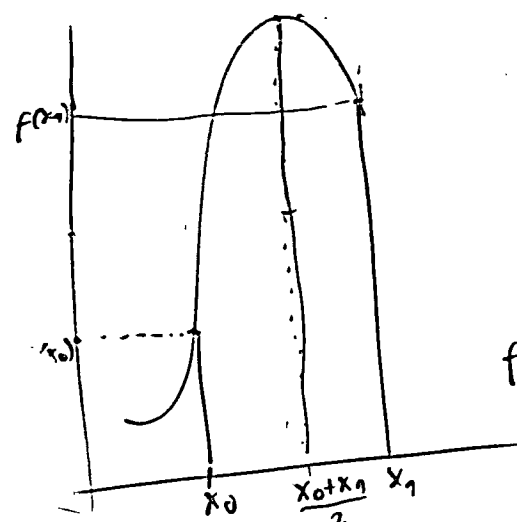
$$[a, b]_N$$

$$i \quad a_i \quad b_i \quad I_i$$

$$1 \quad 2 \quad 4 \quad [2, 4]$$

$$2 \quad 4 \quad 7 \quad [4, 7]$$

$$3 \quad 7 \quad 9 \quad [7, 9]$$

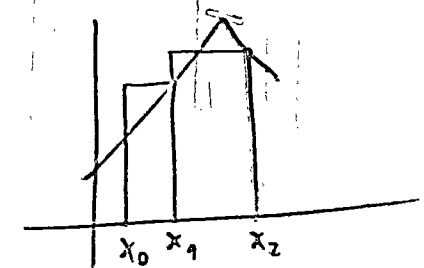


$$f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)$$

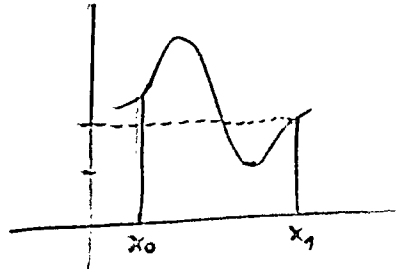
$$\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}$$

$$\frac{A}{x-3} = \frac{A(x+s)}{(x-3)(x+s)}$$

$$\sum_{i=1}^2 \max(f(x_{i-1}), f(x_i)) (x_i - x_{i-1}) = \max(f(x_0), f(x_1)) (x_1 - x_0) + \max(f(x_1), f(x_2)) (x_2 - x_1)$$



$$\{20, 42\} = \{+2, +2, 20\}$$



$$\min(f(x_0), f(x_1))$$

$$\min_{x \in [x_0, x_1]} f(x)$$

2fT93:

$[a, b]_N$

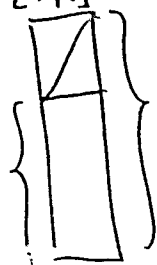
$$\frac{A}{x-3} = \frac{A(x+s)}{(x-3)(x+s)}$$

PRÓXIMO ASSUNTO:
PARTIÇÕES.

$i \quad a_i \quad b_i \quad I_i$

1	2	4	$[2, 4]$
2	4	7	$[4, 7]$
3	7	9	$[7, 9]$

$N=3$



$$P = \{2, 4, 7, 9\}$$

$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3$
 $a_1 \quad b_1$
 $a_2 \quad b_2$
 $a_3 \quad b_3$
 $a \quad b$

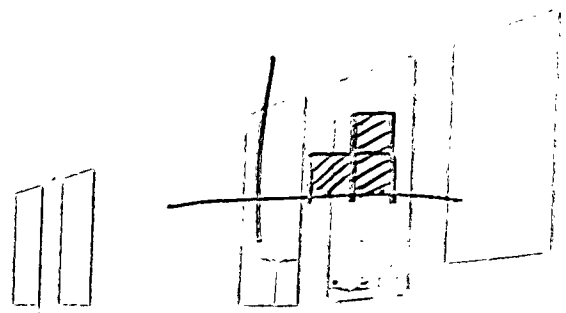
$$[2, 9] = [2, 4] \cup [4, 7] \cup [7, 9]$$

$$[2, 9]_2 = \{2, 5.5, 9\}$$

$$\sum_{i=1}^2 \max(f(x_{i-1}), f(x_i)) (x_i - x_{i-1})$$

$$= \max(f(x_0), f(x_1)) (x_1 - x_0)$$

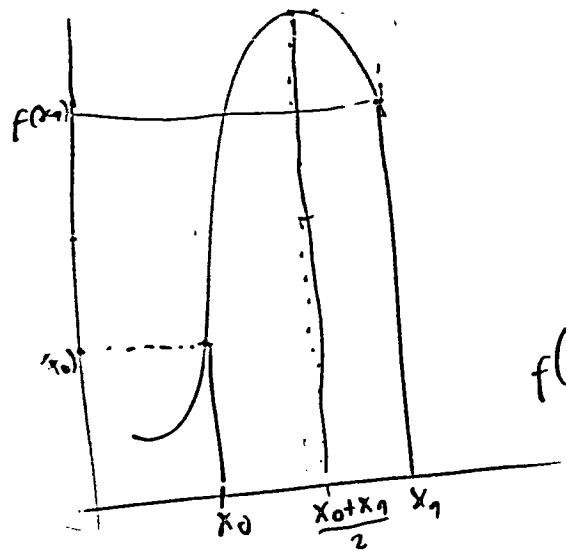
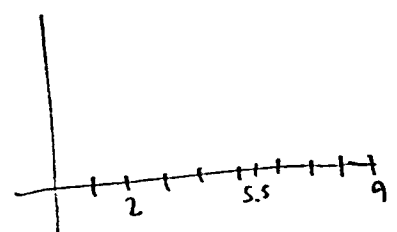
$$+ \max(f(x_1), f(x_2)) (x_2 - x_1)$$



$$\{20, 42\} = \{42, 42, 20\}$$

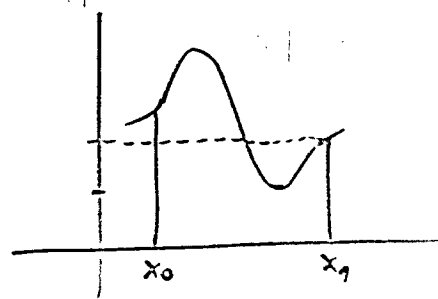
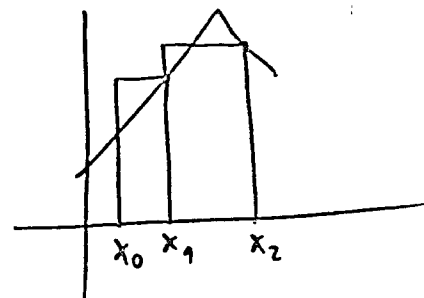
$$-(x-2)^2$$

ESTAR



$$f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)$$

$$\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}$$



$$\min(f(x_0), f(x_1))$$

$$\min_{x \in [x_0, x_1]} f(x)$$

$$[2, 10]_4 =$$

$$[2, 13]_4 =$$

$$\left\{2, 2+\frac{9}{4}, 2+2\frac{9}{4}, 2+3\frac{9}{4}, 2+4\frac{9}{4}\right\}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{13}$$

$$\frac{13-2}{4} = \frac{9}{4}$$

C2 26/MAIO/2023

INÍCIO: 14:22

ACESSEM O PDFZINHO SOBRE SOMAS DE RIEMANN! EU PUS UM MONTE DE MATERIAL NOVO NELAS!

LEMBREM QUE DÚVIDAS SOBRE MATÉRIA ANTIGA SÃO SEMPRE BEM VINDAS, MAS DÚVIDAS SOBRE A MATÉRIA DE HOJE TÊM PRIORIDADE!

O MIRANDA USA ISTO AQUI PRA DEFINIR A MELHOR APROXIMAÇÃO POR RETÂNGULOS POR BAIXO:

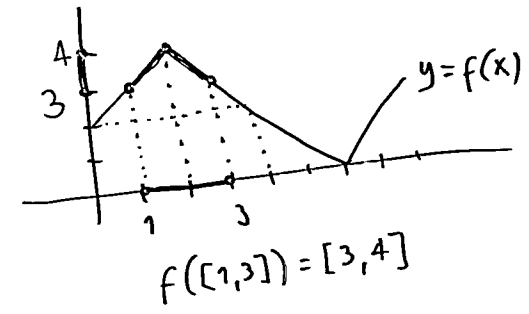
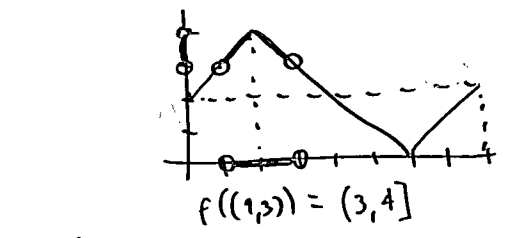


$\min_{x \in [a, b]} f(x)$

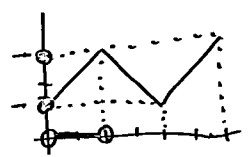
$$\sup f([a, b]) = \{f(x) | x \in [a, b]\}$$

$$\inf f([a, b])$$

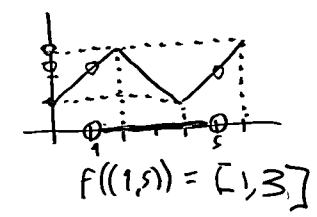
COMECEM FAZENDO OS EXERCÍCIOS SOBRE IMAGENS DE INTERVALOS DAS PÁGINAS 13 E 14 DO PDFZINHO DE HOJE!



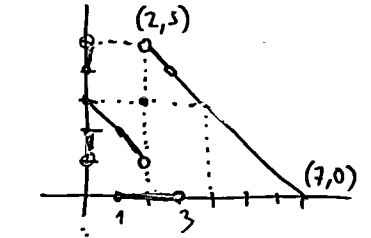
$(x, f(x))$
 $f(x)$



$[1, 3]$
 $(1, 3)$



PÁGINA 15:



$B = [1, 3]$

$$C = \{(x, f(x)) | x \in B\}$$

$$D = \{f(x) | x \in B\}$$

$$D' = \{y \in \mathbb{R} | \exists x \in B. f(x) = y\}$$

$$L = \{y \in \mathbb{R} | \forall d \in D. y \leq d\}$$

$$U = \{y \in \mathbb{R} | \forall d \in D. d \leq y\}$$

$$\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

$$\forall a \in [2, 3, 5]. a^2 < 10 = (a^2 < 10) [a := 2]$$

$$\wedge (a^2 < 10) [a := 3]$$

$$\wedge (a^2 < 10) [a := 5]$$

$$= (2^2 < 10)$$

$$\wedge (3^2 < 10)$$

$$\wedge (5^2 < 10)$$

$$= \underbrace{V \wedge V \wedge F}_V$$

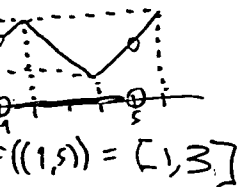
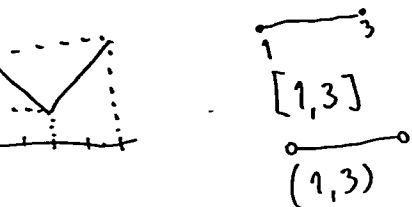
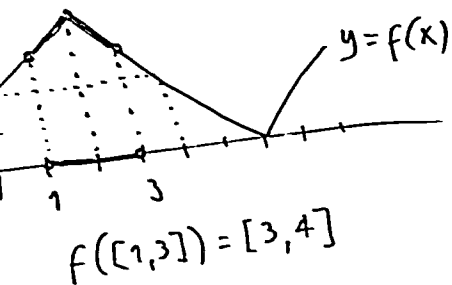
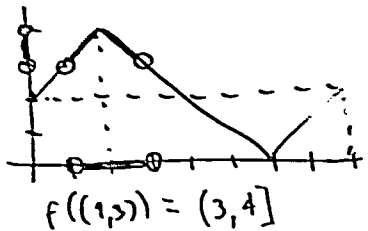
$$= F$$

p. 18:

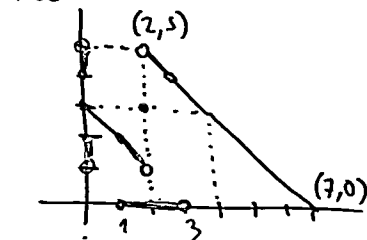
	1	2	3	4	5	6	7
$2 \notin X$	F	V	V	V	V	V	V
$x < 4$	V	V	V	F	F	F	F
$2 \leq x < 4$	F	V	V	F	F	F	F

$$\underbrace{2^2}_{4} < 10$$

V



PÁGINA 95:



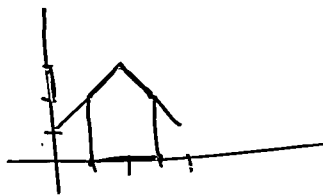
$$C = \{(x, f(x)) \mid x \in B\}$$

$$D = \{f(x) \mid x \in B\}$$

$$D' = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in B. f(x) = y\}$$

$$L = \{y \in \mathbb{R} \mid \forall d \in D. y \leq d\}$$

$$U = \{y \in \mathbb{R} \mid \forall d \in D. d \leq y\}$$



$$\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

$$\forall a \in [2, 3, 5]. a^2 < 10 = (a^2 < 10) [a := 2]$$

$$\wedge (a^2 < 10) [a := 3]$$

$$\wedge (a^2 < 10) [a := 5]$$

$$= (2^2 < 10)$$

$$\wedge (3^2 < 10)$$

$$\wedge (5^2 < 10)$$

$$= \underbrace{V \wedge V \wedge F}_F$$

$$= F$$

P. 18:

	1	2	3	4	5	6	7
$2 \leq X$	F	V	V	V	V	V	V
$X < 4$	V	V	V	F	F	F	F
$2 \leq X < 4$	F	V	V	F	F	F	F

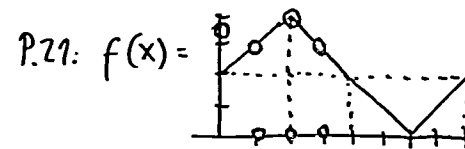
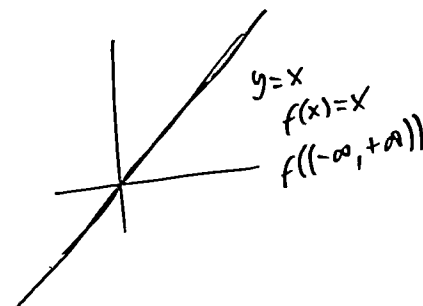
$$\underbrace{2^2}_{4} < 10$$

$$F \wedge F = F$$

$$F \wedge V = F$$

$$V \wedge F = F$$

$$V \wedge V = V$$



$$P(y) = \forall x \in [1, 2, 3]. f(x) < y$$

$$P(3.5) = \forall x \in [1, 2, 3]. f(x) < 3.5$$

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{f(1)}_{(1,0)} \wedge \underbrace{f(2)}_{(2,0)} \wedge \underbrace{f(3)}_{(3,0)}}_{\wedge (x, f(x))}}_{\wedge (y, y)}$$

$$\underbrace{f(1) < 3.5}_{\wedge (1,0)} \wedge \underbrace{f(2) < 3.5}_{\wedge (2,0)} \wedge \underbrace{f(3) < 3.5}_{\wedge (3,0)}$$

$$\underbrace{0 \wedge 0 \wedge 0}_0$$

$$\forall x \in [3, 5]. f(x) < 1.5$$

C2 30/MAIO/2023

INÍCIO: 14:12

HOJE: P1!

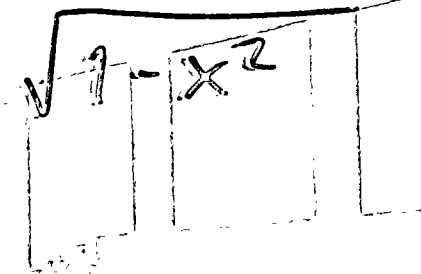
VOU PÔR A PONTUAÇÃO
CERTA DE CADA QUESTÃO
NO QUADRO DAQUI A
POUÇO! NA VERSÃO DA
PROVA QUE VOCÊS RECEBERAM
A PONTUAÇÃO ESTÁ ERRADA!

A PONTUAÇÃO
"CERTA" É
ESSA AQUI:

- | | |
|--------|--------|
| 1) 2.5 | 4) 1.5 |
| 2) 2.5 | 5) 1.0 |
| 3) 2.5 | |

DICA:

$$\frac{d}{dx} \arcsen x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



$$2x + 4$$

$$(x+2)(x+2)$$

$$(x+2)$$

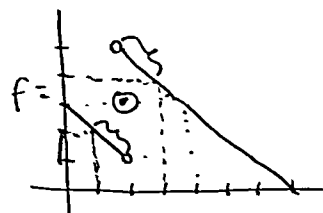
$$(x+2)$$

C2 2/JUN/2023

Início: 14:28

HOJE A GENTE VAI
USAR AS 3 ÚLTIMAS
PÁGINAS DO PDF
QUE EU MANDEI AGORA
NA POUCA - PÁGINAS
26, 27, 28...

Item (a) da p. 26:



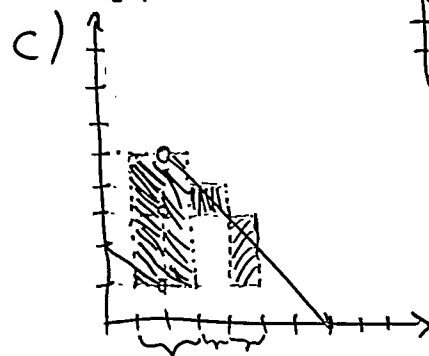
$$P = \{1, 3, 4, 5\}$$

$$a) \int_P f(x) dx$$

Por enquanto faça

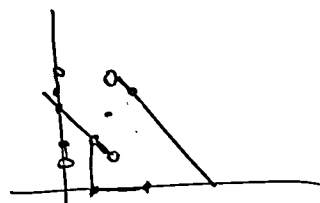
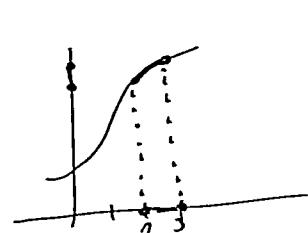
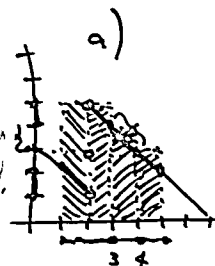
$$\text{isto aqui: } \sup f([2, 3]) = \max_{x \in [2, 3]} f(x)$$

$$\inf f([2, 3]) = \min_{x \in [2, 3]} f(x)$$

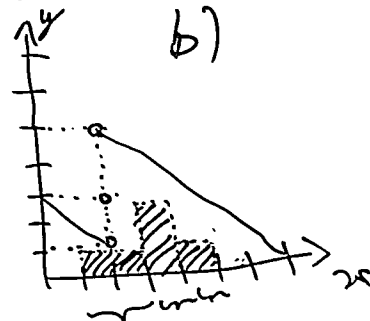


$$\max_{x \in [2, 3]} f(x) \quad \min_{x \in [2, 3]} f(x)$$

$$\sup f([2, 3])$$



b)



$$\int_P f(x) dx \quad ; \quad P = \{1, 3, 4, 5\} \quad a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 4, a_4 = 5$$

$$[1, 3] \cup [3, 4] \cup [4, 5]$$

$$= [sup]_P$$

$$= \sum_{i=1}^N \sup(f([a_i, b_i])) \cdot (b_i - a_i)$$

$$= \underbrace{\sup(f([1, 3]))}_{\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)} \cdot (3-1) + \underbrace{\sup(f([3, 4]))}_{4} \cdot (4-3)$$

$$= 5 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 10 + 4 = 14$$

$$\inf(f([1, 3])) \cdot (3-1) + \inf(f([3, 4])) \cdot (4-3) + \inf(f([4, 5])) \cdot (5-4)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \cdot (3-1) + \dots$$

$$\int_P f(x) dx \quad ; \quad P = \{1, 3, 4, 5\} \quad a_1 = 1 \quad b_1 = 3$$

$$[1, 3] \cup [3, 4] \cup [4, 5] \quad a_2 = 3 \quad b_2 = 4$$

$$a_3 = 4 \quad b_3 = 5$$

$$= [\sup]_P$$

$$= \sum_{i=1}^N \sup(f([a_i, b_i])) \cdot (b_i - a_i)$$

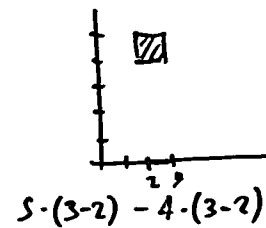
$$= \sup(f([1, 3])) \cdot (3-1) + \sup(f([3, 4])) \cdot (4-3) + \sup(f([4, 5])) \cdot (5-4)$$

$$\underbrace{\underbrace{\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)}_5 \cdot \underbrace{(3-1)}_{3-1}}_{\substack{(1,2] \cup \{3\} \cup [4,5] \\ \downarrow \\ [1,2] \cup \{3\} \cup [4,5]}} + \underbrace{4 \cdot 1}_{[3,4]} + \underbrace{3 \cdot 1}_{[3,2]}$$

$$\inf(f([1, 3])) \cdot (3-1) + \inf(f([3, 4])) \cdot (4-3) + \inf(f([4, 5])) \cdot (5-4)$$

$$\underbrace{(1,2] \cup \{3\} \cup [4,5]}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \cdot (3-1) +$$



C2 6/JUN/2023

INÍCIO: 14:37

AINDA NÃO CORRIGI AS PROVAS! A VISTA PODE SER FEITA EM QUALQUER AVLA ANTES DA P2 OU POR TELEGRAM/WHATSAPP!

HOJE:

- FUNÇÕES NÃO INTEGRÁVEIS
- PORQUE O TFC1 É VERDADE?

SE VOCÊS FOREM LER ALGUM LIVRO DE MATEMÁTICA SÉRIO ELE PROVA CADA PROPRIEDADE ANTES DE USÁ-LA... SE VOCÊS FOREM LER ALGUM LIVRO MUITO SÉRIO, COMO O DE ANÁLISE DO ROSS, ELE VAI PULAR TODAS AS GAMBARRAS E PROVAR TUDO QUE PODE SER PROVADO FORMALMENTE NA ORDEM.

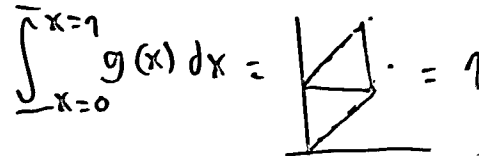
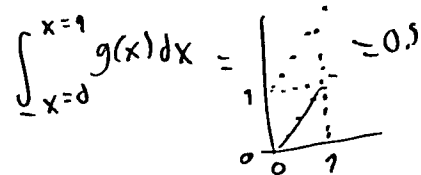
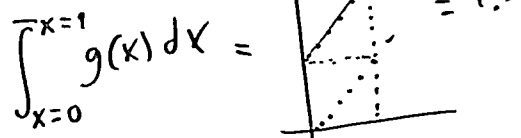
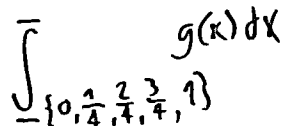
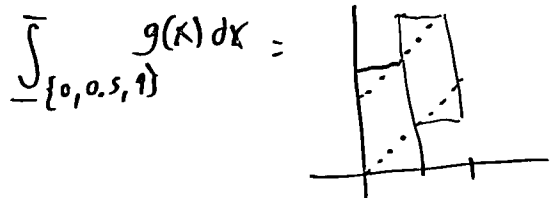
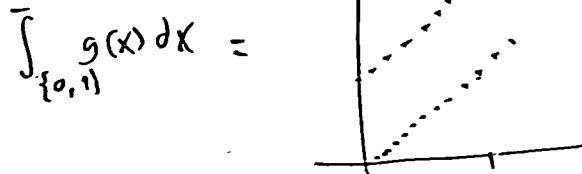
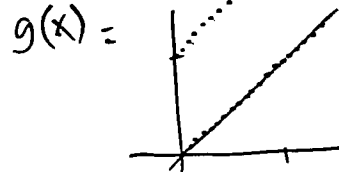
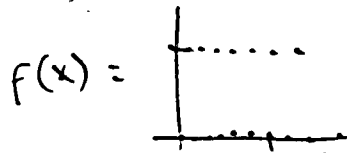
A GENTE NÃO VAI FAZER ISSO, MAS UMA DAS COISAS QUE A GENTE VAI VER HOJE É COMO VISUALIZAR A PROVA DE QUE O TFC1 É VERDADE.

LEMBREM QUE $\mathbb{Q}$ (OS RACIONAIS) É $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (OS IRRAÇIONAIS)

SE ALTERNAM FREQUENTEMENTE...

SEJAM $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{QUANDO } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{QUANDO } x \text{ FOR IRRAÇIONAL} \end{cases}$

$g(x) = x + f(x)$



PÁGINA 11:

$$\left(\int_{x=0}^{x=1} g(x) dx \text{ EXISTE} \right) = \underbrace{\left(\int_{x=0}^{x=1} g(x) dx = 0 \right)}_F$$

TFC1

DIGAMOS QUE $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ É INTEGRÁVEL (EM $[a,b]$) - OU SEJA: $\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx$ EXISTE

DIGAMOS QUE $c \in [a,b]$ E QUE $F(x) = \int_{t=c}^{t=x} f(t) dt$.

A "FÓRMULA" DO TFC1 É $\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$

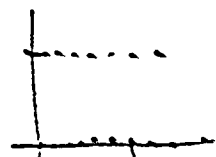
TFC1, VERSÃO 2:

DIGAMOS QUE $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, f É CONTÍNUA (EM $[a,b]$) $c \in [a,b]$, $F(x) = \int_{t=c}^{t=x} f(t) dt$

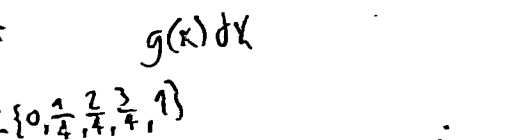
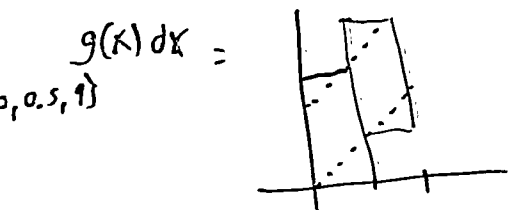
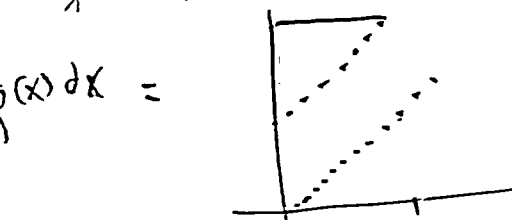
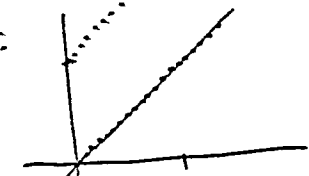
ENTÃO: $\forall x \in (a,b)$ TEMOS $F'(x) = f(x)$.

COMO É QUE A GENTE DEMONSTRA ISSO? OU MELHOR, COMO É QUE A GENTE VISUALIZA AS CONTAS DA DEMONSTRAÇÃO?

$$F'(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F(x+\epsilon) - F(x)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{t=c}^{t=x+\epsilon} f(t) dt - \int_{t=c}^{t=x} f(t) dt}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{t=x}^{t=x+\epsilon} f(t) dt}{\epsilon}$$



$$\int_{x=0}^{x=1} g(x) dx = \text{Area of rectangle} = 1$$



$$\int_{x=0}^{x=1} g(x) dx = 1.5$$

$$\int_{x=0}^{x=1} g(x) dx = 0.5$$

PÁGINA 11:

$$\left(\int_{x=0}^{x=1} g(x) dx \text{ EXISTE} \right) = \left(\underbrace{\int_{x=0}^{x=1} g(x) dx = 0}_{\substack{\text{INDEFINIDO,} \\ \text{DAI} \in \mathbb{R}}} \right) = \underbrace{1}_F$$

TFC 1

DIGAMOS QUE $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ É INTEGRÁVEL (em $[a, b]$) - OU SEJA: $\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx$ EXISTE

DIGAMOS QUE $c \in [a, b]$ E QUE $F(x) = \int_{t=c}^{t=x} f(t) dt$.

A "FÓRMULA" DO TFC 1 É $\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$

TFC 1, VERSÃO 2:

DIGAMOS QUE:

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,

f É CONTÍNUA (em $[a, b]$)

$c \in [a, b]$,

$$F(x) = \int_{t=c}^{t=x} f(t) dt$$

ENTÃO:

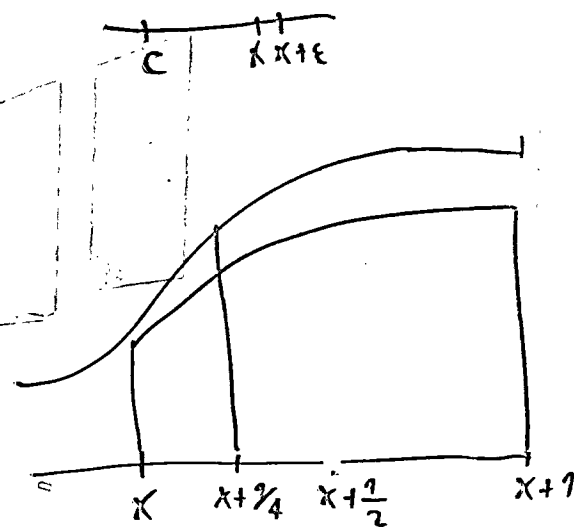
$\forall x \in (a, b)$ TEMOS

$$F'(x) = f(x).$$

COMO É QUE A GENTE DEMONSTRA ISSO? OU MELHOR, COMO É QUE A GENTE VISUALIZA AS CONTAS DA DEMONSTRAÇÃO?

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F(x+\epsilon) - F(x)}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{t=c}^{t=x+\epsilon} f(t) dt - \int_{t=c}^{t=x} f(t) dt}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{t=x}^{t=x+\epsilon} f(t) dt}{\epsilon} \end{aligned}$$

$$\frac{a}{1/4} = a \cdot 4$$



LINK: 2eT72

C2 13/JUN/2023

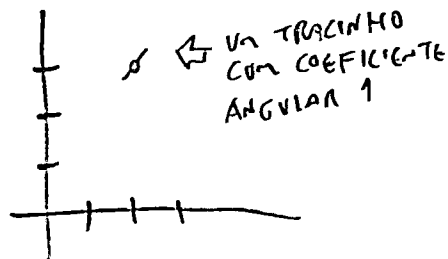
INÍCIO: 14:16

HOJE: MAIS UMA APLICAÇÃO BIZARRA DE "dx"s e "dy"s: EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS COM VARIÁVEIS SEPARÁVEIS!

A GENTE VIU COMO PEGAR PONTOS DE CURVAS E OUTROS COEFICIENTES ANGULARES... HOJE A GENTE VAI VER COMO COMEÇAR COM PONTOS E COEFICIENTES ANGULARES E OUTRAS CURVAS.

EXEMPLO: SE $x=2$,
 $y=f(x)=3$
 $\frac{dy}{dx} = f'(x)=1$,

ISSO QUER DIZER QUE A CURVA VAI PASSAR PELO PONTO (2,3) COM COEFICIENTE ANGULAR 1... O DESENHO É ESTE:



EXERCÍCIO: REPRESENTAR NUM GRÁFICO SÓ TODOS ESTES PONTOS COM COEFICIENTES ANGULARES - CADA UM VAI VIRAR UM TRACINHO.

x	f(x)	f'(x)
1	1	0
2	1	-1
2	2	1
1	2	-2

AGORA CLIQUEM NO LINK 2J7293...

O EXERCÍCIO QUE A GENTE VAI FAZER AGORA ESTÁ NA P. 296

DO PDF, QUE É A PÁGINA 5 DE UM PDFZINHO CHAMADO

2021-2-C2-edovs.

O TÍTULO DO SLIDE ANTERIOR É "CAMPOS DE DIREÇÕES".

EXERCÍCIO 2:

- $y = x^2$
- $y = \sqrt{x}$
- $y = 1/x$
- $y = \sqrt{1-x^2}$

← QUAIS DESTAS CURVAS PODERAM SER SOLUÇÕES DE CADA ITEM DO EXERCÍCIO 1?

ELAS ERAM:

a) $\frac{dy}{dx} = -1$

b) $\frac{dy}{dx} = x$

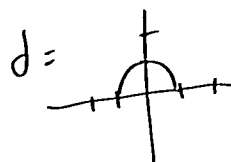
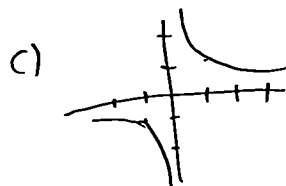
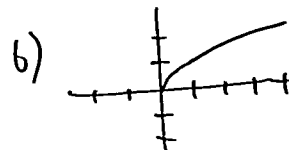
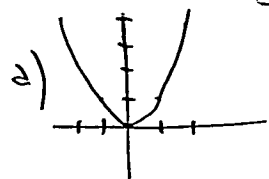
c) $\frac{dy}{dx} = 2x$

d) $\frac{dy}{dx} = -x/y$

e) $\frac{dy}{dx} = 1/y$

f) $\frac{dy}{dx} = 2/y$

g) $\frac{dy}{dx} = -y/x$



$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

$$h(y)dy = g(x)dx$$

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx$$

$$H(y) + C_1 = G(x) + C_2$$

$$H(y) + C_1 = G(x) + C_2$$

$$H(y) = G(x) + C_2 - C_1$$

$$= G(x) + C_3$$

$$H^{-1}(H(y)) = H^{-1}(G(x) + C_3)$$

$$y = G(x) + C_3$$

[EDOVs]

$$d) \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$f'(x) = -\frac{x}{f(x)}$$

$$\text{Se } g(x) = -2x$$

$$\text{e } h(y) = 2y$$

$$\text{então } \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{-2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

$$[EDOVs] \begin{bmatrix} g(x) := -2x \\ h(y) := 2y \\ G(x) := -x^2 \\ H(y) := y^2 \\ H^{-1}(u) := \sqrt{u} \end{bmatrix} =$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y}$$

$$2y dy = -2x dx$$

$$\int 2y dy = \int -2x dx$$

$$y^2 + C_1 = -x^2 + C_2$$

$$y^2 = -x^2 + C_2 - C_1$$

$$= -x^2 + C_3$$

$$\sqrt{y^2} = \sqrt{-x^2 + C_3}$$

$$y = \sqrt{-x^2 + C_3}$$

... ISTO ME DIZ QUE

$$y = \sqrt{-x^2 + C_3}$$

"DEVE" SER SOLUÇÃO

$$\text{DA EDO } \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \dots$$

$$\text{OU SEJA, DE } f'(x) = -\frac{x}{f(x)}$$

EXERCÍCIO: TESTEM SE É SOLUÇÃO DE (1.1.1)

$$\left(f'(x) = -\frac{x}{f(x)} \right) \begin{bmatrix} f(x) \\ f'(x) \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIO:
REPRESENTAR NUM
GRÁFICO SÓ
TODOS ESTES
PONTOS COM
COEFICIENTES
ANGULARES -
CADA UM VAI
VIRAR UM
TRIACINHO.

X	f(x)	f'(x)
1	1	0
2	1	-1
2	2	1
1	2	-2

AGORA CLIQUEM
NO LINK

2dT293...
O EXERCÍCIO QUE
A GENTE VAI
FAZER AGORA
ESTÁ NA P. 296

DO PDF, QUE É A
PÁGINA 5 DE UM
PDFZINHO CHAMADO

2021-2-C2-edovs.

O TÍTULO DO SLIDE ANTERIOR
É "CAMPOS DE DIREÇÕES".

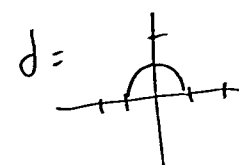
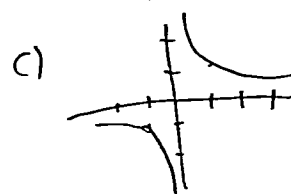
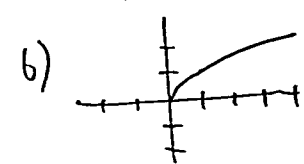
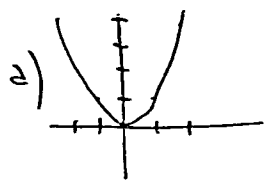
EXERCÍCIO 2:

a) $y = x^2$

b) $y = \sqrt{x}$

c) $y = 1/x$

d) $y = \sqrt{1-x^2}$



← QUAIS DESTAS
CURVAS PODER
SER SOLUÇÕES
DE CADA
ITEM DO
EXERCÍCIO 1?

ELAS ERAM:

a) $\frac{dy}{dx} = -1$

b) $\frac{dy}{dx} = x$

c) $\frac{dy}{dx} = 2x$

d) $\frac{dy}{dx} = -x/y$

e) $\frac{dy}{dx} = 1/y$

f) $\frac{dy}{dx} = 2/y$

g) $\frac{dy}{dx} = -y/x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

$$h(y)dy = g(x)dx$$

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx$$

$$H(y) + C_1 = G(x) + C_2$$

$$H(y) + C_1 = G(x) + C_2$$

$$H(y) = G(x) + C_2 - C_1$$

$$= G(x) + C_3$$

$$H^{-1}(H(y)) = H^{-1}(G(x) + C_3)$$

$$y = G(x) + C_3$$

$$[EDOVs]$$

$$d) \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$f'(x) = -\frac{x}{f(x)}$$

$$Se g(x) = -2x$$

$$e h(y) = 2y$$

$$e' TAO \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{-2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

$$[EDOVs] \begin{bmatrix} g(x) & 2x \\ h(y) & -2y \\ G(x) & -x^2 \\ H(y) & y^2 \\ H^{-1}(u) & \sqrt{u} \end{bmatrix} =$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y}$$

$$2ydy = -2xdx$$

$$\int 2ydy = \int -2xdx$$

$$y^2 + C_1 = -x^2 + C_2$$

$$y^2 = -x^2 + C_2 - C_1$$

$$= -x^2 + C_3$$

$$\sqrt{y^2} = \sqrt{-x^2 + C_3}$$

$$y = \sqrt{-x^2 + C_3}$$

$$[EDOVs]$$

$$y = \sqrt{-x^2 + C_3}$$

$$"DEVE" SER SOLUÇÃO$$

$$DA EDO \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \dots (*)$$

$$OU SEJA, DE f'(x) = -\frac{x}{f(x)} (***)$$

$$EXERCÍCIO: TESTEM SE (*)$$

$$E' SOLUÇÃO DE (***) \dots FASAM ISTO AQUI:$$

$$\left(f'(x) = -\frac{x}{f(x)} \right) \left[\begin{matrix} f(x) := \sqrt{-x^2 + C_3} \\ f'(x) := \end{matrix} \right] =$$

$$f^{-1}(f(x)) =$$

$$\arcsen \sen \theta = \theta$$

$$\sen^{-1} \sen \theta =$$

$$\sen^{-1} x = \arcsen x //$$

$$\sen^{-1} x = \frac{1}{\sen x} //$$

C2 16/JUN/2023

INÍCIO: 14:12

HOJE: MAIS COISAS
SOBRE EQUAÇÕES
DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS
(EDOs) COM VARIÁVEIS
SEPARÁVEIS (EDOVs).

SE VOCÊS QUISEREM
ENTENDER DIREITO
O QUE EDOS SÃO,
PORQUE É QUE ELAS
TÊM ZILHÕES DE
APLICAÇÕES NO
"MUNDO REAL", É PORQUE É
QUE A GAMBARIARRA DESSOS
PASSOS AQUI

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

$$h(y)dy = g(x)dx$$

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx$$

FUNCIONA, EU RECOMENDO
QUE VOCÊS DEEM UMA
OLHADA EM DOIS LIVROS
DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
QUE TEM NA BIBLIOTECA:
O ZILL/CULLEN E O
BOYCE/DIPRIMA... EU
TROUXE ELIS PRA VOCÊS
DAREM UMA OLHADA
RAPIDA E PUS UM SCAN
DE UMA PARTE DO
ZILL/CULLEN NA PÁGINA
DO CURSO.

... MAS EU NÃO
SOU NEM FÍSICO
E NEM ENGENHEIRO,
ENTÃO PRA MIM É
NESSE CURSO A

COISA MAIS INTERESSANTE
E IMPORTANTE DE
EDOVs É O QUE
ESTÁ NESTE LINK
AQUI:

2fT13S

EM TODO PROBLEMA
INTERESSANTE SOBRE
EDOVs AS PESSOAS
TÊM QUE LIDAR COM
VÁRIAS SOLUÇÕES,
DIFERENTES, E AI
ELAS ESCRIVEM
COISAS COMO

$$H(x) = \sqrt{x}$$

$$H(x) = \sqrt{x-3}$$

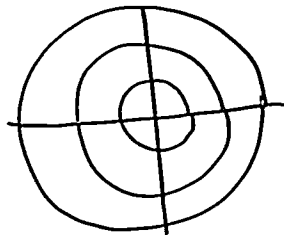
E AI ELAS SE
CONFUNDEM, ERRAM
TUDO, E PERDEM
MILHARES DE
PONTOS.

PRA EVITAR ISSO
EU RESOLVI
OBRIGAR AS PESSOAS

A APRENDEREM A
USAR COISAS COMO
"SE", "ENTÃO", "PORTANTO",
E "QUEREMOS QUE"...

$$y^2 = -x^2 + C_3$$

$$x^2 + y^2 = C_3$$

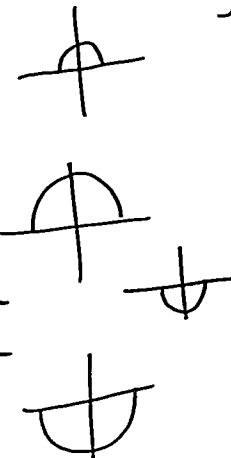


$$y = \sqrt{1-x^2}$$

$$y = \sqrt{4-x^2}$$

$$y = -\sqrt{1-x^2}$$

$$y = -\sqrt{4-x^2}$$



"DESCOBRIR A SOLUÇÃO
GERAL DA EDO (x)
E A SOLUÇÃO PARTICULAR
QUE PASSA PELO PONTO
(4,3)"

AS SOLUÇÕES GERAIS
DESSA EDO DAQUI

VÃO SER:

$$y = \sqrt{C_3 - x^2}$$

$$y = -\sqrt{C_3 - x^2}$$

A SOLUÇÃO PARTICULAR
VAI SER ESTA:

$$y = \sqrt{25 - x^2}$$

PLANO PRA HOJE:
① APRENDER A
USAR O
"MÉTODO" [M]
E A "FÓRMULA"
[F] DA PÁGINA
2fT123 -
INCLUSIVE PRA
RESOLVER ALGUNS
EXERCÍCIOS DO
ZILL-CULLEN.
a) $\frac{dy}{dx} = \frac{4y}{x}$

$$[M] = \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \\ h(y)dy = g(x)dx \\ \int h(y)dy = \int g(x)dx \\ H(y) + C_1 = G(x) + C_2 \\ H(y) + C_1 = G(x) + C_2 - C_1 \\ H(y) = G(x) + C_3 \\ H^{-1}(H(y)) = H^{-1}(G(x) + C_3) \\ y \end{array} \right.$$

$$[F] = \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \\ H^{-1}(H(y)) = H^{-1}(G(x) + C_3) \\ y \end{array} \right.$$

SE SUBSTITUÍRMOS
 $g(x) := x^{-1}$
 $h(y) := (4y)^{-1}$

$$\text{em } \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

OBTEMOS:
 $\frac{dy}{dx} = \frac{x^{-1}}{(4y)^{-1}}$
QUE É EQUIVALENTE

$$A \frac{dy}{dx} = \frac{4y}{x}$$

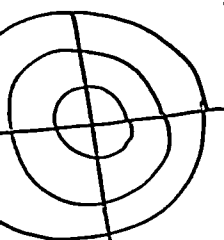
$$[M] \left\{ \begin{array}{l} g(x) := x^{-1} \\ h(y) := (4y)^{-1} \\ G(x) := \ln x \\ H(y) := \frac{1}{4} \ln y \\ H^{-1}(u) := e^{4u} \end{array} \right.$$

$$H^{-1}(u) := \frac{1}{4} e^u$$

↑
TESTAR
DEPOIS

$$x^2 = -x^2 + C_3$$

$$x^2 + y^2 = C_3$$



$$y = \sqrt{1-x^2}$$

$$y = \sqrt{4-x^2}$$



$$y = -\sqrt{1-x^2}$$

$$y = -\sqrt{4-x^2}$$



"ENCONTRE A SOLUÇÃO GERAL DA EDO (*) E A SOLUÇÃO PARTICULAR QUE PASSA PELO PONTO (4,3)"

AS SOLUÇÕES GERAIS DESSA EDO AQUI VÃO SER:

$$y = \sqrt{C_3 - x^2}$$

$$y = -\sqrt{C_3 - x^2}$$

A SOLUÇÃO PARTICULAR VAI SER ESTA:

$$y = \sqrt{25 - x^2}$$

PLANO PRA HOJE:
 ① APRENDER A USAR O "MÉTODO" [M] E A "FÓRMULA" [F] DA PÁGINA 2FT123 - INCLUSIVE PM RESOLVER ALGUNS EXERCÍCIOS DO ZILL-CULLEN.
 ② $\frac{dy}{dx} = \frac{4y}{x}$

$$[M] = \left(\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \\ h(y)dy = g(x)dx \\ \int h(y)dy = \int g(x)dx \\ H(y) + C_1 = G(x) + C_2 \\ H(y) + C_1 = G(x) + C_2 - C_1 \\ H(y) = G(x) + C_3 \\ H^{-1}(H(y)) = H^{-1}(G(x) + C_3) \\ y \end{array} \right)$$

$$[F] = \left(\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \\ H^{-1}(H(y)) = H^{-1}(G(x) + C_3) \\ y \end{array} \right)$$

SE SUBSTITUÍRMOS
 $g(x) := x^{-1}$
 $h(y) := (4y)^{-1}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

OBTEMOS:
 $\frac{dy}{dx} = \frac{x^{-1}}{(4y)^{-1}}$
 QUE É EQUIVALENTE A

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4y}{x}$$

$$[M] \left(\begin{array}{l} g(x) := x^{-1} \\ h(y) := (4y)^{-1} \\ G(x) := \ln x \\ H(y) := \frac{1}{4} \ln y \\ H^{-1}(v) := e^{4v} \end{array} \right) =$$

$H^{-1}(v) := \frac{1}{4}e^v$
 TESTAR DEPOIS

$$\left(\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{x^{-1}}{(4y)^{-1}} \\ (4y)^{-1}dy = x^{-1}dx \\ \int (4y)^{-1}dy = \int x^{-1}dx \\ \frac{1}{4} \ln y + C_1 = \ln x + C_2 \\ \frac{1}{4} \ln y = \ln x + C_3 \\ e^{4(\frac{1}{4} \ln y)} = e^{4(\ln x + C_3)} \\ y \end{array} \right)$$

$$e^{4(\frac{1}{4} \ln y)} = e^{\ln y} = y$$

$$y = 3 + \sqrt{x+4}$$

$$f(x) = 3 + \sqrt{x+4}$$

QUEREMOS:

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

$$f^{-1}(y) = x$$

$$f^{-1}(y) = (y-3)^2 - 4$$

$$\int (4y)^{-1} dy = \int \frac{1}{4y} dy$$

$$= \int \frac{1}{4} \frac{1}{y} dy$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{1}{y} dy$$

$$= \frac{1}{4} \ln y$$

$$e^{ab} = (e^a)^b = (e^b)^a$$

$$e^{4(\ln x + C_3)} = (e^{\ln x + C_3})^4$$

$$= (e^{\ln x} \cdot e^{C_3})^4$$

$$= (x \cdot e^{C_3})^4$$

$$= x^4 \cdot (e^{C_3})^4$$

$$= x^4 \cdot C_4$$

$$y = 3 + \sqrt{x+4}$$

$$y-3 = \sqrt{x+4}$$

$$(y-3)^2 = \sqrt{x+4}^2$$

$$(y-3)^2 = x+4$$

$$(y-3)^2 - 4 = x$$

C2 16/JUN/2023

INÍCIO: 14:12

$$\int \frac{\cos(2+\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} dx$$

$$= \int \cos(2+\sqrt{x}) \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}} dx}_{du}$$

$$= \int \cos(2+u) du$$

$$= \int \cos(v) dv$$

$$= \sin(v)$$

$$= \sin(2+u) = \sin(2+\sqrt{x}) //$$

$$\int F(g(x)) g'(x) dx = \int F(u) du$$

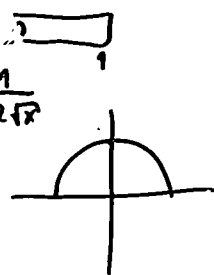
$u = \sqrt{x}$
 $g(x)$
 $u = g(x)$

$$\left[\begin{array}{l} u = \sqrt{x} \\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} v = 2+u \\ \frac{dv}{du} = 1 \end{array} \right] \quad \frac{dv}{du}$$

$$\frac{a}{b} \quad a \frac{1}{b}$$

$$\left[\begin{array}{l} S = \sin \theta \\ \frac{ds}{d\theta} = \end{array} \right]$$



$$y = \sqrt{1-x^2}$$

$$y = x+2$$

$$F(x) = \int_{t=s}^{t=x} f(t) dt$$

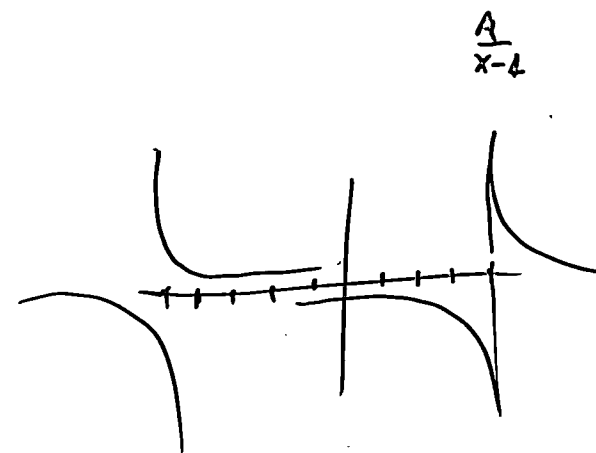
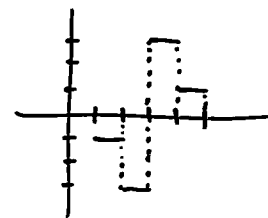
$$F(4) = \int_{t=s}^{t=4} f(t) dt$$

$$= - \int_{t=4}^{t=s} f(t) dt$$

$$\underbrace{\quad}_{-1}$$

$$= -1$$

$$\ominus F(u) \quad F(x) \quad \underbrace{\quad}_{\sqrt{x}}$$



$$\frac{A}{x-4}$$

$$\frac{B}{x-5}$$

C2 20/JUL/2023

3) INÍCIO: 14:20

HOJE: EDOS LINEARES
COM COEFICIENTES
CONSTANTES - "EDOLCCS"!

AVISO: A VISTA DE
PROVA PODE SER FEITA
EM QUALQUER DIA
MENOS HOJE - EU NÃO
TROUXE AS PROVAS!

O QUE A GENTE VAI
VER HOJE ESTÁ NO
CAP.3 DO BOYCE/DIPRIMA-
EU PUS LINKS PRA ELE
NA PÁGINA DO CURSO.
EU VOU COMEÇAR POR
ISSO AQUI, DA SEÇÃO 3.2:

$$L[\phi] = \phi'' + p\phi' + q\phi$$

$$L[\phi](t) = \phi''(t) + p(t)\phi'(t) + q(t)\phi(t)$$

MAS VOU MUDAR A NOTACÃO -
VOU USAR f AO INVÉS DE ϕ E
 x AO INVÉS DE t .

A IDÉIA PRINCIPAL É QUE

$$(D^2 + 42D + 99)f = D^2f + 42Df + 99f$$

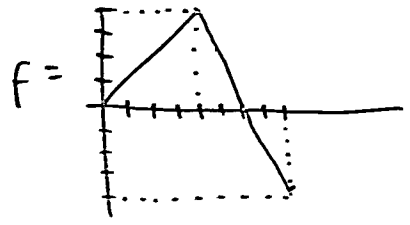
$$= f'' + 42f' + 99f$$

$$(D^2 + 42D + 99)f(x) = (f'' + 42f' + 99f)(x)$$

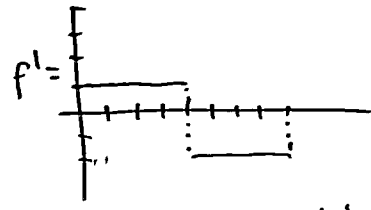
$$= f''(x) + 42f'(x) + 99f(x)$$

...E ISSO VAI SER
PARECIDO COM
MATRIZES E VETORES...

IDÉIA: SE



E



ENTÃO

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(1) &= 1 \\ f(2) &= 2, \text{ ou } f(2) = 3 \\ f(3) &= 2 \\ f(4) &= 4 \\ f(5) &= 2 \\ f(6) &= 0 \\ f(7) &= -2 \\ f(8) &= 4 \end{aligned}$$

$$f \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$f' \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 2-1 \\ 3-2 \\ 4-3 \\ 2-4 \\ 0-2 \\ -2-0 \\ -4-(-2) \end{pmatrix}$$

$$f'(x) \approx f(x+1) - f(x)$$
$$f'(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon}$$

$$\approx \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon}$$
$$\approx \frac{f(x+1) - f(x)}{1}$$
$$= f(x+1) - f(x)$$

LEMBRANDO...
MULTIPLICAÇÃO DE
MATRIZES NÃO É
COMUTATIVA -

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = (ac+bd)$$

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & bc \\ ad & bd \end{pmatrix}$$

MAS É DISTRIBUTIVA,
É MULTIPLICAÇÃO DE
MATRIZ POR VETOR
TAMBÉM. EXEMPLOS:

$$(A+B+C)(D+E+F) = AD+AE+AF + BD+BE+BF + CD+CE+CF$$
$$(A+B+C)(u+v+w) = Au+Av+Aw + Bu+Bv+Bw + Cu+Cv+Cw$$

$$\begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ f(4) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ f(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(2) \\ f(3) \\ f(4) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f(2)-f(1) \\ f(3)-f(2) \\ f(4)-f(3) \\ 0-f(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(2) \\ f(3) \\ f(4) \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ f(4) \end{pmatrix}$$
$$= S \begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ f(4) \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ f(4) \end{pmatrix}$$
$$= (S-1) \begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ f(4) \end{pmatrix}$$

Obs: -1

AGORA VAMOS
PENSAR QUE É
MATRIZ "E" A
DERIVADA...

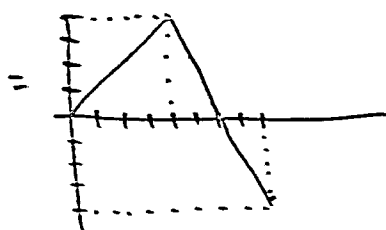
$$D \begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ f(4) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} f'(1) \\ f'(2) \\ f'(3) \\ f'(4) \end{pmatrix}$$

COM ESSAS GAMBI
ISSO AQUI FAZ
 $(D^2 + 42D + 99)$

DERIVADA
YADA,
"MATRIZ"
"MATRIZ"
"MATRIZ"

ISSO VAI SER
CIDO Com
TRIZES E VETORES...

IA: SE



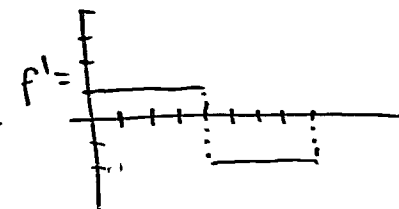
ENTÃO

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(1) &= 1 \\ f(2) &= 2, \text{ ou } f(2) = 3 \\ f(3) &= 3 \\ f(4) &= 4 \\ f(5) &= 2 \\ f(6) &= 0 \\ f(7) &= -2 \\ f(8) &= 4 \end{aligned}$$

$\phi(t)$,

$$\begin{aligned} f + 99f \\ f' + 99f \\ f' + 99f(x) \\ f'(x) + 99f(x) \end{aligned}$$

E



$$f' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$f' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 2-1 \\ 3-2 \\ 4-3 \\ 2-4 \\ 0-2 \\ -2-0 \\ -4-(-2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x+1) - f(x) \\ f'(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon} \\ &= \frac{f(x+1) - f(x)}{1} \\ &= f(x+1) - f(x) \end{aligned}$$

LEBRANDO...
MULTIPLICAÇÃO DE
MATRIZES NÃO É
COMUTATIVA -

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(a \ b) \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = (ac \ bd)$$

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} (a \ b) = \begin{pmatrix} ac & bc \\ ad & bd \end{pmatrix}$$

... MAS É DISTRIBUTIVA,
É MULTIPLICAÇÃO DE
MATRIZ POR VETOR
TAMBÉM. EXEMPLOS:

$$\begin{aligned} (A+B+C)(D+E+F) &= AD+AE+AF \\ &\quad + BD+BE+BF \\ &\quad + CD+CE+CF \\ (A+B+C)(U+V+W) &= AU+AV+AW \\ &\quad + BU+BV+BW \\ &\quad + CU+CV+CW \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ f(4) \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ f(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(2) \\ f(3) \\ f(4) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f(2)-f(1) \\ f(3)-f(2) \\ f(4)-f(3) \\ 0-f(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(2) \\ f(3) \\ f(4) \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ f(4) \end{pmatrix}$$

$$= S \begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ f(4) \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ f(4) \end{pmatrix}$$

$$= (S-1) \begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ f(4) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ f(4) \end{pmatrix}$$

AGORA VAMOS
PENSAR QUE ESTA
MATRIZ "É" A
DERIVADA...

$$D \begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ f(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'(1) \\ f'(2) \\ f'(3) \\ f'(4) \end{pmatrix}$$

COM ESSAS GAMBIARRAS
ISSO AQUI FAZ SENTIDO...

$$(D^2 + 42D + 99)f$$

DERIVADA, "MATRIZ", "MATRIZ", "MATRIZ", "VETOR"

$$\begin{aligned} EDO: (D^2 + 42D + 99)f &= 0 \\ D^2 f + 42Df + 99f &= 0 \\ D(Df) + 42(Df) + 99f &= 0 \\ f'' + 42f' + 99f &= 0 \\ y'' + 42y' + 99y &= 0 \end{aligned}$$

OUTRA EDO:

$$\begin{aligned} (D-42)f &= 0 \\ Df - 42f &= 0 \end{aligned}$$

$$(2) f'(x) - 42f(x) = 0$$

EXERCÍCIO:
ALGUMA DESCA
FUPDES AQUI É
SOLUÇÃO DA EDO (2)?

$$\begin{aligned} a) f(x) &= e^{42x} \\ b) f(x) &= e^{-42x} \end{aligned}$$

C2 20/JUL/2023

Início: 14:20

Lembrando...

$$(D+42)(D+99) =$$

$$D(D+99) + 42(D+99) =$$

$$D^2 + 99D + 42D + 42 \cdot 99$$

e dá pra ver que

$$(D+42)(D+99) = (D+99)(D+42).$$

OUTRA EDO:

$$(D-4)(D+5)f = 0$$

ou: $(D+5)(D-4)f = 0$

ou: $(D(D-4) + 5(D-4))f = 0$

$$(D^2 - 4D + 5D - 20)f = 0$$

$$(D^2 + D - 20)f = 0$$

$$f'' + f' - 20f = 0$$

$$f''(x) + f'(x) - 20f(x) = 0$$

EXERCÍCIO:

A SOLUÇÃO "BÁSICA" DA

EDO $(D-\alpha)f = 0$

é $f = e^{\alpha x}$

AS OUTRAS SOLUÇÕES DESSA

EDO SÃO TODAS DA FORMA

$\beta e^{\alpha x}$

a) ENCONTRE 3

SOLUÇÕES DIFERENTES

PARA ESTA EDO:

$$f' + 20f = 0.$$

① $f_1(x) = e^{-20x}$

$f_2(x) = 2e^{-20x}$

$f_3(x) = 0e^{-20x}$
= 0

b) ENCONTRE 3

SOLUÇÕES DIFERENTES

PARA ESTA EDO:

$$f' - 33f = 0.$$

c) VERIFIQUE QUE

$f_1(x) = e^{-20x}$

é SOLUÇÃO DESTA

EDO:

(AA) $(D-33)(D+20)f = 0.$

d) VERIFIQUE QUE

$f_4(x) = 2e^{33x}$

é SOLUÇÃO DA

EDO (AA). DICA:

COMECE POR:

$(D-33)(D+20)f_4 =$

$(D+20)(D-33)f_4 = \dots$

TERMINOLOGIA:

A SOLUÇÃO BÁSICA

DA EDO $f' - \alpha f = 0$

é $f = e^{\alpha x}$

A SOLUÇÃO GERAL

DA EDO $f' - \alpha f = 0$

é $f = \beta e^{\alpha x}$

AS SOLUÇÕES BÁSICAS

DA EDO $(D-\alpha)(D-\beta)f = 0$

SÃO $f_1 = e^{\alpha x}$

e $f_2 = e^{\beta x}$...

REPARTE QUE SÃO DUAS.

A SOLUÇÃO GERAL

DA EDO $(D-\alpha)(D-\beta)f = 0$

é $f_3 = \gamma e^{\alpha x} + \delta e^{\beta x}$

EXERCÍCIOZÃO:

RESOLVA OS PROBLEMAS

1, 2, 5 e 7 DA PÁGINA

110 DO BOYCE/DIPRIMA

EM PORTUGUÊS. ISSO É

A PÁGINA 10 DO PDF.

$\frac{d}{dx} 2e^{20x} =$
 $2 \frac{d}{dx} e^{20x}$

$$[RC] = \left(\frac{d}{dx} f(g(x)) \right) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$[RC] \left[\begin{matrix} f(u) = e^u \\ f'(u) = e^u \\ g(x) = 20x \\ g'(x) = 20 \end{matrix} \right] =$$

$$(x-4)(x+5) =$$

$$x^2 + x - 20$$

$$x^2 + x - 20 =$$

$$(x-a)(x-b) = 0$$

$$x^2 - (a+b)x + ab$$

$$x^2 + x - 20 = 0$$

a	b	ab	a+b
1	-20	-20	-19
2	-10	-20	-8
4	-5	-20	-1
5	-4	-20	1
10	-2	-20	8
20	-1	-20	19

a) ENCONTRE 3
SOLUÇÕES DIFERENTES
PARA ESTA EDO:

$$f' + 20f = 0.$$

① $f_1(x) = e^{-20x}$
 $f_2(x) = 2e^{-20x}$
 $f_3(x) = 0e^{-20x} = 0$

+42).

b) ENCONTRE 3
SOLUÇÕES DIFERENTES
PARA ESTA EDO:
 $f' - 33f = 0.$

c) VERIFIQUE QUE
 $f_1(x) = e^{-20x}$
 É SOLUÇÃO DESTA
 EDO:

(**) $(D-33)(D+20)f = 0.$

d) VERIFIQUE QUE
 $f_4(x) = 2e^{33x}$
 É SOLUÇÃO DA
 EDO (**). DICA:
 COMECE POR:
 $(D-33)(D+20)f_4 =$
 $(D+20)(D-33)f_4 = \dots$

TERMINOLOGIA:
 A SOLUÇÃO BÁSICA
 DA EDO $f' - \alpha f = 0$
 É $f = e^{\alpha x}.$

A SOLUÇÃO GERAL
 DA EDO $f' - \alpha f = 0$
 É $f = \beta e^{\alpha x}.$

AS SOLUÇÕES BÁSICAS
 DA EDO $(D-\alpha)(D-\beta)f = 0$
 SÃO $f_1 = e^{\alpha x}$
 E $f_2 = e^{\beta x} \dots$
 REPARA QUE SÃO DUAS.
 A SOLUÇÃO GERAL
 DA EDO $(D-\alpha)(D-\beta)f = 0$
 É $f_3 = \gamma e^{\alpha x} + \delta e^{\beta x}.$

EXERCÍCIOZÃO:
 RESOLVA OS PROBLEMAS
 1, 2, 5 e 7 DA PÁGINA
 110 DO BOYCE/DIPRIMA
 EM PORTUGUÊS. ISSO É
 A PÁGINA 10 DO PDF.

$$\frac{d}{dx} 2e^{20x} = 2 \frac{d}{dx} e^{20x}$$

$$[RC] = \left(\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) g'(x) \right)$$

$$[RC] \begin{bmatrix} f(v) := e^v \\ f'(v) := e^v \\ g(x) := 20x \\ g'(x) := 20 \end{bmatrix} =$$

$$(x-4)(x+5) =$$

$$x^2 + x - 20$$

$$x^2 + x - 20$$

$$(x-a)(x-b) = 0$$

$$x^2 - (a+b)x + ab$$

$$x^2 + x - 20 = 0$$

a	b	ab	$a+b$
1	-20	-20	-19
2	-10	-20	-8
4	-5	-20	-1
5	-4	-20	1
10	-2	-20	8
20	-1	-20	19

C2 23/JUL/2023

INÍCIO: 14:25

HOJE: OSCILAÇÕES!
NA AULA PASSADA
NÓS VIMOS QUE
EDOS COM ESSA
CARA AQUI

$$y'' + ay' + by'' = 0$$

TÊM SOLUÇÕES COM
ESSA CARA AQUI:

$$y = \alpha e^{\beta x} + \gamma e^{\delta x}$$

MAS REPARA QUE SE

$$y = f(x) = \sin x$$

ENTÃO

$$y'' = f''(x) = -\sin x$$

E ENTÃO

$$y'' + 0y' + 1y = 0$$

TÊM SOLUÇÕES COM
ESSA CARA AQUI:

$$\alpha \sin x + \beta \cos x$$

(VERIFIQUE A PARTE DA
COS X!)

COMO ASSIM? O QUE
TÁ ACONTECENDO?

REPARA:

$$y'' + 0y' + 1y$$

$$= (D^2 + 0D + 1)y$$

$$= (D^2 + 1)y$$

$$= (D+i)(D-i)y$$

PARCECE QUE

$$(D+i)(D-i)y = 0$$

TEN SOLUÇÕES DA
FORMA

$$y = e^{ix}$$

$$y = e^{-ix}$$

$$y = ae^{ix} + be^{-ix} \dots$$

UMA DAS COISAS
QUE A GENTE VAI
VER HOJE É QUE

$$e^{ix} \text{ e } e^{-ix}$$

SÃO COMBINAÇÕES
LINEARES DE

$\sin x$ E $\cos x$

E VICE-VERSA...

OS DETALHES SÃO:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

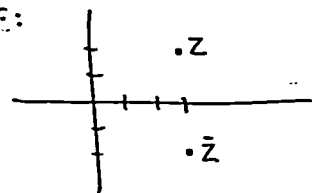
$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Se $z = 3 + 2i$
ENTÃO $\bar{z} = 3 - 2i$

∴



Se $z = a + bi$
ENTÃO $\bar{z} = a - bi$

$$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a + 0i$$

$$z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi)$$

$$= a + bi - a + bi$$

$$= 0 + 2bi$$

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi)$$

$$= a(a - bi)$$

$$+ bi(a - bi)$$

$$= a^2 - abi$$

$$+ abi - b^2i^2$$

$$= a^2 - b^2i^2$$

$$= a^2 - b^2(-1)$$

$$= a^2 + b^2$$

Se $z = 4 + 3i$
 $\bar{z} = 4 - 3i$

E ALIÁS A GENTE PODE
INTERPRETAR $z\bar{z}$ COMO...

$$\text{ALIÁS, } \sqrt{z\bar{z}} = \dots$$

$$\text{ALIÁS, SE } z = a + bi$$

$$\text{ENTÃO } \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

QUE É ISSO AQUI:

DEF: SE $z = a + bi$

$$\text{ENTÃO } |z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

A GENTE ESTÁ DE A DEFINIÇÃO
DE MÓDULO, E AGORA O

MÓDULO DE UM NÚMERO COMPLEXO
É A DISTÂNCIA DELE ATÉ

O PONTO (0,0) NO PLANO XY.

EXERCÍCIO:

CALCULEM - OU
NO OLHÔMETRO OU
POR CONTAS -

$$|2|,$$

$$|-2|,$$

$$|2 + 0i|,$$

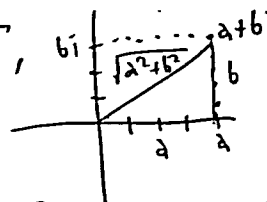
$$|0 + 2i|,$$

$$|4 + 3i|,$$

$$|-4 + 3i|,$$

$$|-4 - 3i|,$$

$$|-3 - 4i|$$



$$|-3 - 4i| = \sqrt{(-3 - 4i)(-3 + 4i)}$$

$$= \sqrt{(-3 - 4i)(-3 + 4i)}$$

$$= \sqrt{3^2 + 4^2}$$

$$= 5$$

$$(|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}) \begin{bmatrix} a: -3 \\ b: -4 \end{bmatrix} =$$

$$(|-3 - 4i| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2})$$

SÉRIES DE TAYLOR

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$f(x) = \frac{f(0)}{0!}x^0 + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

Se $f(x) = e^x$

ENTÃO: $f'(x) = e^x$

$$f''(x) = e^x$$

$$f'''(x) = e^x$$

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = 1$$

$$f''(0) = 1$$

$$f'''(0) = 1$$

Se $f(x) = \sin x$

ENTÃO $f'(x) = \cos x$

$$f''(x) = -\sin x$$

$$f'''(x) = -\cos x$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x$$

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = 1$$

$$f''(0) = 0$$

$$f'''(0) = -1$$

$$f^{(4)}(0) = 0$$

$$1$$

$$0$$

$$-1$$

$$\vdots$$

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2} - \frac{ix^3}{6} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \dots$$

$$i \sin x = ix - \frac{ix^3}{6} + \dots$$

$$\textcircled{1} e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$\textcircled{1} [x := -x] = (e^{i(-x)} = e^{-ix})$$

$$\textcircled{2} e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

$$f(0) =$$

$$f'(0) =$$

$$f''(0) =$$

$$f'''(0) =$$

$$f^{(4)}(0) =$$

$$f^{(5)}(0) =$$

$$f^{(6)}(0) =$$

$$f^{(7)}(0) =$$

$$f^{(8)}(0) =$$

$$f^{(9)}(0) =$$

$$f^{(10)}(0) =$$

$$f^{(11)}(0) =$$

$$f^{(12)}(0) =$$

$$f^{(13)}(0) =$$

$$f^{(14)}(0) =$$

$$f^{(15)}(0) =$$

$$f^{(16)}(0) =$$

$$f^{(17)}(0) =$$

$$f^{(18)}(0) =$$

$$f^{(19)}(0) =$$

$$f^{(20)}(0) =$$

$$f^{(21)}(0) =$$

$$f^{(22)}(0) =$$

$$f^{(23)}(0) =$$

$$f^{(24)}(0) =$$

$$f^{(25)}(0) =$$

$$f^{(26)}(0) =$$

$$f^{(27)}(0) =$$

$$f^{(28)}(0) =$$

$$f^{(29)}(0) =$$

$$f^{(30)}(0) =$$

$$f^{(31)}(0) =$$

$$f^{(32)}(0) =$$

$$f^{(33)}(0) =$$

$$f^{(34)}(0) =$$

$$f^{(35)}(0) =$$

$$f^{(36)}(0) =$$

$$f^{(37)}(0) =$$

$$f^{(38)}(0) =$$

$$f^{(39)}(0) =$$

$$f^{(40)}(0) =$$

$$f^{(41)}(0) =$$

$$f^{(42)}(0) =$$

$$f^{(43)}(0) =$$

$$f^{(44)}(0) =$$

$$f^{(45)}(0) =$$

$$f^{(46)}(0) =$$

$$f^{(47)}(0) =$$

$$f^{(48)}(0) =$$

$$f^{(49)}(0) =$$

$$f^{(50)}(0) =$$

$$f^{(51)}(0) =$$

$$f^{(52)}(0) =$$

$$f^{(53)}(0) =$$

$$f^{(54)}(0) =$$

$$f^{(55)}(0) =$$

$$f^{(56)}(0) =$$

$$f^{(57)}(0) =$$

$$f^{(58)}(0) =$$

$$f^{(59)}(0) =$$

$$f^{(60)}(0) =$$

$$f^{(61)}(0) =$$

$$f^{(62)}(0) =$$

$$f^{(63)}(0) =$$

$$f^{(64)}(0) =$$

$$f^{(65)}(0) =$$

$$f^{(66)}(0) =$$

$$f^{(67)}(0) =$$

$$f^{(68)}(0) =$$

$$f^{(69)}(0) =$$

$$f^{(70)}(0) =$$

$$f^{(71)}(0) =$$

$$f^{(72)}(0) =$$

$$f^{(73)}(0) =$$

$$f^{(74)}(0) =$$

$$f^{(75)}(0) =$$

$$f^{(76)}(0) =$$

$$f^{(77)}(0) =$$

$$f^{(78)}(0) =$$

$$f^{(79)}(0) =$$

$$f^{(80)}(0) =$$

$$f^{(81)}(0) =$$

$$f^{(82)}(0) =$$

$$f^{(83)}(0) =$$

$$f^{(84)}(0) =$$

$$f^{(85)}(0) =$$

$$f^{(86)}(0) =$$

$$f^{(87)}(0) =$$

$$f^{(88)}(0) =$$

$$f^{(89)}(0) =$$

$$f^{(90)}(0) =$$

$$f^{(91)}(0) =$$

$$f^{(92)}(0) =$$

$$f^{(93)}(0) =$$

$$f^{(94)}(0) =$$

$$f^{(95)}(0) =$$

$$f^{(96)}(0) =$$

$$f^{(97)}(0) =$$

$$f^{(98)}(0) =$$

$$f^{(99)}(0) =$$

$$f^{(100)}(0) =$$

DEF: Se $z = a + bi$

ENTÃO $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

A GENTE ESTÁ A DEFINIÇÃO DE MÓDULO, E AGORA O MÓDULO DE UM NÚMERO COMPLEXO É A DISTÂNCIA DELE ATÉ O PONTO (0,0) NO PLANO xy.

EXERCÍCIO: CALCULEM - O NO OLIGOMETRO OU POR CONTAS -

- |2|,
- |-2|,
- |2+0i|,
- |0+2i|,
- |4+3i|,
- |-4+3i|,
- |-4-3i|,
- |-3-4i|

$$|-3-4i| = \sqrt{(-3-4i)(-3+4i)} = \sqrt{(-3-4i)(-3+4i)} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$(|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}) \begin{bmatrix} a: -3 \\ b: -4 \end{bmatrix} =$$

$$|-3-4i| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$$

SÉRIES DE TAYLOR

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$f(x) = \frac{f(0)}{0!}x^0 + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

Se $f(x) = e^x$
 ENTÃO: $f'(x) = e^x$
 $f''(x) = e^x$
 $f'''(x) = e^x$

Se $f(x) = \sin x$
 ENTÃO: $f'(x) = \cos x$
 $f''(x) = -\sin x$
 $f'''(x) = -\cos x$
 $f^{(4)}(x) = \sin x$

Se $f(x) = e^{ix}$
 ENTÃO: $f'(x) = ie^{ix}$
 $f''(x) = i^2 e^{ix} = -e^{ix}$
 $f'''(x) = i^3 e^{ix} = -ie^{ix}$
 $f^{(4)}(x) = i^4 e^{ix} = e^{ix}$

$$(D-d)f = 0$$

$$f(x) = e^{ax}$$

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$i \sin x = ix - i\frac{x^3}{3!} + i\frac{x^5}{5!} - i\frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\textcircled{1} \quad e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$\textcircled{1} [x := -x] = \begin{pmatrix} e^{i(-x)} = \cos -x + i \sin -x \\ e^{-ix} = \cos x - i \sin x \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{2} \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2}: e^{ix} + e^{-ix} = (\cos x + i \sin x) + (\cos x - i \sin x) = 2 \cos x$$

$$\textcircled{3} \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2}: e^{ix} - e^{-ix} = (\cos x + i \sin x) - (\cos x - i \sin x) = i \sin x - (-i \sin x) = 2i \sin x$$

$$\textcircled{4} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

ENTÃO ESSA É DO AQUI

$$(D + (4+3i))(D - (4+3i))f = 0$$

TEM SOLUÇÕES BÁSICAS

$$f_1(x) = e^{(4+3i)x}$$

$$f_2(x) = e^{-(4+3i)x}$$

EXERCÍCIO: EXPRESSEM $f_1(x) + f_2(x)$ EM TERMOS DE SENOS E COSSENO.

DICAS: $\textcircled{1} [x := 42x] = ?$

$\textcircled{1} [x := -42x] = ?$

$$e^{20+42i} = e^{20} e^{42i}$$

$$(a+bi) + (a-bi) = 2a + 0i$$

$$(a+bi) - (a-bi)$$

$$= a+bi - a+bi$$

$$= 2bi$$

$$(a-bi)(a-bi)$$

$$= a^2 - abi - abi + b^2 i^2$$

$$= a^2 - 2abi - b^2$$

$$= a^2 - b^2 - 2abi$$

$$= a^2 - b^2 - 2abi$$

$$= a^2 - b^2 - 2abi$$

$$= a^2 - b^2 - 2abi$$

$$= a^2 - b^2 - 2abi$$

$$= a^2 - b^2 - 2abi$$

$$= a^2 - b^2 - 2abi$$

$$= a^2 - b^2 - 2abi$$

$$= a^2 - b^2 - 2abi$$

$$= a^2 - b^2 - 2abi$$

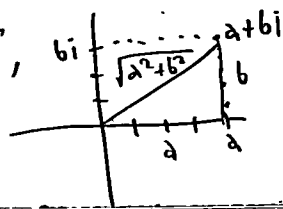
$$= a^2 - b^2 - 2abi$$

$$= a^2 - b^2 - 2abi$$

$$= a^2 - b^2 - 2abi$$

$$= a^2 - b^2 - 2abi$$

$$= a^2 - b^2 - 2abi$$



C2 23/JUL/2023

Início: 14:25

PELA FORMULA 1

$$e^{3ix} = e^{i(3x)} \\ = \cos(3x) + i \sin(3x)$$

$$f_1(x) = e^{(4+3i)x}$$

$$f_2(x) = e^{(4-3i)x}$$

$$f_1(x) = e^{4x+3ix} = e^{4x} \cdot e^{3ix}$$

$$= e^{4x} (\cos(3x) + i \sin(3x))$$

$$f_2(x) = e^{(4-3i)x} = e^{4x-3ix} = e^{4x} \cdot e^{-3ix}$$

$$f_2(x) = e^{4x} (\cos(3x) - i \sin(3x))$$

LOGO

$$f_1(x) + f_2(x) = e^{4x} (\cos(3x) + i \sin(3x)) + e^{4x} (\cos(3x) - i \sin(3x)) \\ = 2e^{4x} \cos(3x) = \boxed{2e^{4x} \cos(3x)}$$

$$e^{(4+3i)x} = e^{4x} e^{3ix}$$

$$\textcircled{1} [x := 3x] = (e^{i(3x)} = \cos 3x + i \sin 3x)$$

$$e^{-(4+3i)x}$$

$$e^{(4-3i)x} = e^{4x} e^{-3ix}$$

$$e^{-3ix} = e^{-i(3x)}$$

$$\textcircled{2} [x := -3x] = (e^{i(-3x)} = \cos(-3x) - i \sin(-3x))$$

$$\textcircled{10} (\cos -x = \cos x)$$

$$\textcircled{11} (\sin -x = -\sin x)$$

$$\textcircled{11} = e^{i(3x)} = \cos(3x) + i \sin(3x)$$

$$|-3-4i| = \sqrt{(-3-4i)(-3+4i)}$$

$$= \sqrt{(-3-4i)(-3+4i)}$$

$$= \sqrt{3^2 + 4^2}$$

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \dots$$

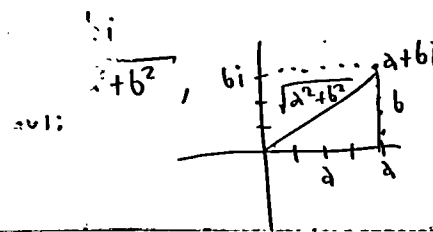
$$i \sin x = ix - \frac{ix^3}{6} + \dots$$

$$\textcircled{1} e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$\textcircled{1} [x := -x] = (e^{i(-x)} = \cos(-x) - i \sin(-x))$$

$$\textcircled{2} e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

$$f_1 + f_2 = e^{4x} (\cos 3x + i \sin 3x) + e^{4x} (\cos 3x - i \sin 3x) \\ = 2e^{4x} (\cos 3x + i \sin 3x)$$



$$(D-d)f = 0 \\ f(x) = e^{dx}$$

C2 27/JUN/2023

INÍCIO: 14:15

HOJE: CONDIÇÕES INICIAIS E PREPARAÇÃO PRA P2!!!

NAS QUESTÕES SOBRE EDO'S DA P2 O JEITO DE ESCREVER VAI IMPORTAR MUITO.

SE VOCÊS NÃO USAREM UM POQUINHO DE PORTUGUÊS DO JEITO CERTO AS CONTAS DE VOCÊS VÃO FICAR AMBIGUAS, E NA CORREÇÃO EU VOU INTERPRETAR CADA COISA AMBÍGUA DO JEITO ERRADO!!!
EU TRUQUE CÓPIAS DO ANEXO DA VS DO SEMESTRE PASSADO PRA GENTE USAR COMO REFERÊNCIA NOS EXERCÍCIOS DE HOJE.

1) SEJA (x) ESTA EDO:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{2x}$$

2) ENCONTRE A SOLUÇÃO GERAL DELA.

6) ENCONTRE A SOLUÇÃO PARTICULAR DE EDO (4) : QUE PASSE PELO PONTO (2,2).

7) 100%, MAS PELO PONTO (3,-1) ... E TESTE TUDO!!!

DICA: ESCREVER AS CONTAS COM AS PARTÍCULAS EM PORTUGUÊS É UM MILHÃO DE VEZES MAIS DIFÍCIL QUE PARECE, E MUITAS PESSOAS OU SE RECUSAM A APRENDER ISSO OU DEIXAM PRA APRENDER ISSO NA ÚLTIMA HORA - E SE FERRAM.!!
VAMOS TREINAR ISSO HOJE!

DICA: SE VOCÊ PRECISAR USAR UMA FÓRMULA DIFÍCIL DE DEMONSTRAR PRIMEIRO USE UM "SABEMOS QUE" OU UM "LEMBRE QUE"...

POR EXEMPLO, SE O SEU LEITOR NÃO SOUBER A REGRA DA CADEIA MUITO BEM VOCÊ PODE ESCREVER ISTO AQUI:

LEMBRE QUE A REGRA DA CADEIA É:

$$[RC] = \left(\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \right)$$

E AÍ DEPOIS DIGA QUAIS SUBSTITUIÇÕES VOCÊ VAI USAR. DÁ PRA FAZER ISSO EM PORTUGUÊS - POR EXEMPLO:

SE SUBSTITUÍRMOS
 $f(u)$ POR $\sin u$,
 $g(x)$ POR $42x$,
 $f'(u)$ POR $\cos u$ E
 $g'(x)$ POR 42

NA REGRA DA CADEIA OBTÊMOS:

$$\frac{d}{dx} \sin(42x) = \cos(42x) \cdot 42$$

OUTRA DICA:
TREINE O TRUQUE DO "QUEREMOS QUE"!

POR EXEMPLO:

QUEREMOS QUE $f_1(2) = 2$!

SABEMOS QUE $f_1(x) = \sqrt{-x + C_3}$

ENTÃO $f_1(2) = \sqrt{-2 + C_3}$

E $f_1(2) = 2$,

PORTANTO $2 = \sqrt{-2 + C_3}$

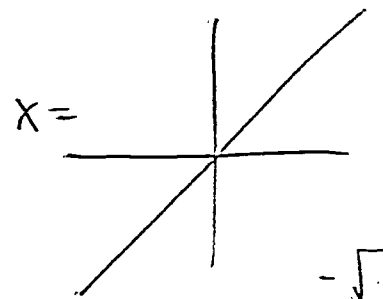
$$2^2 = \sqrt{-2 + C_3}^2$$

$$4 = -2 + C_3$$

$$4 + 2 = C_3$$

$$C_3 = 6$$

$$a+b = c+d$$
$$f(a+b) = f(c+d)$$
$$H^{-1}(a+b) = H^{-1}(c+d)$$



(x,y) POR $(2,2)$

$f_1(x)$
 $f_2(x)$
 $f_3(x)$

$$y = \sqrt[3]{x^2}$$

DICA: SE VOCÊ
PRECISAR USAR UMA
FÓRMULA DIFÍCIL DE
DEMONSTRAR PRIMEIRO
USE UM "SABEMOS QUE"
OU UM "LEMBRE QUE"...

PARCECE,
ESSAS
AN A
SSO OU
A
SSO NA
RA -
PM. II
INAR
!

POUR EXEMPLO, SE O SEU
LEITOR NÃO SOUBER A
REGRDA CADAIA MUITO
BEN VOCÊ PODE
ESCREVER ISTO AQUI:

LEMBRE QUE A
REGRDA CADAIA É:

$$[RC] = \left(\frac{\partial}{\partial x} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \right)$$

E AÍ DEPOIS DIGA QUAIS
SUBSTITUIÇÕES VOCÊ VAI USAR.
DÁ PRA FAZER ISSO EM PORTUGUÊS -
POR EXEMPLO:

SE SUBSTITUÍRMOS
 $f(u)$ POR $\sin u$,
 $g(x)$ POR $42x$,
 $f'(u)$ POR $\cos u$ E
 $g'(x)$ POR 42
 NA REGRA DA CADAIA OBTÉMOS:

$$\frac{d}{dx} \sin(42x) = \cos(42x) \cdot 42$$

OUTRA DICA:
TREINE O TRUQUE
DO "QUEREMOS QUE"!

POR EXEMPLO:

QUEREMOS QUE $f_1(2) = 2$.

SABEMOS QUE $f_1(x) = \sqrt{-x + C_3}$

ENTÃO $f_1(2) = \sqrt{-2 + C_3}$

E $f_1(2) = 2$,

PORTANTO $2 = \sqrt{-2 + C_3}$

$$2^2 = \sqrt{-2 + C_3}^2$$

$$4 = -2 + C_3$$

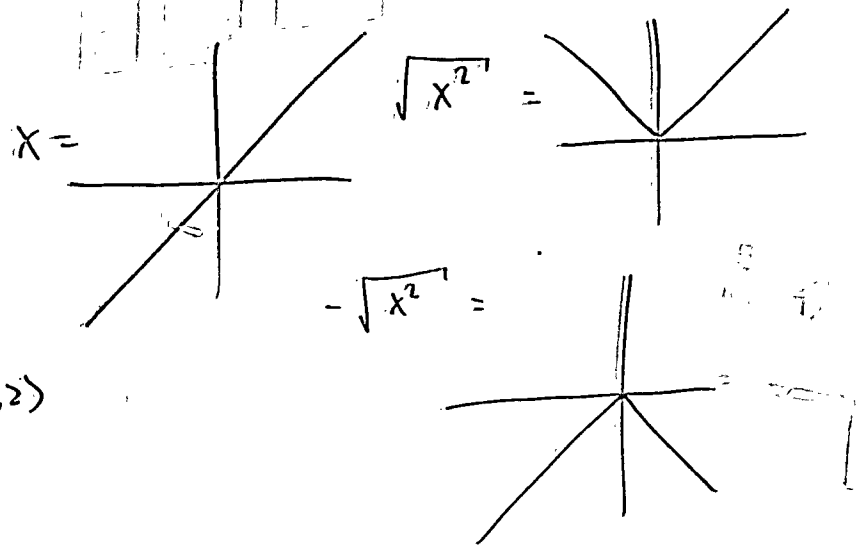
$$4 + 2 = C_3$$

$$C_3 = 6$$

$$a+b = c+d$$

$$f(a+b) = f(c+d)$$

$$H^{-1}(a+b) = H^{-1}(c+d)$$



(x,y) POR $(2,2)$

$f_1(x)$
 $f_2(x)$
 $f_3(x)$

$$y = \sqrt[3]{x^2 + C_3}$$

C2 30/JUN/2023

INÍCIO: 14:25

HOJE: REVISÃO PRA
P2 - EU FIZ UMA
PARTE DO PDF DE
DICAS PRA P2 E
TROUXE CÓPIAS,
A GENTE VAI
TRABALHAR ISSO
HOJE - É NO
FINAL DA AULA
A GENTE VAI
VER UMA INTRODUÇÃO
A VOLUMES. A P2
VAI TER UMA QUESTÃO
SOBRE VOLUMES VALENDO
1 PONTO, E NA AULA
QUE VEM A GENTE VAI
VER O REITO SOBRE
VOLUMES E UM POUCO
SOBRE COMPRIMENTO DE
ARCO - QUE NÃO VAI
CAIR NA PROVA.

$$(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab \quad (0)$$

$$(x - (a+bi))(x - (a-bi)) =$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + b^2 \quad (*)$$

PESSOA 1:

$$\text{Se } a=3 \\ b=5$$

ENTÃO

$$(**) = x^2 - 6x + 34$$

$$(***) = x^2 + 8x + 25$$

$$(****) = x^2 + 2x + 17$$

PESSOA 2:

$$\text{Se } (**) = x^2 - 6x + 34$$

ENTÃO...

HIPÓTESE 1:

$$\text{Se } a=0 \\ b=0$$

$$\text{ENTÃO } (*) \begin{bmatrix} a:=0 \\ b:=0 \end{bmatrix} = (x^2 - 0x + 0),$$

QUE É DIFERENTE DE (**).

HIPÓTESE 2:

$$\begin{aligned} (a+b)(c+d) &= a(c+d) \\ &+ b(c+d) \\ &= ac + bd \\ &+ b(c+d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x-a)(x-b) &= x(x-b) \\ &+ (-a)(x-b) \\ &= x^2 - bx \\ &- ax + ab \\ &= x^2 - (a+b)x + ab \end{aligned}$$

ENCONTRE $a, b \in \mathbb{R}$

TAIS QUE

$$(x - (a+bi))(x - (a-bi)) = x^2 + 8x + 25 \quad (5)$$

$$(5) \begin{bmatrix} a:=22 \\ b:=21 \end{bmatrix} = ((x - (22+21i))(x - (22-21i)) = x^2 + 8x + 25)$$

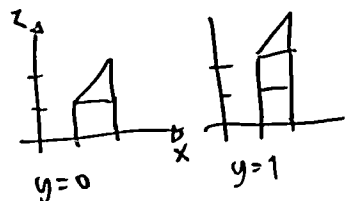
$$(*) \begin{bmatrix} a:=22 \\ b:=21 \end{bmatrix} =$$

$$\text{Se } x=i$$

$$(x+i)(x-i) = 0$$

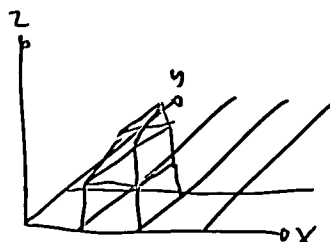
$$\underbrace{\underbrace{i}_{2i} \underbrace{i}_0}_{0}$$

$$(x-a)(x-b) = 0$$



$$\int_{x=0}^{x=2} h(x,0) dx$$

$$\int_{y=0}^{y=1} \int_{x=0}^{x=2} h(x,y) dx dy$$



$$y=0 \quad y=0.5 \\ y=1$$

$$(x - (a+bi))(x - (a-bi)) = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)$$

$$(4+3i) = 4-3i$$

$$(a+bi) = a-bi$$

$$ii =$$

$$(0+ii) = -1$$

$$[b:=20] =$$

$$[a+b:=42] =$$

(0)

Encontre $a, b \in \mathbb{R}$

TAIS QUE

$$(x - (a+bi))(x - (a-bi)) = x^2 + 8x + 25 \quad (5)$$

$$x - (a-bi) =$$

$$ax + x^2 + b^2 \quad (*)$$

$$(5) \begin{bmatrix} a := 22 \\ b := 21 \end{bmatrix} = ((x - (22+21i))(x - (22-21i)) = x^2 + 8x + 25)$$

$$(*) \begin{bmatrix} a := 22 \\ b := 21 \end{bmatrix} =$$

SOA 2:

$$S \in (AA) = x^2 - 6x + 34$$

CTAD ...

HIPÓTESE 1:

$$a = 0$$

$$b = 0$$

$$CTAD (A) \begin{bmatrix} a := 0 \\ b := 0 \end{bmatrix} = (x^2 - 0x + 0),$$

QUE É DIFERENTE DE (AA).

HIPÓTESE 2:

$$\begin{aligned} (a+b)(c+d) &= a(c+d) \\ &+ b(c+d) \\ &= ac + bd \\ &+ b(c+d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x-a)(x-b) &= x(x-b) \\ &+ (-a)(x-b) \\ &= x^2 - bx \\ &- ax + ab \\ &= x^2 - (a+b)x + ab \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y=0 & \quad y=0.5 \\ y=1 & \end{aligned}$$

1

$$S \in x = i$$

$$\underbrace{(x+i)}_{2i} \underbrace{(x-i)}_0 = 0$$

$$(x-a)(x-b) = 0$$

$$\begin{aligned} (x - (a+ib))(x - (a-ib)) \\ = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2) \end{aligned}$$

$$\overline{(4+3i)} = 4-3i$$

$$\overline{(a+bi)} = a-bi$$

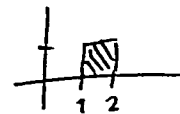
$$ii =$$

$$(0+ii) = -1$$

$$\int_{y=0}^{y=1} \underbrace{\int_{x=1}^{x=2} x+y dx}_{\frac{3}{2}+y} dy = \int_{y=0}^{y=1} \frac{3}{2} + y dy = \left(\frac{3}{2}y + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=0}^{y=1}$$

$$= \left(\frac{3}{2} \cdot 1 + \frac{1^2}{2} \right) - \left(\frac{3}{2} \cdot 0 + \frac{0^2}{2} \right)$$

$$= \frac{4}{2} = 2$$



$$\begin{aligned} \int_{x=1}^{x=2} x+y dx &= \int_{x=1}^{x=2} x dx + \int_{x=1}^{x=2} y dx \\ &= \underbrace{\int_{x=1}^{x=2} x dx}_{\frac{x^2}{2} \Big|_{x=1}^{x=2}} + y \underbrace{\int_{x=1}^{x=2} 1 dx}_y \\ &= \left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right) + y \cdot 1 \\ &= \frac{3}{2} + y \end{aligned}$$

C2 30/JUN/2023

INÍCIO: 14:25

HOJE: REVISÃO PRA

P2 - EU FIZ UMA

PARTE DO PDF DE

DICAS PRA P2 E

TROUXE CÓPIAS,

A GENTE VAI

TRABALHAR ISSO

HOJE - É NO

FINAL DA AULA

A GENTE VAI

VER UMA INTRODUÇÃO

A VOLUMES. A P2

VAI TER UMA QUESTÃO

SOBRE VOLUMES VALENDO

1 PONTO, E NA AULA

QUE VEM A GENTE VAI

VER O RESUMO SOBRE

VOLUMES E UM POUCO

SOBRE COMPRIMENTO DE

ARCO - QUE NÃO VAI

CAIR NA PROVA.

Sabemos que:

$$(x - \alpha) \cdot (x - \beta) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$$

SEJA $z = \alpha$; OBS: $z \in \mathbb{C}$.DIGAMOS QUE $\beta = \bar{z} = \bar{\alpha}$.

SEJA

$$f(x) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta.$$

É FÁCIL VER QUE

$$f(\alpha) = 0 \quad \text{e}$$

$$f(\beta) = 0$$

$$\alpha = 42;$$

$$\alpha + \beta = 42;$$

$$p(x) = 0$$

$$\begin{aligned} (a+b)(c+d) &= a(c+d) \\ &\quad + b(c+d) \\ &= ac + ad \\ &\quad + bc + bd \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x-a)(x-b) &= x(x-b) \\ &\quad - a(x-b) \end{aligned}$$

$$= x^2 - xb - ax + ab$$

$$= x^2 - (a+b)x + ab$$

DIGAMOS QUE

$$f(x) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$$

ENTÃO

$$f(\alpha) = 0.$$

SEJA

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - \alpha)(x - \beta) \\ &= x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta \end{aligned}$$

ENTÃO:

$$f(\alpha) = 0 \quad \text{e}$$

$$f(\beta) = 0.$$

$$\begin{aligned} y'' - y' - 6y &= 0 \\ (D^2 - D - 6)y &= 0 \end{aligned}$$

$$(x^2 - x - 6) = (x - 3)(x + 2)$$

$$(x-a)(x-b) = x^2 - \underbrace{(a+b)}_1 x + \underbrace{ab}_{-6}$$

a	b	ab	a+b
-6	1	-6	-5
-3	2	-6	-1
-2	3	-6	1
-1	6	-6	5
1	-6	-6	-5
2	-3	-6	-1
3	-2	-6	1
6	-1	-6	5

$$= x^2 - (a+b)x + ab$$

$$a = 42;$$

$$a+b = 42;$$

DIGAMOS QUE

$$f(x) = x^2 - (a+b)x + ab$$

ENTÃO

$$f(a) = 0.$$

SEJA

$$f(x) = (x-a)(x-b) \\ = x^2 - (a+b)x + ab$$

ENTÃO:

$$f(a) = 0 \quad \text{e}$$

$$f(b) = 0.$$

$$p(x) = 0$$

$$(a+b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d) \\ = ac + ad + bc + bd$$

$$(x-a)(x-b) = x(x-b) - a(x-b)$$

$$= x^2 - xb - ax + ab$$

$$= x^2 - (a+b)x + ab$$

$$y'' - y' - 6y = 0 \\ (D^2 - D - 6)y = 0$$

$$(x^2 - x - 6) = (x-3)(x+2)$$

$$(x-a)(x-b) = x^2 - \underbrace{(a+b)}_1 x + \underbrace{ab}_{-6}$$

a	b	ab	a+b
-6	1	-6	-5
-3	2	-6	-1
-2	3	-6	1
-1	6	-6	5
1	-6	-6	-5
2	-3	-6	-1
3	-2	-6	1
6	-1	-6	5

$$\int_{y=0}^{y=1} \underbrace{\int_{x=1}^{x=2} x+y dx}_{\frac{3}{2}+y} dy = \int_{y=0}^{y=1} \frac{3}{2} + y dy = \left(\frac{3}{2}y + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=0}^{y=1} \\ = \left(\frac{3}{2} \cdot 1 + \frac{1^2}{2} \right) - \left(\frac{3}{2} \cdot 0 + \frac{0^2}{2} \right) \\ = \frac{4}{2} \\ = 2$$

$$\int_{x=1}^{x=2} x+y dx = \int_{x=1}^{x=2} x dx + \int_{x=1}^{x=2} y dx \\ = \underbrace{\int_{x=1}^{x=2} x dx}_{\frac{x^2}{2} \Big|_{x=1}^{x=2}} + y \underbrace{\int_{x=1}^{x=2} 1 dx}_1 \\ = \left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right) + y \\ = \frac{3}{2} + y$$



C2 4/JULHO/2023

INÍCIO: 14:12

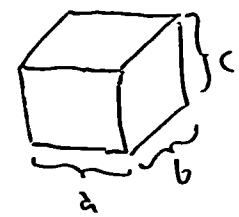
HOJE: VOLUMES -
 VAI CAIR UMA QUESTÃO
 SOBRE VOLUMES DE
 SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO
 NA PZ, VALEANDO UM
 PONTO - E COMPRIMENTO
 DE ARCO - QUE NÃO VAI
 CAIR NA PROVA, MAS
 QUE VAI SERVIR PARA
 VOCÊS ENTENDEREM
 ALGUMAS IDEIAS DE C3...

IDEIA: INTEGRAIS
 GENERALIZAM PRODUTOS.
 CASO MAIS SIMPLES:

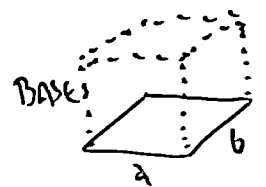
$C \cdot (b-a) = C$
 ALTURA BASE $f(x)=C$

$\int_{x=a}^{x=b} C dx$

$\int_{x=1}^{x=2} x dx =$



VOLUME: abc



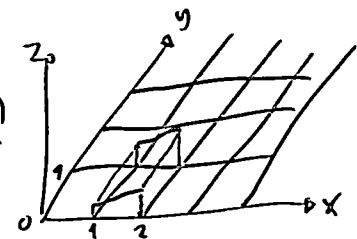
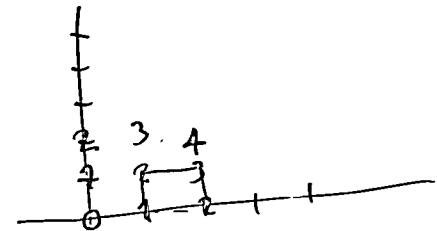
BASES

ALTURA: c

ÁREA: ab

VAMOS CONSIDERAR
 ESSA SUPERFÍCIE:
 $F(x,y) = x+y$

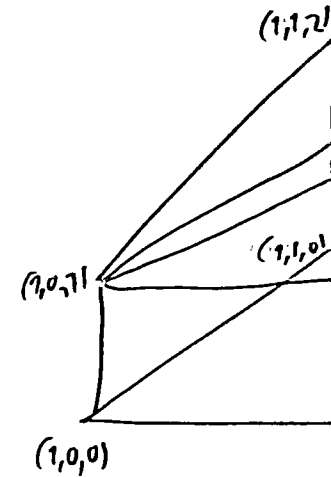
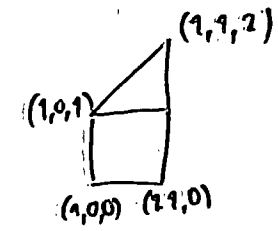
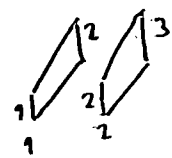
$F(0,2)=2$ $F(1,2)=3$ $F(2,2)=4$
 $F(0,1)=1$ $F(1,1)=2$ $F(2,1)=3$
 $F(0,0)=0$ $F(1,0)=1$ $F(2,0)=2$

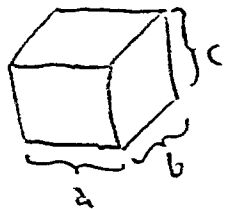


$\int_{x=1}^{x=2} \text{ÁREA}(\dots) dx = \int_{x=1}^{x=2} \int_{y=0}^{y=1} x+y dy dx$

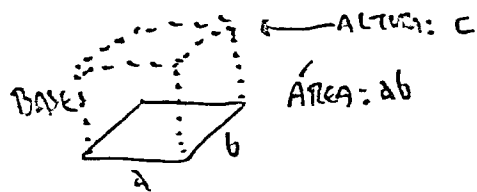
Em $x=1$: $z=x+y$
 $z=1+y$
 $\int_{y=0}^{y=1} 1+y dy$

Em $x=2$: $z=x+y$
 $z=2+y$
 $\int_{y=0}^{y=1} 2+y dy$



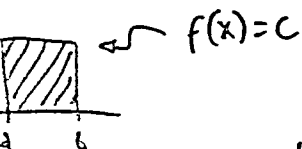
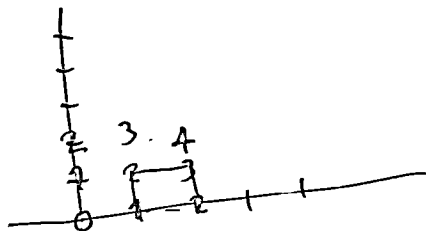


VOLUME: abc

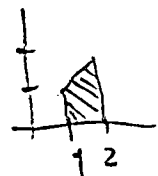


VAMOS CONSIDERAR
ESSA SUPERFÍCIE:
 $F(x, y) = x + y$

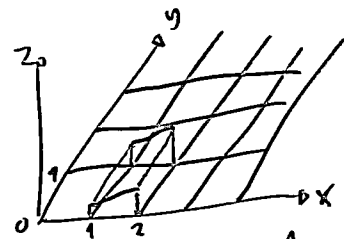
$$\begin{aligned} F(0,2) &= 2 & F(1,2) &= 3 & F(2,2) &= 4 \\ F(0,1) &= 1 & F(1,1) &= 2 & F(2,1) &= 3 \\ F(0,0) &= 0 & F(1,0) &= 1 & F(2,0) &= 2 \end{aligned}$$



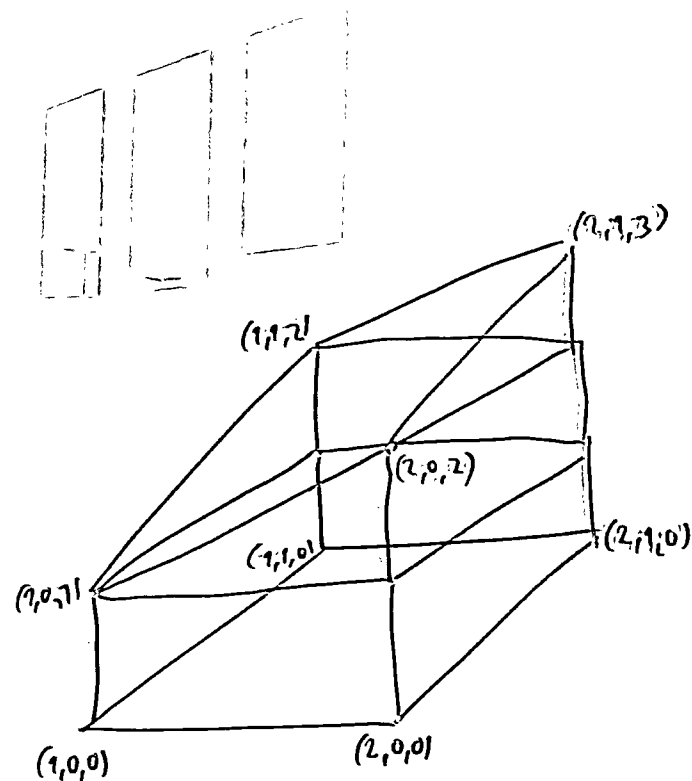
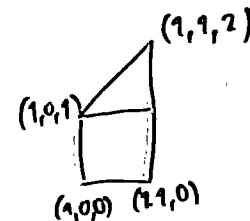
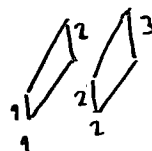
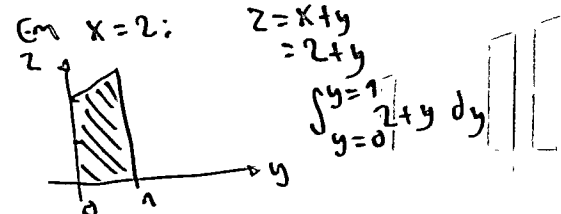
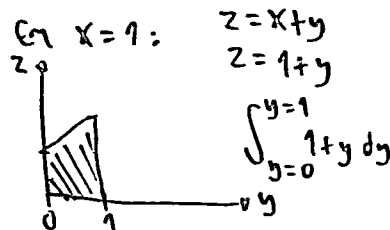
dx



$$\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \underbrace{f(x_i)}_{\text{ÁREA}} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\text{BASE}}$$



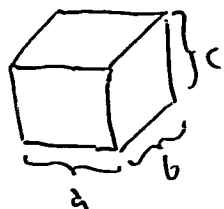
$$\int_{x=1}^{x=2} \text{ÁREA}(\dots) dx = \int_{x=1}^{x=2} \int_{y=0}^{y=1} x + y dy dx$$



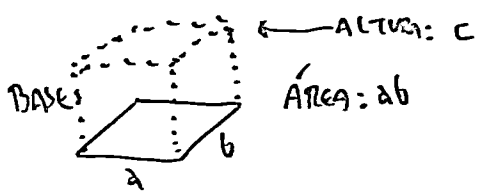
C2 4/JULHO/2023

INÍCIO: 14:12

HOJE: VOLUMES -
VAI CAIR UMA QUESTÃO
SOBRE VOLUMES DE
SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO
NA PZ, VALEANDO UM
PONTO - E COMPRIMENTO
DE ARCO - QUE NÃO VAI
CAIR NA PROVA, MAS
QUE VAI SERVIR PARA
VOCÊS ENTENDEREM
ALGUMAS IDEIAS DE C3...

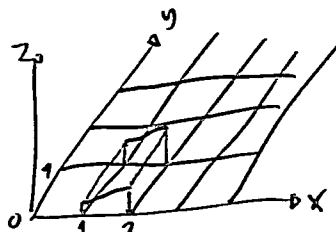
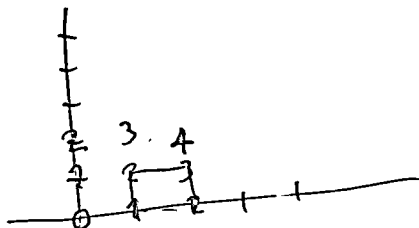


VOLUME: abc



VAMOS CONSIDERAR
ESSA SUPERFÍCIE:
 $F(x, y) = x + y$

$F(0, 2) = 2$ $F(1, 2) = 3$ $F(2, 2) = 4$
 $F(0, 1) = 1$ $F(1, 1) = 2$ $F(2, 1) = 3$
 $F(0, 0) = 0$ $F(1, 0) = 1$ $F(2, 0) = 2$

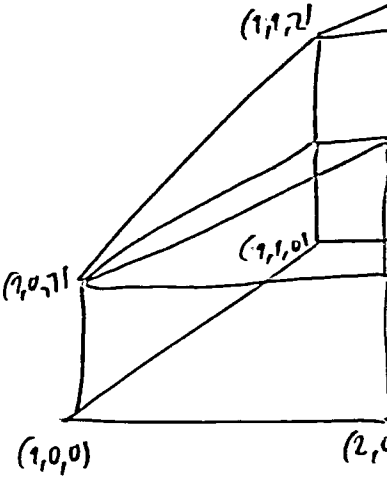


$$\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \underbrace{f(x_i)}_{\text{ÁREA}} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\text{BASE}}$$

$$\int_{x=1}^{x=2} \underbrace{\text{ÁREA}(\dots)}_{\text{ÁREA!}} dx = \int_{x=1}^{x=2} \int_{y=0}^{y=1} x + y dy dx = \int_{x=1}^{x=2} x + \frac{1}{2} dx = 2$$

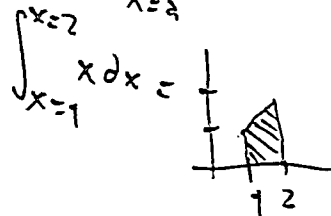
$$\begin{aligned} \int_{x=42}^{x=99} 10x + k dx &= 10 \int_{x=42}^{x=99} x dx + k \int_{x=42}^{x=99} 1 dx \\ &= 10 \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_{x=42}^{x=99} + k \left(x \right) \Big|_{x=42}^{x=99} \\ &= 10 \left(\frac{99^2}{2} - \frac{42^2}{2} \right) + k(99 - 42) \end{aligned}$$

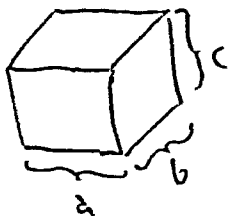
$$\begin{aligned} \int_{y=0}^{y=1} x + y dy &= \int_{y=0}^{y=1} x dy + \int_{y=0}^{y=1} y dy \\ &= x \int_{y=0}^{y=1} 1 dy + \frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=1} \\ &= x \left(y \Big|_{y=0}^{y=1} \right) + \frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=1} \\ &= x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$



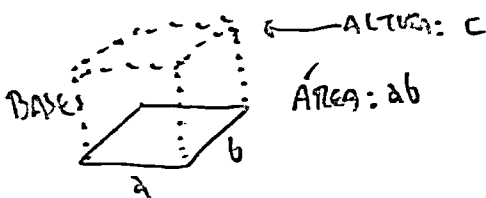
IDEIA: INTEGRAIS
GENERALIZAM PRODUTOS.
CASO MAIS SIMPLES:

$$\underbrace{c}_{\text{ALTURA}} \cdot \underbrace{(b-a)}_{\text{BASE}} = c \cdot (b-a) = \int_a^b c dx$$



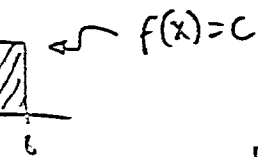
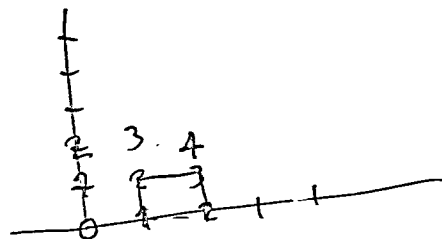


VOLUME: abc

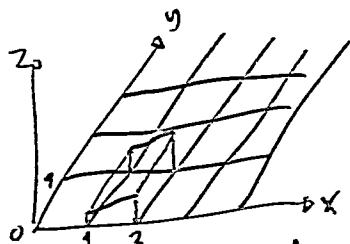


VAMOS CONSIDERAR
ESSA SUPERFÍCIE:
 $F(x, y) = x + y$

$$\begin{aligned} F(0,2) &= 2 & F(1,2) &= 3 & F(2,2) &= 4 \\ F(0,1) &= 1 & F(1,1) &= 2 & F(2,1) &= 3 \\ F(0,0) &= 0 & F(1,0) &= 1 & F(2,0) &= 2 \end{aligned}$$



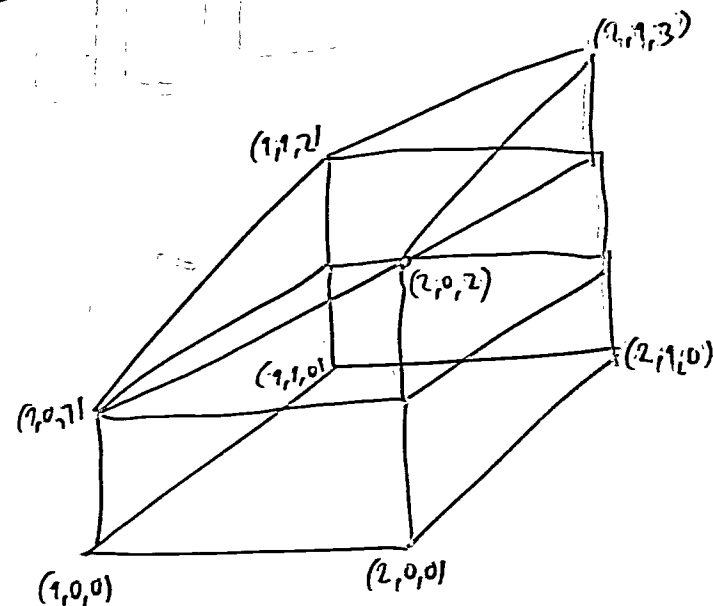
$$\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \underbrace{f(x_i)}_{\text{ALTURA}} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\text{BASE}}$$



$$\int_{x=1}^{x=2} \underbrace{\text{ÁREA}(\dots)}_{\int_{y=0}^{y=1} x+y dy} dx = \int_{x=1}^{x=2} x + \frac{1}{2} dx = 2$$

$$\begin{aligned} \int_{x=42}^{x=99} 10x + k dx &= 10 \int_{x=42}^{x=99} x dx + k \int_{x=42}^{x=99} 1 dx \\ &= 10 \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_{x=42}^{x=99} + k \left(x \right) \Big|_{x=42}^{x=99} \\ &= 10 \left(\frac{99^2}{2} - \frac{42^2}{2} \right) + k(99 - 42) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{y=0}^{y=1} x+y dy &= \int_{y=0}^{y=1} x dy + \int_{y=0}^{y=1} y dy \\ &= x \int_{y=0}^{y=1} 1 dy + \frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=1} \\ &= x \left(y \right) \Big|_{y=0}^{y=1} + \frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=1} \\ &= x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

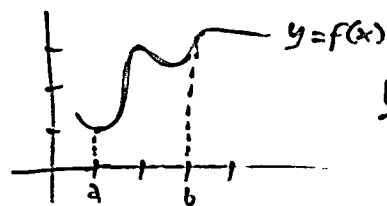


C2 4/JULHO/2023

INÍCIO: 14:12

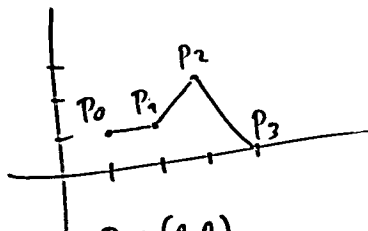
HOJE: VOLUMES -
VAI CAIR UMA QUESTÃO
SOBRE VOLUMES DE
SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO
NA PZ, VALEANDO UM
PONTO - E COMPRIMENTO
DE ARCO - QUE NÃO VAI
CAIR NA PROVA, MAS
QUE VAI SERVIR PRA
VOCÊS ENTENDEREM
ALGUMAS IDÉIAS DE C3...

INTRODUÇÃO A COMPRIMENTO DE ARCO



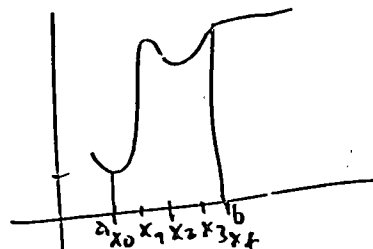
QUAL É O
COMPRIMENTO DE
ARCO NESSE
CASO COMPLICADO
DAQUI?

VAMOS APROXIMAR
ELE POR UMA SOMA...



$P_0 = (1, 1)$
 $P_1 = (2, 1)$
 $P_2 = (3, 2)$
 $P_3 = (4, 0)$

AQUI O COMPRIMENTO
DE ARCO É $1 + \sqrt{2} + \sqrt{5}$.



AÍ O
COMPRIMENTO DE ARCO
VAI SER APROXIMADO POR

$$\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} + \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} + \dots$$

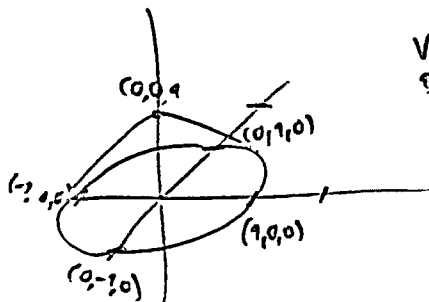
$$= \sum_{i=1}^N \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$$

O RESULTADO FINAL
VAI SER ESTE:

$$\int_{x=a}^{x=b} \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

DIGAMOS QUE A GENTE
VAI OLHAR SÓ PRA UM
SEGMENTO...

$$\sqrt{1 + f'(x)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$



VOLUME
DO CONE: $\int_{z=0}^{z=1} \text{ÁREA DO CÍRCULO NA ALTURA } z \, dz$

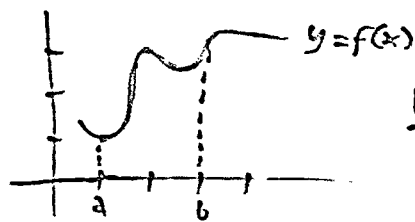
$$= \int_{z=0}^{z=1} \pi r(z)^2 \, dz$$

$$= \int_{z=0}^{z=1} \pi (1-z)^2 \, dz$$

$$= \int_{z=0}^{z=1} \pi (z^2 - 2z + 1) \, dz$$

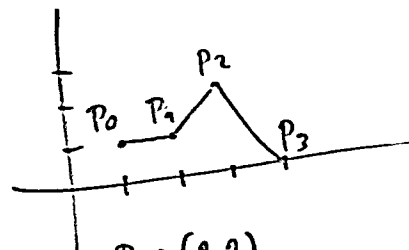
$$= \pi \left(\frac{z^3}{3} - 2\frac{z^2}{2} + z \right) \Big|_{z=0}^{z=1}$$

INTRODUÇÃO A COMPRIMENTO DE ARCO



Qual é o
comprimento de
arco nesse
caso complicado
daqui?

Vamos aproximar
ele por uma soma...



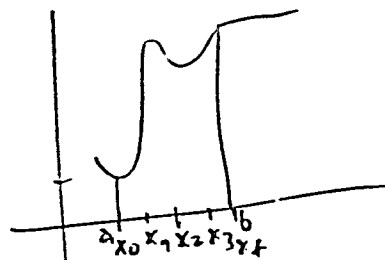
$$P_0 = (1, 1)$$

$$P_1 = (2, 1)$$

$$P_2 = (3, 2)$$

$$P_3 = (4, 0)$$

Aqui o comprimento
de arco é $1 + \sqrt{2} + \sqrt{5}$.



Aí o
comprimento de arco
vai ser aproximadamente

$$\begin{aligned} &\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \\ &+ \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &+ \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \\ &+ \dots \end{aligned}$$

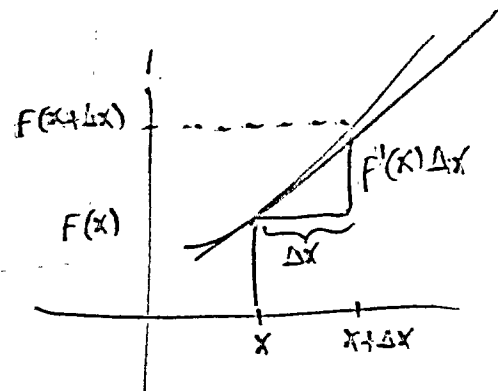
$$= \sum_{i=0}^N \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$$

O resultado final
vai ser este:

$$\int_{x=a}^{x=b} \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Digamos que a gente
vai olhar só pra um
segmento...

$$\sqrt{1 + f'(x)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$



f'

$$\{r(z), z \geq 0\}$$

$$\text{ÁREA} = \int_{z=0}^{z=1} \text{ÁREA DO CÍRCULO} dz$$

$$= \int_{z=0}^{z=1} \pi r(z)^2 dz$$

$$= \int_{z=0}^{z=1} \pi (1-z)^2 dz$$

$$= \int_{z=0}^{z=1} \pi (z^2 - 2z + 1) dz$$

$$= \pi \left(\frac{z^3}{3} - 2\frac{z^2}{2} + z \right) \Big|_{z=0}^{z=1}$$