C3 - 30/mar/2022

Avisos:

① O curso tem uma página. Vá em http://angg.twu.net/ (ou procure por "Eduardo Ochs" no Google) e clique em "C3" na barra de navegação. (Ops: vou atualizar essa página em breve).

② O curso é principalmente sobre umas contas complicadas em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ que 95% das pessoas só entendem se conseguirem visualizar e fazer exemplos... então a gente vai aprender a desenhar e visualizar tudo.

③ Não tem ar condicionado, então todo mundo pode vir de chinelo, inclusive eu.

Lembrem que em GA pontos e vetores são diferentes - e a gente escreve eles diferente:

$(2,3)$: ponto em $\mathbb{R}^2$

$\overrightarrow{(2,3)}$: vetor em $\mathbb{R}^2$

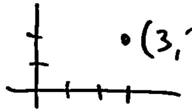
Em AL a convenção é outra:

$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = (2,3)$: ponto

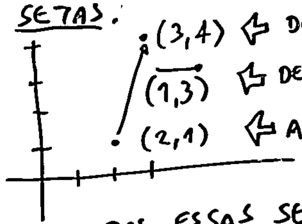
$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = (2,3)$: vetor

Aqui a gente também vai usar várias notações diferentes incompatíveis - uma mais moderna, "notação de matemáticos", e outra mais antiga, a "notação de físicos".

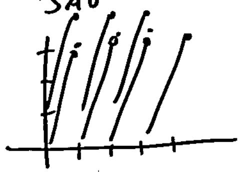
Vamos rever umas coisas de GA, com outras regras (sobre como desenhar).



Vetores vão ser deslocamentos - ou setas.



Todas essas setas "são" o vetor $\overrightarrow{(1,3)}$:

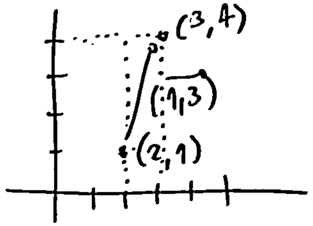


A regra que a gente vai usar hoje é que

Toda vez que a gente for representar graficamente algo da forma ponto + vetor a gente vai desenhar como:

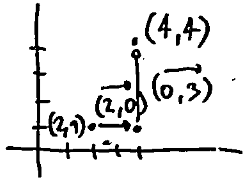
1) o ponto "antes",
2) o deslocamento, como seta
3) o ponto "depois".

$(2,1) + \overrightarrow{(1,3)} = (3,4)$

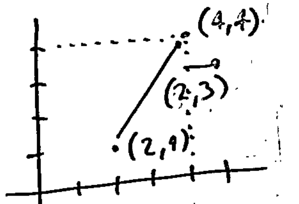


Notação com chaves: (versão pra resultados parciais)

$$\underbrace{\underbrace{\left((2,1) + \overrightarrow{(2,0)}\right)}_{(4,1)} + \overrightarrow{(0,3)}}_{(4,4)}$$



$$\underbrace{(2,1) + \underbrace{\left(\overrightarrow{(2,0)} + \overrightarrow{(0,3)}\right)}_{\overrightarrow{(2,3)}}}_{(4,4)}$$



Exercício (p.10 do PDF do semestre passado): Sejam $A=(3,1)$, $\vec{v}=\overrightarrow{(1,0)}$, $\vec{w}=\overrightarrow{(0,1)}$. Represente graficamente num gráfico só:

a) A
b) $(A+\vec{v})+\vec{w}$
c) $(A+\vec{w})+\vec{v}$
d) $(A+2\vec{v})+4\vec{w}$
e) $(A+4\vec{w})+2\vec{v}$
f) $(A-\vec{v})+\vec{w}$
g) $(A+\vec{w})-\vec{v}$
h) $(A-2\vec{v})+4\vec{w}$
i) $(A+4\vec{w})-2\vec{v}$

C3 30/MAR/2022

OS EXERCÍCIOS 2, 3 E 4 SÃO EXATAMENTE IGUAIS AO EXERCÍCIO EXCETO PELOS DADOS DO "SEJAM" NO INÍCIO...

NO EXERCÍCIO 2 É

"SEJAM $A=(1,1)$, $\vec{v}=\overrightarrow{(1,-1)}$, $\vec{w}=\overrightarrow{(1,1)}$"

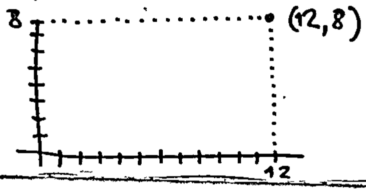
NO EXERCÍCIO 3 É

SEJAM $A=(1,1)$, $\vec{v}=\overrightarrow{(1,-1)}$, $\vec{w}=(-1,1)$

E NO EXERCÍCIO 4 É:

SEJAM $A=(2,6)$, $\vec{v}=\overrightarrow{(1,1)}$, $\vec{w}=\overrightarrow{(2,-1)}$.

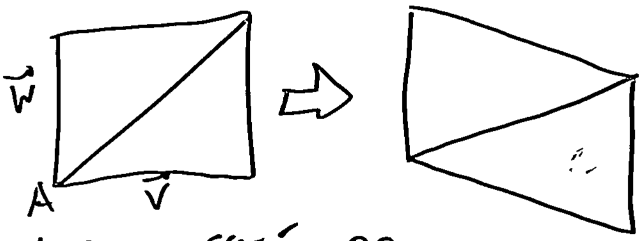
PRA FAZER O 4 VOCÊ VAI PRECISAR FAZER UM GRÁFICO QUE CONTENHA OS PONTOS (0,0) E (12,8), ASSIM:



PRA QUE ESSES EXERCÍCIOS SERVEM?

COMPARE COM GEOGEBRA...

NO GEOGEBRA É FÁCIL VER COMO A FIGURA TODA MUDA QUANDO A GENTE ARRASTA UM PONTO COM O MOUSE.

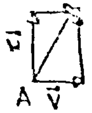


A GENTE ESTÁ APRENDENDO A VER "COMO A FIGURA MUDA" FAZENDO ALGUNS EXEMPLOS <u>EM QUE AS CONTAS SÃO SIMPLES</u> NA MÃO.

DEPOIS A GENTE VAI VER TÉCNICAS PRA DESENHAR FIGURAS "PRO CASO GERAL", SEM VALORES EXPLÍCITOS.

C3 1º/ABRIL/2022

...Lembram que o GeoGebra consegue fazer animações de como uma figura como essa aqui muda



Quando mudamos os "parâmetros" dela, que são o ponto A e os vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$... mas dá trabalho programar uma figura dessas.

Antigamente as pessoas visualizavam essas coisas de cabeça, e muito rápido. A gente vai aprender as técnicas delas.

Hoje: exercícios 1,2,3,4 do primeiro PDF, com algumas técnicas novas.

Dica:

Se $A=(2,1)$, $\vec{v}=\overrightarrow{(0,2)}$, $\vec{w}=\overrightarrow{(1,0)}$.

$(A+\vec{v})+\vec{w}=\,?$

Os exercícios 1, 2, 3 e 4 são parecidos - só a primeira parte muda - os valores de $A, \vec{v}$ e $\vec{w}$.

Esta é a parte comum:

Represente graficamente num gráfico só:

a) A
b) $(A+\vec{v})+\vec{w}$
c) $(A+\vec{w})+\vec{v}$
d) $(A+2\vec{v})+4\vec{w}$
e) $(A+4\vec{w})+2\vec{v}$
f) $(A-\vec{v})+\vec{w}$
g) $(A+\vec{w})-\vec{v}$
h) $(A-2\vec{v})+4\vec{w}$
i) $(A+4\vec{w})-2\vec{v}$

No exercício 1:
$A=(3,1)$, $\vec{v}=\overrightarrow{(1,0)}$, $\vec{w}=\overrightarrow{(0,1)}$

No exercício 2:
$A=(1,1)$, $\vec{v}=\overrightarrow{(1,-1)}$, $\vec{w}=\overrightarrow{(1,1)}$

No exercício 3:
$A=(1,1)$, $\vec{v}=\overrightarrow{(1,-1)}$, $\vec{w}=\overrightarrow{(-1,1)}$

No exercício 4:
$A=(2,6)$, $\vec{v}=\overrightarrow{(1,1)}$, $\vec{w}=\overrightarrow{(2,-1)}$

Próximo assunto:
Trajetórias - e como desenhá-las fazendo poucas contas.

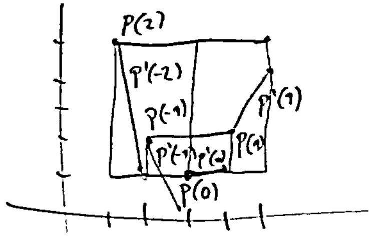
Vamos começar com retas parametrizadas e parábolas parametrizadas.

Idéia:
(informal por enquanto)
O vetor velocidade é sempre tangente à trajetória.

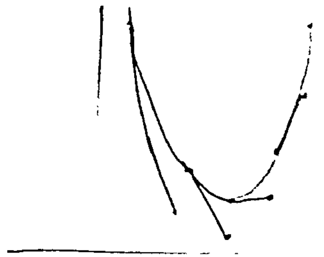
No caso da parábola
$P(t)=A+t\vec{v}+t^2\vec{w}$
o vetor velocidade é sempre
$P'(t)=\vec{v}+2t\vec{w}$,
e temos:
$P'(0)=\vec{v}$,
$P'(1)=\vec{v}+2\vec{w}$,
$P'(2)=\vec{v}+4\vec{w}$,
$P'(-1)=\vec{v}-2\vec{w}$,
$P'(-2)=\vec{v}-4\vec{w}$.

Vamos chamar as parábolas do exercício 1 (obs: vocês não sabiam que elas eram parábolas!) de "parábola 1", "parábola 2", etc.

Pra cada uma dessas parábolas desenhe de novo a figura que você fez, mas sem os nomes - exemplo (parábola 1)



E sobre essa figura desenhe:
$P(0)+\overrightarrow{P'(0)}$,
$P(1)+P'(1)$,
$P(-1)+P'(-1)$,
$P(-2)+P'(-2)$



C3 6/ABRIL/2022

VOCÊS DEVEM TER ASSISTIDO UM TRECHO DO VÍDEO SOBRE CURVAS DE BÉZIER DA FREYA HOLMER... ELE MOSTRA VÁRIAS SITUAÇÕES EM QUE VÁRIAS QUANTIDADES "VARIAM JUNTAS", E ELA MOSTRA COMO USAR ALGUMAS DESSAS QUANTIDADES PRA DESENHAR FIGURAS INTERESSANTES.

HOJE NÓS VAMOS VER ALGUMAS COISAS PARECIDAS COM ISSO, E EXERCITAR O OLHÔMETRO.

NÃO VAMOS USAR NEM RÉGUA NEM CALCULADORA / COMPUTADOR - TUDO VAI SER APROXIMADO.

A OPERAÇÃO QUE A FREYA MAIS USA NO VÍDEO É O "LERP", QUE É DEFINIDO ASSIM:

$$\mathrm{LERP}(A,B,k) = A + k\overrightarrow{AB} = A + k(B-A)$$

EXEMPLOS:

$\mathrm{LERP}(A,B,0) = A + 0\overrightarrow{AB} = A$

$\mathrm{LERP}(A,B,1) = A + 1\cdot\overrightarrow{AB} = B$

$\mathrm{LERP}(A,B,0.5) = A + 0.5\overrightarrow{AB} = \frac{A+B}{2}$

ALGUMAS TRAJETÓRIAS:

TRAJETÓRIA 1:

$P(t) = (\mathrm{sen}\, t, t)$ $\qquad$ $P'(t) = (\cos t, 1)$

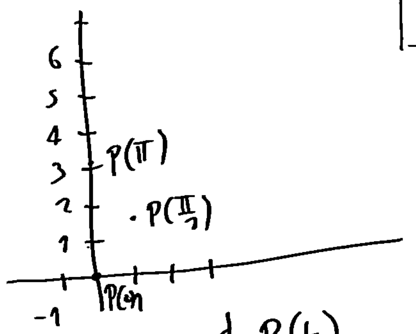
$P(0) = (0, 0) \approx (0, 0)$ $\qquad$ $P'(0) \approx$

$P(\frac{\pi}{2}) = (1, \pi/2) \approx (1, 1.55)$ $\qquad$ $P'(\frac{\pi}{2}) \approx$

$P(\pi) = (0, \pi) \approx (0, 3.1)$ $\qquad$ $P'(\pi) \approx$

$P(\frac{3\pi}{2}) = (-1, \frac{3\pi}{2}) \approx (-1, 4.65)$ $\qquad$ $P'(\frac{3\pi}{2}) \approx$

$P(2\pi) = (0, 2\pi) \approx (0, 6.2)$ $\qquad$ $P'(2\pi) \approx$



$$P'(t) = \frac{d}{dt}P(t) = \frac{d}{dt}(\mathrm{sen}\, t, t) = \left(\frac{d}{dt}\mathrm{sen}\, t, \frac{d}{dt}t\right) = (\cos t, 1)$$

EXERCÍCIO 1:

DESENHE $P(t) + P'(t)$

(OBS: LEMBRE QUE ISSO É UM PONTO E UMA SETA APOIADA NELE!)

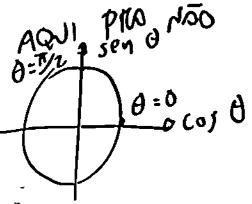
PARA $t = 0, \frac{\pi}{4}, 2\frac{\pi}{4}, 3\frac{\pi}{4}, \ldots, 8\frac{\pi}{2}$

E USE ISSO PRA FAZER UM DESENHO BASTANTE BOM DESSA TRAJETÓRIA.

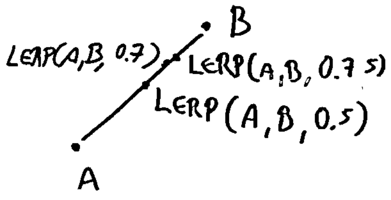
DICA: $\sqrt{2} \approx 1.4$

$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7$

E USE ISSO AQUI PRA NÃO SE PERDER:



MAIS UMA DICA:



EXERCÍCIO 2:

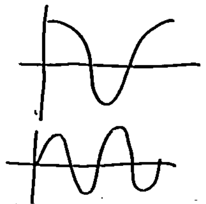
A TRAJETÓRIA 2 É:

$P(t) = (\cos t, \mathrm{sen}\, 2t)$.

FAÇA ALGO PARECIDO PRA DESENHAR A TRAJETÓRIA 2.

DICA PRO 2:

TENTE INVENTAR "MODOS GRÁFICOS DE CALCULAR $\cos t$ E $\mathrm{sen}\, 2t$". POR EXEMPLO, FAÇA GRÁFICOS COMO ESSES AQUI:



C3 8/ABRIL/2022

HOJE: CONTINUAÇÃO DOS EXERCÍCIOS DE OLHÔMETRO DA AULA PASSADA!

NA AULA PASSADA VOCÊS FIZERAM ESSES EXERCÍCIOS AQUI...

CONSIDERE ESTAS TRAJETÓRIAS:

TRAJETÓRIA 1:

$P(t) = (\operatorname{sen} t, t)$

TRAJETÓRIA 2:

$P(t) = (\cos t, \operatorname{sen} 2t)$

EXERCÍCIO 1:

DESENHE $P(t)+P'(t)$ PARA $t = 0\frac{\pi}{4}, 1\frac{\pi}{4}, 2\frac{\pi}{4}, \ldots, 8\frac{\pi}{4}$ NA TRAJETÓRIA 1.

EXERCÍCIO 2:

DESENHE $P(t)+P'(t)$ PARA $t = 0\frac{\pi}{4}, 1\frac{\pi}{4}, \ldots, 8\frac{\pi}{4}$ NA TRAJETÓRIA 2 E FAÇA UM ESBOÇO DE COMO ESSA TRAJETÓRIA DEVE SER.

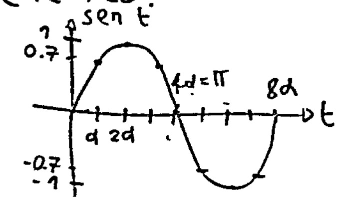
NOVIDADE

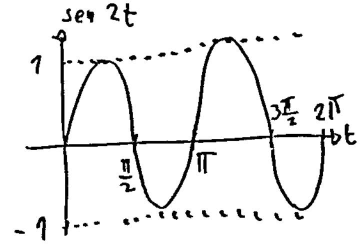
(E ASSUNTO PRINCIPAL DA AULA):

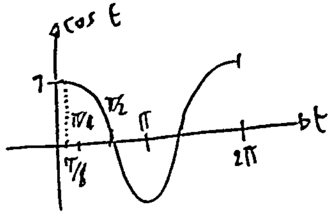
HOJE VOCÊS VÃO TENTAR FAZER ESSES DESENHOS ESCREVENDO O MÍNIMO POSSÍVEL E FAZENDO GRÁFICOS QUE AJUDEM VOCÊS A FAZER OS DESENHOS TODOS DE CABEÇA.

EXEMPLO:

ONDE $\alpha = \frac{\pi}{4}$







IMPORTANTE:

CÁLCULO 3 É ~~PRINCIPALMENTE~~ SOBRE FAZER DESENHOS (TORTOS) QUE TODO MUNDO ENTENDA...

DICA: ACABEI DE MANDAR PELO TELEGRAM O LINK DE UM EXERCÍCIO QUE É PRA SER RESOLVIDO SÓ NO OLHÔMETRO (PORQUE VOCÊS NÃO TÊM AS FÓRMULAS DOS GRÁFICOS DELE).

TRAJETÓRIA 3:

$P(t) = (t + \cos t, \operatorname{sen} t)$

EXERCÍCIO 3:

TENTE DESENHAR A TRAJETÓRIA 3.

DICAS PRO EXERCÍCIO 3:

OS VETORES VELOCIDADE PODEM TE AJUDAR BASTANTE A ENTENDER QUE TRAJETÓRIA É ESSA. SE VOCÊ TERMINAR TODO O RESTO DÊ UMA OLHADA NO LINK SOBRE O VETOR ACELERAÇÃO QUE EU VOU MANDAR PELO TELEGRAM.

EXERCÍCIO 4:

SEJAM:

$P(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$,

$Q(t) = \left(\frac{\cos 4t}{2}, \frac{\operatorname{sen} 4t}{2}\right)$,

$R(t) = \left(\cos t + \frac{\cos 4t}{2}, \operatorname{sen} t + \frac{\operatorname{sen} 4t}{2}\right)$.

TENTE DESCOBRIR COMO DESENHAR A TRAJETÓRIA $R(t)$.

DICA:

$P(t)$ É A ÓRBITA DE UM PLANETA EM TORNO DO SOL,

$Q(t)$ É A ÓRBITA DE UMA LUA DESSE PLANETA EM TORNO DO PLANETA,

$R(t)$ É A TRAJETÓRIA DESSA LUA EM TORNO DO SOL.

C3 13/ABRIL

O ÚLTIMO EXERCÍCIO DA ÚLTIMA AULA FOI ESSE AQUI:

(4) SEJAM:

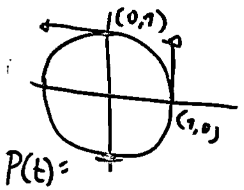
$P(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$

$Q(t) = \left(\frac{\cos 4t}{2}, \frac{\operatorname{sen} 4t}{2}\right)$

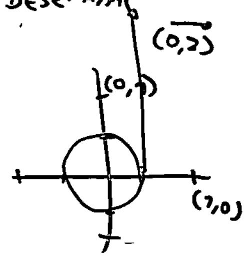
$R(t) = \left(\cos t + \frac{\cos 4t}{2}, \operatorname{sen} t + \frac{\operatorname{sen} 4t}{2}\right)$

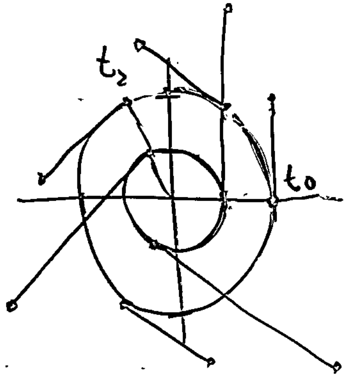
TENTE DESCOBRIR COMO DESENHAR A TRAJETÓRIA $R(t)$.

$P(t) =$



$Q(t) =$





EXERCÍCIO (1) DE HOJE:

SEJAM: $t_0 = 0°$, $t_1 = 60°$, $t_2 = 120°$, $t_3 = 180°$, $t_4 = 240°$, $t_5 = 300°$, $t_6 = 360°$

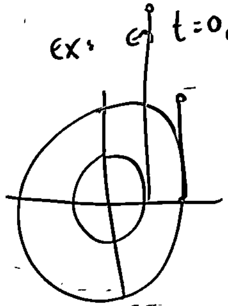
FAÇA TODAS AS CONTAS GRAFICAMENTE E NO OLHÔMETRO AQUI!...

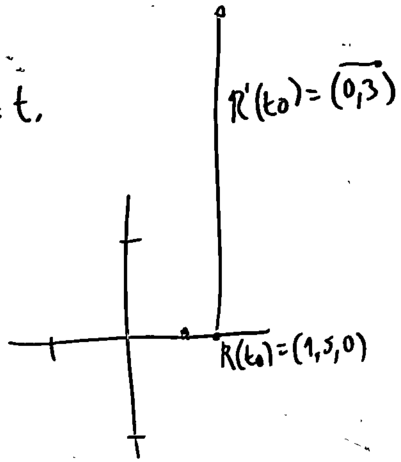
REPRESENTE GRAFICAMENTE

$R(t) + R'(t)$

PARA CADA UM DESSES VALORES DE t.

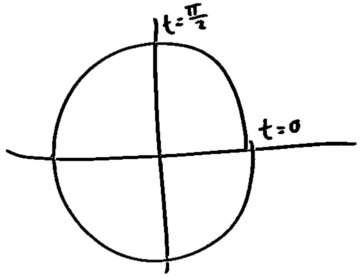
EX: $t = 0$,



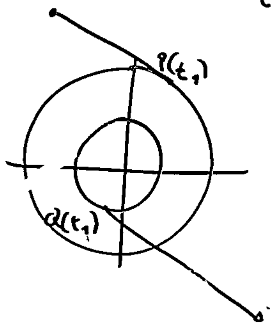


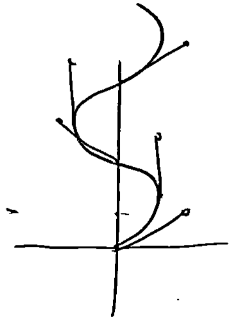
DICA: OS CASOS MAIS FÁCEIS SÃO $t_0 = 0°$ E $t_3 = 180° = \pi$.

AVISO: A AULA DE HOJE IA TER UM "EXERCÍCIO 2", NO QUAL A GENTE APRENDERIA COMO VISUALIZAR A DEFINIÇÃO DE VETOR VELOCIDADE POR LIMITE DO CAP. 2 DO VOL. 4 DOS LIVROS DO FELIPE ACKER... MAS A GENTE VAI DEIXAR ELE PRA OUTRA QUARTA!



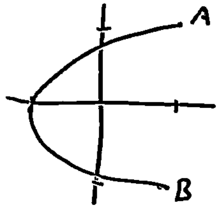
t



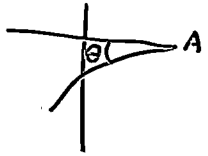


C3 20/ABRIL/2022

UM EXERCÍCIO QUE SÓ ALGUMAS PESSOAS FIZERAM DAVA ESSA FIGURA DAQUI:



NOS PONTOS A E B DESSA TRAJETÓRIA A VELOCIDADE ERA (0,0)... COMO A GENTE FAZ PRA DESCOBRIR ESTE ÂNGULO?



DÁ PRA DESCOBRIR ISSO USANDO O VETOR ACELERAÇÃO, MAS COMO?

HOJE:

NÓS VAMOS VER A IDÉIA ALGÉBRICA POR TRÁS DE COISAS COMO "MELHOR APROXIMAÇÃO POR RETAS", "MELHOR APROXIMAÇÃO POR PARÁBOLAS", ETC...

SÉRIES DE TAYLOR

O PDF QUE EU TROUXE EXPLICA ISSO BEM...

MAS:

O PDF COMEÇA MOSTRANDO QUE A GENTE CONSEGUE RECONSTRUIR POLIS DE GRAU 4 A PARTIR DAS DERIVADAS DELES...

TAMBÉM DÁ PRA FAZER ISSO COM (P. EX.) POLINÔMIOS DE GRAU 6...

<u>SÓ QUE COM UMA FÓRMULA MAIS COMPLICADA</u>

A FÓRMULA PRA GRAU 4 NÃO VAI MAIS FUNCIONAR - O EXERCÍCIO 2 É SOBRE ISSO.

DEPOIS VAMOS GENERALIZAR ISSO PRA QUALQUER GRAU - INCLUSIVE PRA GRAU INFINITO -

EX:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

AVISO

LEMBREM QUE O CURSO DE CÁLCULO 2 É TODO SOBRE FÓRMULAS QUE ÀS VEZES DÃO RESULTADOS ERRADOS...

VAMOS TER ALGUMAS FÓRMULAS ASSIM EM C3 TAMBÉM.

O EXERCÍCIO 2 DO PDF É SOBRE UMA FÓRMULA QUE DÁ UM RESULTADO ERRADO.

DICA: A PARTE MAIS DIFÍCIL DO EXERCÍCIO 2 É ESCREVER A RESPOSTA DE UM JEITO "QUE TODO MUNDO ENTENDA"!

EU ACABEI DE MANDAR PELO TELEGRAM UM LINK COM DICAS DE COMO ESCREVER.

OUTRA DICA:

SE VOCÊ NÃO ESTIVER CONSEGUINDO FAZER O EXERCÍCIO 2 PASSE PRO EXERCÍCIO 3 - TALVEZ A TERMINONOLOGIA DELE TE AJUDE.

C3 27/ABRIL/2022

HOJE: MAIS SÉRIES DE TAYLOR, E TALVEZ INTRODUSÃO À NOTASÃO DE FÍSICOS...

SE VOCÊS PROCURAREM NA INTERNET POR SÉRIES DE TAYLOR FAMOSAS VOCÊS SEMPRE VÃO ENCONTRAR ESSA AQUI NA LISTA DAS MAIS FAMOSAS E IMPORTANTES DE TODAS:

$$f(x) = \ln(1+x)$$

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \ldots$$

(1) EXERCÍCIO: CALCULE $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$, $f''''(0)$ PARA ESTA f E COMPARE O SEU RESULTADO COM A FOLHA DE SPOILERS.

(2) USEM A FORMULA QUE VOCÊS OBTIVERAM NO (1) PRA CALCULAR APROXIMAÇÕES PARA $\ln(1.1)$ E $\ln(1.2)$ E DEPOIS COMPARE OS RESULTADOS COM OS DA CALCULADORA.

AVISO:
AS CONTAS DO EXERCÍCIO 1 SÃO MEIO EMBOLADAS E NOS PRÓXIMOS EXERCÍCIOS NÓS VAMOS REFAZER ELAS DE VÁRIOS JEITOS DIFERENTES.
TENTE ESCREVER ELAS DO JEITO MAIS CLARO POSSÍVEL.

$$g(x) = \ln x$$
$$g'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$
$$g''(x) = (-1)x^{-2}$$
$$g'''(x) = (-1)(-2)x^{-3}$$
$$g''''(x) = (-1)(-2)(-3)x^{-4}$$

$$f(x) = \ln(1+x)$$
$$f'(x) = \ln'(1+x)\cdot\frac{d}{dx}(1+x) = \frac{1}{1+x}\cdot 1 = (1+x)^{-1}$$
$$f''(x) = (-1)(1+x)^{-2}\cdot\frac{d}{dx}(1+x) = (-1)(1+x)^{-2}$$
$$f'''(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3}$$
$$f''''(x) = (-1)(-2)(-3)(1+x)^{-4}$$

$$f(0) = \ln(1+0) = \ln(1) = 0$$
$$f'(0) = (1+0)^{-1} = 1$$
$$f''(0) = (-1)(\underbrace{1+0}_{1})^{-2} = (-1)$$
$$f'''(0) = (-1)(-2)(1+0)^{-3} = (-1)(-2)$$
$$f''''(0) = (-1)(-2)(-3)$$
$$f'''''(0) = (-1)(-2)(-3)(-4)$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} + \frac{f''''(0)x^4}{4!} + \ldots$$
$$= 0 + 1\cdot x + \frac{(-1)x^2}{2!} + \frac{(-1)(-2)x^3}{3!} + \frac{(-1)(-2)(-3)x^4}{4!} + \ldots$$
$$= 0 + x + \left(\frac{-1}{2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{3}\right)x^3 + \left(-\frac{1}{4}\right)x^4$$

$$(-1) = -1!$$
$$(-1)(-2) = 2!$$
$$(-1)(-2)(-3) = -3!$$
$$(-1)(-2)(-3)(-4) = 4!$$

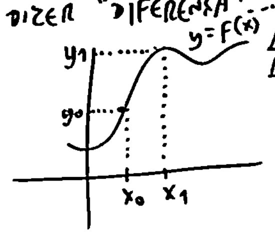
$$\frac{3!}{4!} = \frac{\cancel{1\cdot 2\cdot 3}}{\cancel{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 4} = \frac{1}{4}$$

ESQUEÇAM QUE $f(x) = \ln(1+x)$ E $g(x) = \ln x$... AGORA ELAS VÃO SER FUNÇÕES "ABSTRATAS."

DIGAMOS QUE QUEREMOS A SÉRIE DE TAYLOR DE $f(4+\Delta x) = g(\Delta x)$.

LEMBREM (DE C1) QUE "Δ" QUER DIZER "DIFERENSA"...

EXEMPLO:



$$\Delta x = x_1 - x_0 \qquad y_0 = f(x_0)$$
$$\Delta y = y_1 - y_0 \qquad y_1 = f(x_1)$$

OU:

$$x_1 = x_0 + \Delta x$$
$$y_0 = f(x_0)$$
$$y_1 = f(x_1) = f(x_0+\Delta x)$$
$$\Delta y = y_1 - y_0 = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

OBS: $x_1 = x_0 + \Delta x$
$$y_1 = f(x_1) = f(x_0+\Delta x)$$
$$\vdots$$
$$y_1 = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)\Delta x^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)\Delta x^3}{3!}$$
$$=$$
$$y_1 = y + y_x\Delta x + \frac{y_{xx}\Delta x^2}{2} + \frac{y_{xxx}\Delta x^3}{3!} + \ldots$$

C3 29/ABRIL/2022

HOJE: INTRODUÇÃO À "NOTAÇÃO DE FÍSICOS"!

LEMBRE QUE NAS AULAS SOBRE SÉRIES DE TAYLOR NÓS VIMOS ESTA FÓRMULA AQUI:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \ldots$$

MUDANDO x PRA Δx, ELA VIRA:

$$f(\Delta x) = f(0) + f'(0)\Delta x + \frac{f''(0)(\Delta x)^2}{2!} + \ldots$$

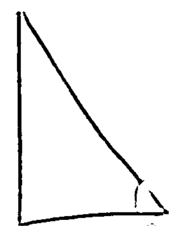
A GENTE FICOU DE VER COMO TRANSFORMAR ESSE 0 NUM PONTO x_0 QUALQUER, E OBTER ESSA FÓRMULA AQUI...

$$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)(\Delta x)^2}{2!} + \ldots$$

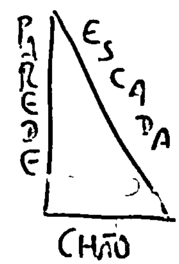
AVISO: EXISTEM MUITAS VERSÕES DA "NOTAÇÃO DE FÍSICOS", E A MINHA VERSÃO PREFERIDA É QUASE IGUAL À DO THOMPSON.

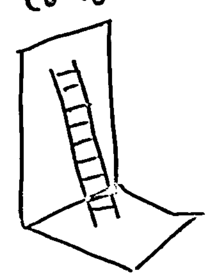
EUCLID I.47 = TEOREMA 47 DOS "ELEMENTOS" DE EUCLIDES = TEOREMA DE PITÁGORAS.

DICA PRO EXERCÍCIO 1b: A FIGURA 5 DO THOMPSON É UM TRIÂNGULO ASSIM:



QUE É PRA GENTE INTERPRETAR COMO:





NO SEU ITEM 1b DESENHE A ESCADA À DIREITA DA PAREDE.

C3 4/MAIO/2022

HOJE:
(DÚVIDAS NOS EXERCÍCIOS SOBRE O LIVRO DO THOMPSON E...)
... A SEÇÃO SOBRE DIFERENCIAIS DO LIVRO DO DANIEL MIRANDA.
NOTE QUE OS DOIS USAM NOTAÇÕES DIFERENTES E INCOMPATÍVEIS - VAMOS VER UM MODO DE JUNTAR AS DUAS NOTAÇÕES DEPOIS.

TÍTULO DA SEÇÃO:
4.7: APROXIMAÇÕES LINEARES E DIFERENCIAL.

LEIAM ELE E TENTE ENTENDER OS EXEMPLOS -
OBS: OS EXEMPLOS SÃO ESCRITOS DE UM JEITO MUITO CURTO - VOCÊ VAI TER QUE EXPANDI-LOS E FAZER OS DESENHOS QUE FALTAM.

DICA PRO EXEMPLO 1:
DESENHE TUDO QUE O D. MIRANDA MENCIONOU MAS NÃO DESENHOU!
ELE ESTÁ FINGINDO QUE TUDO É ÓBVIO!
NÃO SEJA COMO ELE!

NO EXEMPLO 1, TENTE DESENHAR $f(x)$ E $L(x)$.
SE VOCÊ NÃO CONSEGUIR DESENHAR $L(x)$ DIRETO TENTE DESENHAR

$$f(p)+f'(p)(x-p)$$

PARA $p=4$ E ESTES VALORES DE x:
$x=5$,
$x=4.5$,
$x=3$,
$x=3.5$.

VERSÃO CORRIGIDA DO EXERCÍCIO 4.20:
MOSTRE QUE A LINEARIZAÇÃO DE $f(x)=(1+x)^k$ EM $x=0$ É $L(x)=1+kx$.

C3 6/maio/2022

Hoje a gente vai entender mais uns exemplos e exercícios do livro do Daniel Miranda, mas a coisa mais importante vai ser que a gente vai treinar técnicas de escrita e de tradução.

Na página 118 do D. Miranda ele apresenta essas duas fórmulas aqui:

$$f(x) \approx f(p)+f'(p)(x-p)$$
$$L(x) = f(p)+f'(p)(x-p)$$

Truque 1: quando a gente escreve duas fórmulas "com o mesmo formato" perto uma da outra o leitor tende a ler a segunda ou como uma tradução da primeira pra outra notação ou como um caso particular da primeira...

Exemplos:

Isto

$$f(x_1) \approx f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0)$$
$$L(x_1) = f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0)$$

é uma tradução das fórmulas do D. Miranda pra "notação de físicos", e isto

$$f(4.02) \approx f(4)+f'(4)(4.02-4) \quad (☆)$$

é um caso particular da primeira...

Repare que a (☆) fica mais clara se incluirmos estas informações explicitamente:

$x_1 = 4.02 \qquad x_0 = 4$

E repare que se a gente tentar escrever isso aqui direto,

$$\sqrt{4.02} \approx \sqrt{4} + \sqrt{4}'(4.02-4)$$

fica confuso e péssimo — não existe uma notação padrão pra derivada de $\sqrt{x}$ em $x=4$. Aqui a gente tem que usar um truque novo - a gente tem que dar um nome pra função $\sqrt{x}$. Por exemplo:

$$f(4.02) \approx f(4)+f'(4)(4.02-4)$$

Seja $f(x)=\sqrt{x} = x^{1/2}$

Então $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2}\frac{1}{x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\sqrt{4.02} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(4.02-4)$$

$$V = \frac{\pi}{3}(30x^2 - x^3)$$

$V(x) = \frac{\pi}{3}(30x^2 - x^3) \qquad V'(x) = \frac{\pi}{3}(60x - 3x^2) = \pi(20x - x^2)$

x^* é a altura real

S é a altura medida

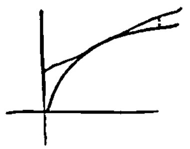
Seja $x_0 = S$ (porque em geral a gente usa x_0 pro ponto em que as contas são mais fáceis)

Seja $x_1 = x^*$

$\Delta x = x^* - S, \quad |\Delta x| < 0.1$

$\Delta x = x_1 - x_0$

Seja $f(x) = V(x)$



$$\Delta V \approx dV = V'(S)\Delta x = f'(S)\Delta x = f'(x_0)\Delta x$$

$\Delta V = V(x_1) - V(x_0)$

$\Delta V = f(x_1) - f(x_0)$

$dV = L(x_1) - L(x_0)$

$\Delta V \approx 75\pi\Delta x$

$\frac{\Delta V}{\Delta x} \approx 75\pi = V'(5) = \pi(20\cdot 5 - 5^2) = \pi(75)$

$|\Delta x| \leq 0.1$

Se $\Delta x = 0.1$ então $\Delta V = 75\pi\Delta x \approx 23.56$

$|\Delta V| \leq 23.56$

$-23.56 \leq \Delta V \leq 23.56$

$V(x_0) = V(5) = 654$

$V(x_1) \approx V(x_0)+V'(x_0)\Delta x = 654 + \pi\cdot 75\cdot\Delta x = 654 + \pi\cdot 75\cdot 0.1 = 654 + 23.56$

Segunda versão - aqui $|\Delta x| \leq 0.1$

$V(x_1) = 654 \pm 23.56$

$V(x_1) - 654 = \pm 23.56$

$V(x_1) - 654 \in [-23.56, 23.56]$

$V(x_1) \in [654-23.56, 654+23.56]$

C3 11/MAIO/2022

HOJE: CONTINUAÇÃO
DOS EXERCÍCIOS DA
AULA PASSADA, DE
TRADUZIR EXEMPLOS
DO LIVRO DO D. MIRANDA...

HOJE EU VOU ESCREVER
POUCA COISA NO QUADRO
PORQUE EU PUS TODO O
MATERIAL DA ÚLTIMA
AULA E MAIS UM MONTE
DE COISAS NO PDF
E TROUXE VÁRIAS
CÓPIAS DELE.

AH, REPARE QUE
O LIVRO FAZ AS
CONTAS NUM ESTILO
BEM DIFERENTE DO
QUE EU USEI NA
PÁGINA 8 DO MEU PDF...
O LIVRO FAZ TUDO
SUPER RÁPIDO E EU
FAÇO TUDO BEM PASSO A
PASSO E BEM DEVAGAR.

NOS EXERCÍCIOS 3 E 4
TENTE SEGUIR O MEU
ESTILO.

$\boxed{\text{C3 13/MAIO/2022}}$

HOJE: PÁGINAS 11 A 13 DO PDF SOBRE "NOTAÇÃO DE FÍSICOS"! A PAPELARIA TÁ SEM INTERNET E EU NÃO CONSEGUI IMPRIMIR ESSAS PÁGINAS!

HOJE: ... E DERIVADAS PARCIAIS!

OBS: HOJE A GENTE NÃO VAI VER NENHUMA INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA DERIVADA PARCIAL... ISSO VAI FICAR PRA AULA QUE VEM.

$$\frac{d}{dt} F(g(t), h(t)) = \frac{\partial}{\partial x} F(g(t), h(t)) g'(t) + \frac{\partial}{\partial y} F(g(t), h(t)) h'(t)$$

$$\vdots$$

$$dz = z_x x_t dt + z_y y_t dt$$

$$z_t = z_x x_t + z_y y_t$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dx}{dt}$$

$d \quad \partial$

$$x = g(t) \qquad x = x(t)$$

$$\frac{d}{dt} g(t) = g'(t) = g_t(t)$$

$$\frac{d}{dt} x(t) = x'(t) = x_t(t) = x_t$$

$$dy = \frac{dy}{dx} dx$$

$$\Delta y \approx \frac{dy}{dx} \Delta x$$

$$V = \frac{1}{2\sqrt{U'} \cdot 2x} \qquad \sqrt{U'} \qquad U = \frac{1}{\sqrt{U'} \cdot 2x}$$

$$V = \sqrt{U} = U^{1/2}$$

$$\frac{dV}{dU} = \frac{1}{2} U^{-1/2}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{g(x)^2}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{v}{w} = \frac{\frac{dv}{dx} w - v \frac{dw}{dx}}{w^2}$$

$$s)\ y = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^2}$$

$$u = x^2 - a^2 \qquad \frac{du}{dx} = 2x \qquad \frac{dw}{dx} = 2x$$

$$v = \sqrt{u} \qquad \frac{dv}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

$$w = x^2$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{d}{du} v = \frac{d}{du}\sqrt{u} = \frac{d}{du} u^{1/2} = \frac{1}{2} u^{-1/2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

$$y = \frac{v}{w} \qquad \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{u}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} y = \frac{d}{dx}\frac{v}{w} = \frac{\frac{dv}{dx} w - v \frac{dw}{dx}}{w^2} = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} \cdot x^2 - \sqrt{x^2 - a^2} \cdot 2x}{x^4} = \frac{\frac{x^3}{\sqrt{x^2-a^2}} - 2x\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}$$

C3 18/maio/2022

Hoje: algumas coisas sobre como o conceito de função mudou; dúvidas da aula passada; derivada total.

Pra muita gente gente uma função é uma fórmula, ou uma expressão, como

$$f(x) = \frac{2 + \operatorname{sen} x}{\tan \ln x} \ldots$$

A partir da próxima aula nós vamos começar a usar funções definidas por casos a desa- como

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x < 2, \\ x & \text{se } 2 < x < 4, \\ 4 & \text{se } 4 < x \end{cases}$$

Algumas pessoas no semestre passado não conseguiam ver essa f como uma função — elas tratavam essa f como três funções... e além disso elas não conseguiam dar nomes pra três "subfunções", e só chamavam elas de:

- a função,
- a função, e
- a função,

e chamavam a f(x) de "a função" também.

NÃO SEJA COMO ELAS.

Na aula passada nós ~~vimos o~~ "useful dodge" do Silvanus Thompson, em que a gente tinha que inventar nomes curtos pras variáveis independentes novas... você vai ter que fazer isso com funções também.

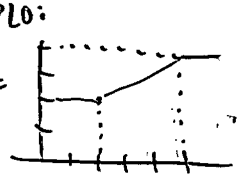
IMPORTANTE

Pra matemáticos "modernos" uma função é um conjunto de pares. $f(x) = x^2$ pra eles é este conjunto: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$, que é infinito.

Normalmente nós vamos alternar entre várias dessas noções de função, e vamos usar muitas vezes uma gambiarra típica de C2 e C3, que é não especificar o domínio de uma função e trabalhar só na parte que nos interessa...

Exemplo:

$f(x) =$



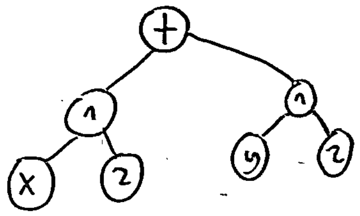
... OBS: Computadores ~~não conseguem~~ lidar com conjuntos infinitos... Programas de computação simbólica trabalham com expressões.

Exemplo:

a: x^2 + y^2 ;

1,1,8
1,8,1
1,4,8
1,2,4
1,4,2
4,1,2
2,1,4

A partir daí o valor de a passa a ser:



(b) Verify that the sum of three quantities x, y, z whose product is a constant k is maximum when these three quantities are equal.

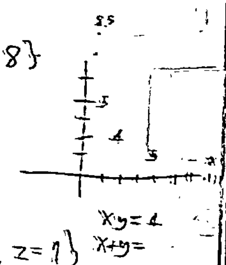
$xyz = k = 8$

$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz = 8\}$

$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1\}$

$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 2\}$

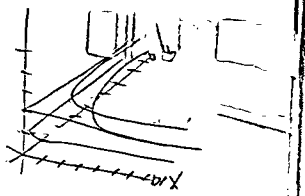
$A \cap B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R} \mid xy = 8,\ z = 1\}$



$(x,y,z) = (2,2,2)$
$x+y+z = 6$

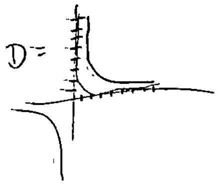
$(x,y,z) = (1,2,4)$
$x+y+z = 7$

$(x,y,z) = (1,1,8)$
$x+y+z = 10$



$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 8\}$

$D =$



CS 20/maio/2022

... o objetivo dessa aula e da próxima vai ser vocês aprenderem a olhar pra algo como isso aqui...

0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	0
0	1	2	2	2	1	0
0	1	2	3	2	1	0
0	1	2	2	2	1	0
0	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0

... e verem uma pirâmide.

Note que isso é <u>muito</u> diferente da noção de função de Cálculo 1... Não estamos dizendo o domínio da função $F(x,y)$ ... não estamos dando uma fórmula pra ela, e só estamos dando o valor dela em alguns pontos...

Exercício 0:

Sejam:

$$f(x) = \max(x,2)$$
$$g(x) = \min(x,4)$$
$$h(x) = g(f(x))$$

Represente graficamente $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ "como um computador faria"... calcule os valores dessas funções para $x=0,1,2,\ldots,6$, desenhe os pontos $(x,f(x))$ pra esses pontos...

Ex 1

Depois façam o exercício 4 do PDF sobre diagramas de numerozinhos!

Exercício 2

Faça os diagramas de numerozinhos destas superfícies no quadrado com $x_0=3$, $y_0=2$, $x\in\{x_0-1, x_0, x_0+1\}$, $y\in\{y_0-1, y_0, y_0+1\}$, e depois faça uma versão 3D de cada diagrama, como nas páginas 21 e 22 do PDF sobre diagramas de numerozinhos.

a) $z=1$

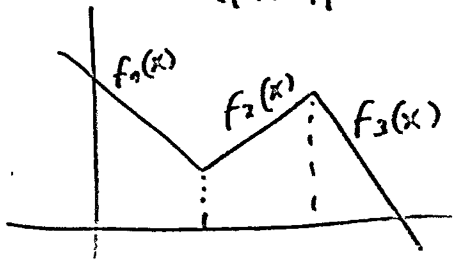
b) $z=1+\Delta x$

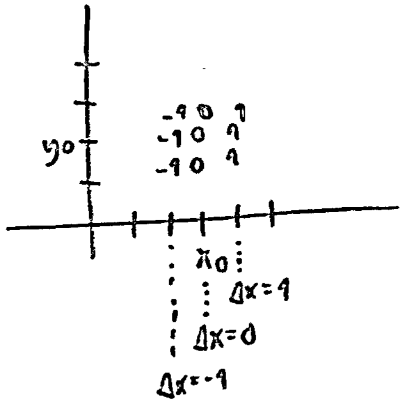
c) $z=1-\Delta x$

d) $z=1+\Delta y$

e) $z=2+\Delta x+\Delta y$.

$\max(f_1(x),f_2(x))$?
$\min(f_1(x),f_2(x))$?

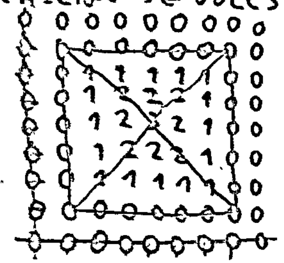




C3 25/maio/2022

Hoje: Planos!

Comecem copiando essa figura aqui no caderno de vocês:



O primeiro problema grande de hoje vai ser descobrir a equação de cada face dessa pirâmide.

Exercício 1:

Faça o diagrama de numerozinhos de cada uma das superfícies $z=F(x,y)$ abaixo. Desenhe os numerozinhos nos pontos

Com $x,y \in \{0,1,2,3,4\}$ — ou seja, 25 numerozinhos em cada item.

a) $F(x,y)=2x$

b) $F(x,y)=3y$

c) $F(x,y)=2x+3y$

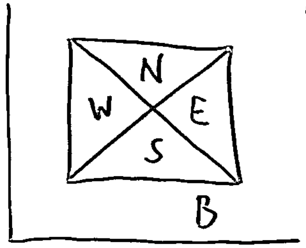
d) $F(x,y)=10+2x+3y$

Exercício 2

Podemos definir a pirâmide à esquerda com uma definição por casos... Ela é $z=F_P(x,y)$, onde

$$F_P(x,y)=\begin{cases} F_B(x,y) & \text{se } (x,y)\in B,\\ F_N(x,y) & \text{se } (x,y)\in N,\\ F_W(x,y) & \text{se } (x,y)\in W,\\ F_E(x,y) & \text{se } (x,y)\in E,\\ F_S(x,y) & \text{se } (x,y)\in S,\end{cases}$$

E as regiões B, N, W, E, S ~~são estas~~ aqui:



Alguns livros definiriam elas de forma "totalmente algébrica", como

$$W=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\le x,\ x\le y,\ x+y\le 8\},$$

mas imagino que a maioria de vocês vá preferir a definição por desenhos...

Cada uma das funções F_B, F_N, F_W, F_E, F_S pode ser escrita nesta forma aqui:

$$F(x,y)=a+bx+cy$$

Diga quais são os valores de a, b e c em

a) $F_B(x,y)$

b) $F_W(x,y)$

c) $F_S(x,y)$

d) $F_E(x,y)$

e) $F_N(x,y)$

Exercício 3

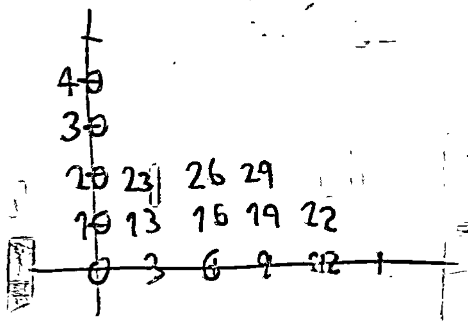
Fórmula importante: Se $z=F(x,y)$ é um plano com equação $z=F(x,y)=a+bx+cy$ então $\Delta z = b\Delta x + c\Delta y$. Mostre que pra quaisquer x_0,y_0,x_1,y_1, temos: $\boxed{\Delta z = b\Delta x + c\Delta y}$.

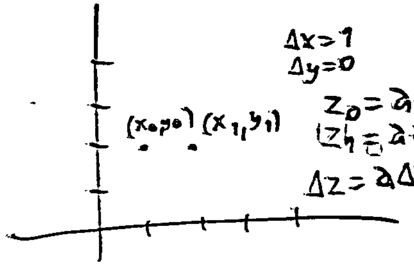
$F_B = 42+20x+50y$?

$F_B(x,y) = \overset{?}{a}+\overset{?}{b}x+\overset{?}{c}y$

$F_W(x,y) = \hat{a}+\overset{?}{\hat{b}}x+\hat{c}y$

$z=F(x,y)=3x+10y$





$\Delta x=1$

$\Delta y=0$

$z_0=a+bx_0+cy_0$

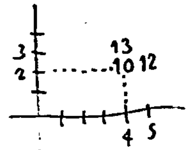
$z_1=a+bx_1+cy_1$

$\Delta z=a\Delta x+b\Delta y$

C3 27/maio/2022

Dêem uma olhada na versão atualizada do PDF sobre notação de físicos... Tudo a partir da página 22 é novo.

Eu fiquei devendo uma coisa na aula passada - o modo rápido de obter a equação de um plano. Exemplo: digamos que $F(x,y)$ "seja um plano", ou seja, $F(x,y) = a + bx + cy$, e:



Temos:

$F(4,3) = 13$

$F(4,2) = 10$ $F(5,2) = 12$

...então b, ou seja, $\frac{\partial z}{\partial x}$, é 2...

...e c, ou seja, $\frac{\partial z}{\partial y}$, é 3...

Então

$$F(x,y) = \underbrace{a}_{?} + \underbrace{b}_{2}x + \underbrace{c}_{3}y$$

Como descobrir o a?

Digamos que $(x_0, y_0) = (4,2)$.

Nesse ponto $z_0 = 10$...

$$z_1 = z_0 + z_x \Delta x + z_y \Delta y$$

Lembre que como essa superfície é um plano então z_x (ou seja, $\frac{\partial z}{\partial x}$) é constante e z_y (ou seja, $\frac{\partial z}{\partial y}$) também...

$$z_1 = z_0 + \underbrace{z_x}_{2} \Delta x + \underbrace{z_y}_{3} \Delta y$$

$$= z_0 + 2(x_1 - x_0) + 3(y_1 - y_0)$$

Digamos que $(x_0, y_0) = (4,2)$

Nesse ponto:

$z_0 = 10$

Digamos que $(x_1, y_1) = (0,0)$

$z_1 = ?$

$$\underbrace{z_1}_{-4} = \underbrace{z_0}_{10} + \underbrace{\underbrace{z_x}_{2}(\underbrace{x_1}_{0} - \underbrace{x_0}_{4})}_{-8} + \underbrace{\underbrace{z_y}_{3}(\underbrace{y_1}_{0} - \underbrace{y_0}_{2})}_{-6}$$

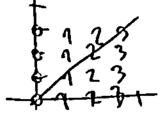
Exercício 1

Vocês receberam cópias de uma folha com várias cópias de um diagrama de numerozinhos de uma superfície que eu vou chamar de "barranco". Divida essa figura em áreas como nós fizemos com a pirâmide - em cada área essa superfície deve ser uma "face" do barranco.

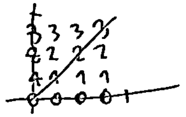
Exercício 2

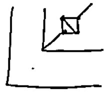
Dê um nome pra cada região do barranco e dê uma definição formal da função do barranco - como eu fiz nas páginas 22 até 24 do PDF.

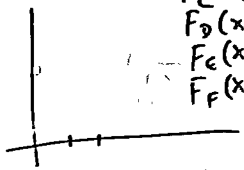
$z = x$

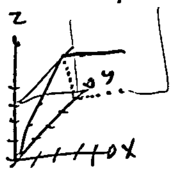


$z = y$









$F_A(x,y) =$

$F_B(x,y)$

$F_C(x,y) = 4$

$F_D(x,y) =$

$F_E(x,y) =$

$F_F(x,y) = y$

$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 4, z = y\}$

$(0,4,4)$

$(1,4,4)$

$z = 4$

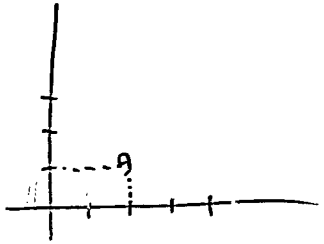
$z = y$

$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 4\}$

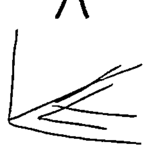
$J = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = y\}$

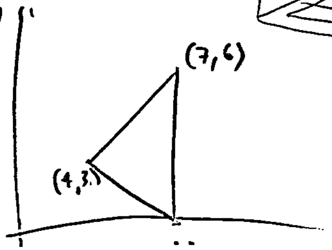
$(0,1,1) \in J$

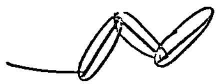
$(0,2,2) \in J$



$F(2,1) = 9$







C3 15/junho/2022

Relembrando o truque pra obter a equação de um plano...

Três pontos não-colineares em $\mathbb{R}^3$ sempre determinam um plano, e a equação do plano é

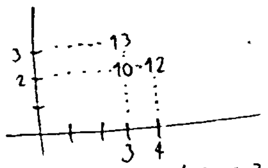
$$z = F(x,y) = a + bx + cy$$

Quando a gente sabe

$F(x_0, y_0+1)$,

$F(x_0, y_0)$, $F(x_0+1, y_0)$

é bem fácil encontrar a, b, c. Exemplo:



Temos $a+b\cdot 3+c\cdot 3=13$, $a+b\cdot 3+c\cdot 2=10$, $a+b\cdot 4+c\cdot 2=12$, $\to b=12-10=2$

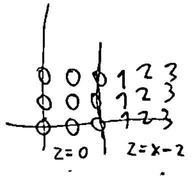
Então: $c=13-10=3$

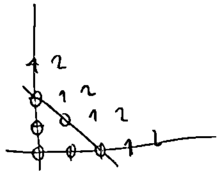
E digamos que

$x_0=3,\ y_0=2,\ z_0=10$

$x_1=0,\ y_1=0.$

Então
$$\begin{aligned} z_1 &= z_0 + z_x\Delta x + z_y\Delta y \\ &= 10 + b(x_1-x_0) + c(y_1-y_0) \\ &= 10 + 2(0-3) + 3(0-2) \\ &= 10 + (-6) + (-6) \\ &= -2 \end{aligned}$$



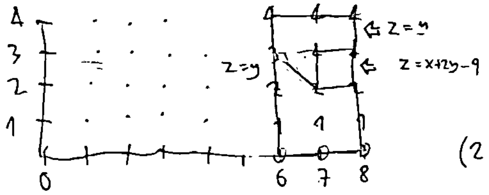


3	3	3	3
2	2	2	2
1	1	1	1

$z = a + \_x + \_y$

$z = 0 + 0x + 1y$

$(7,1,1) \in \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^2 \mid z = 0 + 0x + 1y\}$



$z = -1-5y$

$(x,y,z) = (2,5,2)$

$(2,5,2) \in \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z = -1-5y\}$

$F(x,y) = x+y-6$

$G(x,y) = 0$

$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z = F(x,y)\}$

$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z = G(x,y)\}$

$(x,y,z) \in \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z = \underbrace{F(x,y)}_{x+y-6},\ z = \underbrace{G(x,y)}_{0}\}$

$\underbrace{10 = 20+5-6}_{F}$

C3 3/JUNHO/2022

O EXERCÍCIO DO BARRANCO DA AULA PASSADA ERA UM EXERCÍCIO DE REVISÃO DE PLANOS...

EM GA A GENTE COSTUMA VER VÁRIOS MODOS DE ENCONTRAR A INTERSEÇÃO DE DOIS PLANOS — E EM GERAL AS PESSOAS SÓ LEMBRAM - E BEM VAGAMENTE - DOS MODOS MAIS DIFÍCEIS.

NOS EXERCÍCIOS DE REVISÃO DE PLANOS DE HOJE VOCÊ VAI ENCONTRAR A INTERSEÇÃO DE DOIS PLANOS π_1 E π_2 ENCONTRANDO DOIS PONTOS QUE PERTENCEM A $\pi_1 \cap \pi_2$ E FAZENDO A RETA QUE PASSA POR ESSES DOIS PONTOS.

EXERCÍCIO 1

(PRA FAZER DEPOIS QUE VOCÊS FIZEREM OS EXERCÍCIOS DAS FOLHAS 45 E 46 DO MEU MATERIAL ANTIGO DE GA)

SEJAM:

$\pi_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z=3\}$

$\pi_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z=x+y\}$

$F(x,y) = 3$

$G(x,y) = x+y$

$H(x,y) = \max(F(x,y), G(x,y))$

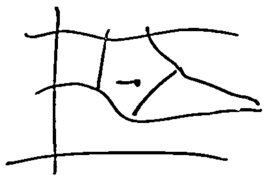
a) FAÇA OS DIAGRAMAS DE NUMEROZINHOS DE $F(x)$, $G(x)$ E $H(x)$ EM $x,y \in \{0,1,2,3,4,5\}$.

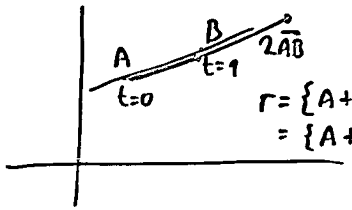
b) DÊ UMA PARAMETRIZAÇÃO PARA A RETA $r = \pi_1 \cap \pi_2$.

c) MOSTRE QUAL É O MELHOR MODO DE DIVIDIR O DIAGRAMA DE NUMEROZINHOS EM DUAS REGIÕES "PLANAS".

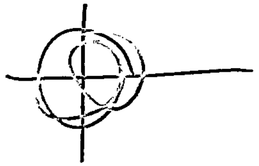
d) QUAL É A RELAÇÃO ENTRE ~~A RETA~~ QUE DIVIDE AS DUAS REGIÕES NO ITEM c E A RETA QUE VOCÊ OBTEVE NO ITEM b?

$\frac{\partial z}{\partial x}$ $\frac{\partial z}{\partial y}$

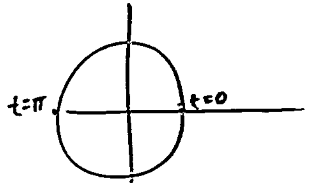


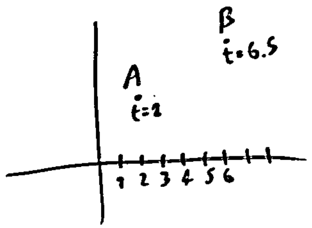


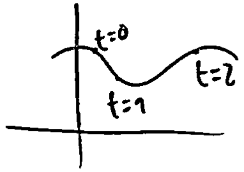
$r = \{A + t\overrightarrow{AB} \mid t \in \mathbb{R}\}$
$= \{A + t(2\overrightarrow{AB}) \mid t \in \mathbb{R}\}$



$\underbrace{(2,2,0) + \underbrace{\underbrace{t}_{3}(0,-1,0)}_{(0,-3,0)}}_{(2,-1,0)}$







$\frac{x}{2} + \frac{y}{3}$

$\underbrace{\underbrace{x}_{0}/2}_{0} + \underbrace{\underbrace{y}_{3}/3}_{1} + \underbrace{\underbrace{z}_{0}/4}_{0} = 1$

$(x,y,z) = (0,0,4)$
$(0,3,0)$

$z = x +$
$\underset{0}{z} = \underset{1}{x} - \underset{0}{y}$!!

$P = (2,3)$

$P(2,3)$

C3 15/JUNHO/2022

HOJE: APROXIMAÇÕES LINEARES NO OLHÔMETRO E DE CABEÇA;
DERIVADAS DIRECIONAIS – VAMOS TENTAR DECIFRAR A DEFINIÇÃO DO BORTOLOSSI;
INTRODUÇÃO A FUNÇÕES HOMOGÊNEAS.

LEMBREM DESSAS FÓRMULAS...

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$
$$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$
$$f(x_1) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$
$$y_1 - y_0 \approx \frac{dy}{dx}\Delta x$$
$$\Delta y \approx \frac{dy}{dx}\Delta x$$

$$F(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx F(x_0,y_0) + F_x(x_0,y_0)\Delta x + F_y(x_0,y_0)\Delta y$$
$$z_1 \approx z_0 + \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

EXERCÍCIO 1

SEJA $z = F(x,y)$ A FUNÇÃO QUE DÁ A SUPERFÍCIE DA PIRÂMIDE DA FIGURA DE CIMA DA PÁGINA 21.

CALCULE DE CABEÇA:

a) $F(1.5, 3)$
b) $F(1.1, 3)$
c) $F(5.1, 3)$
d) $F(5.1, 2)$
e) $F(5.2, 2.3)$
f) $F(5.2, 1.9)$
g) $F(3.1, 2.1)$
h) $F(2.9, 1.9)$

EXERCÍCIO 2

SEJA $z = F(x,y)$ A FUNÇÃO QUE DÁ A SUPERFÍCIE DA PIRÂMIDE COM DUAS FACES EXTRAS DA FIGURA DE BAIXO DA PÁGINA 21.

CALCULE DE CABEÇA:

a) $F(2.1, 2.1)$
b) $F(2.5, 2.5)$
c) $F(2.6, 2.6)$

DERIVADA DIRECIONAL

BORTOLOSSI, CAP. 8, P. 296:
DEFINIÇÃO 8.1 (DERIVADA DIRECIONAL): SEJAM $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ UMA FUNÇÃO DEFINIDA NUM SUBCONJUNTO $D \subset \mathbb{R}^n$, p UM PONTO INTERIOR DE D, E $\vec{v}$ UM VETOR EM $\mathbb{R}^n$. A DERIVADA DIRECIONAL DE f NO PONTO p NA ~~DIREÇÃO~~ $\vec{v}$ É DEFINIDA POR:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(p) = \lim_{t\to 0} \frac{f(p+t\vec{v}) - f(p)}{t}$$

CASO O LIMITE EXISTA.

PRA CASA:

TENTE ENTENDER A DEFINIÇÃO ACIMA!

$$f(x) = 1 + \sqrt[3]{x-2}$$

$$F(0+1.1, 0+0) = F(0,0) + F_x(0,0)\,1.1 + F_y(0,0)\,0$$

$x_1 = 1.1$
$y_1 = 3$

$-1 + 1x$

$$F(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = F(x_0,y_0) + F_x(x_0,y_0)\Delta x + F_y(x_0,y_0)\Delta y$$

SEJAM $x_0 = 0$
$y_0 = 0$
$\Delta x = 1.1$
$\Delta y = 0$
NESTE CASO A FÓRMULA ACIMA VIRA:

C3 22/JUN/2022

1º MINI-TESTE: SEXTA!

OS EXERCÍCIOS DELE VÃO SER PARECIDOS COM OS EXERCÍCIOS 16, 17 E 18 DO PDF DE NOTAÇÃO DE FÍSICOS.

$$\Big(f(\underbrace{\underbrace{p}_{(2,3)} + \underbrace{\underbrace{t}_{1}\cdot\underbrace{\vec{v}}_{(2,0)}}_{(2,0)}}_{(4,3)}) - f(\underbrace{\underbrace{p}_{(2,3)}}_{})\Big)/t$$

$x, y \in \{0,1,2,3,4\}$

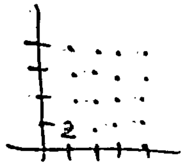
$F(x,y) = 2x$

Se $x=1$

e $y=1$

então $F(\underbrace{x}_{1},\underbrace{y}_{1}) = \underbrace{2\underbrace{x}_{1}}_{2}$

$F(1,1)=2$



$f(x)=x^2$

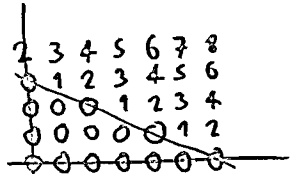
$g(x)=4$

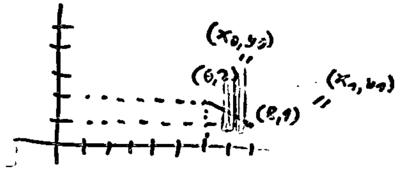
$g(10)=4$

C3 24/JUNHO/2022

HOJE:
DAS 15:15 ÀS 15:45:
MINI-TESTE 1!
ATÉ AS 15:15:
DÚVIDAS, EXERCÍCIOS,
E TALVEZ GRADIENTE!

AVISO: O MINI-TESTE
VAI TER UMA SUPERFÍCIE
COM ESSA CARA AQUI:



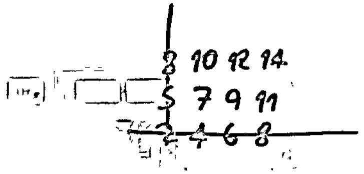


$y = a + bx$

$y = a' + \overset{-1/2}{b'}(x - x_0)$

$\overset{2}{y_0} = \overset{2}{a'} + \overset{-1/2}{b'}(\overset{6}{x_0} - \overset{6}{x_0})$

$y_1 = a' + b'(x_1 - x_0)$



$x_0 = 1$ $x_1 = 2$
$y_0 = 2$ $y_1 = 2$
$z_0 = 10$ $z_1 = 12$

$\Delta x = 1$
$\Delta y = 0$
$\Delta z = 2$

$\frac{\Delta z}{\Delta x} = 2 = z_x$

$\frac{\Delta z}{\Delta y}$

15e) $F(5.2, 2.3) = ?$

$F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = F(x_0, y_0) + F_x(x_0, y_0)\Delta x + F_y(x_0, y_0)\Delta y$

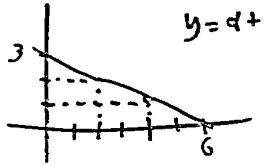
$y = a + bx$

$y = b + ax$

$(x_0, y_0) = (1, 1)$

$(x_1, y_1) = (4, 3)$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{2}{3}$



$y = \alpha + \beta x$

$\beta = \frac{1}{2}$

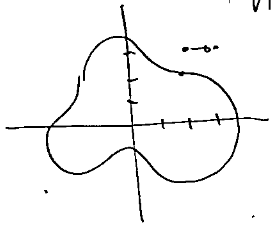
$\alpha = 3$

C3 29/JUNHO/2022

HOJE: MUDANÇA DE PLANOS! HOJE NÓS AINDA NÃO VAMOS VER TÉCNICAS PRA ESCREVER CONTAS E DEMONSTRAÇÕES... HOJE NÓS VAMOS VER COMO VISUALIZAR O CAMPO GRADIENTE, ∇F, OU $\vec{\nabla} F$, DE UMA FUNÇÃO F!

AH, E CURVAS DE NÍVEL!

$\vec{\nabla} F(2,3) = \overrightarrow{(1,0)}$



$(2,3) + \overrightarrow{(1,0)}$

ITENS NOVOS PRO EXERCÍCIO 20:

OS ITENS a E b DELE USAM A PIRÂMIDE MAIS SIMPLES, DA PÁGINA 30.

NOS ITENS ABAIXO SEJA $G(x,y)$ A FUNÇÃO DA PIRÂMIDE TORTA DO MINI-TESTE.

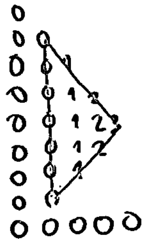
c) CALCULE: $\vec{\nabla} F(5,3)$

$\vec{\nabla} F(8,3)$

$\vec{\nabla} F(8,6)$

$\vec{\nabla} F(5,6)$

d) REPRESENTE GRAFICAMENTE $F(x,y) + \vec{\nabla} F(x,y)$ NOS 4 PONTOS ACIMA.

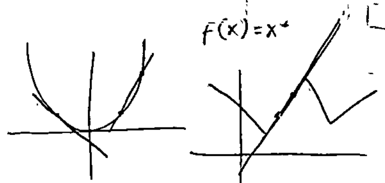


$F_w(x,y) = \underbrace{a}_{-1} + \underbrace{b}_{1}x + \underbrace{c}_{0}y$

$= -1 + x$

$F_w(2,4) = -1 + 2$

$= 1$



$\vec{\nabla} F = \overrightarrow{(F_x, F_y)}$

$F(x,y) =$	6	8	10	12	14
	3	5	7	9	11
	0	2	4	6	8

$\vec{\nabla} F(2,1) = \overrightarrow{(\underbrace{F_x(2,1)}_{\frac{\Delta z}{\Delta x}\ 2}, \underbrace{F_y(2,1)}_{3})} = \overrightarrow{(2,3)}$

C3 1º/julho/2022

1ª parte da aula:
Gradiente - dúvidas dos exercícios que vocês começaram na aula passada!

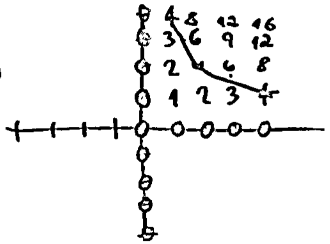
2ª parte da aula:
Como escrever demonstrações - ou: como debugar demonstrações!

2a) Justifique $\overset{(S)}{=}$.

$$[RC] = \left(\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))\,g'(x)\right)$$

$$[RC][S1] = \left(\frac{d}{dx} e^{\ln x} = e^{\ln x} \ln' x\right)$$

$F(x,y) = xy$



$[:=]$

$$[DFI] = \left(\begin{array}{l} \text{Se } f(g(x)) = x \\ \text{Então } \frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{d}{dx} x \\ \qquad = 1 \\ \frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))\,g'(x) \\ \frac{d}{dx} f(g(x)) = 1 \\ g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \end{array}\right)$$

$$[DFI^-] = \left(\begin{array}{l} \text{Se } f(g(x)) = x \\ \text{Então } g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \end{array}\right)$$

$$[S1] = \begin{bmatrix} f(x) = e^x \\ f'(x) = e^x \\ g(x) = \ln x \\ g'(x) = \ln' x \end{bmatrix}$$

$[DFI^-][S1] = \ldots$

$f(g(x))[S1] = e^{\ln x}$

$(\text{Se } f(g(x)) = x)[S1]$

$= (\text{Se } e^{\ln x} = x)$

$$[RC]\begin{bmatrix} f(x) := \operatorname{sen} x \\ f'(x) := \cos x \end{bmatrix}$$

$= \left(\frac{d}{dx} f\right.$

$$[S2] := \begin{bmatrix} f(x) := \operatorname{sen} x \\ f'(x) := \cos x \end{bmatrix}$$

$(f(42))[S2] = (\operatorname{sen}(42))$

$$(a+b)\begin{bmatrix} a := 2 \\ b := 3 \\ c := 4 \end{bmatrix} = (2+3)$$
$= 5$

$(x+2=y)[x := 10] = (12 = y)$

$(x+2=y)[x := 10] = (10+2 = y)$

$[:=] \quad = (12 = y)$

$2 \cdot 3 = 6 \qquad 2 \cdot 3$
$\qquad\qquad\; = 6 \qquad 2 = 6$

$[E][S1] = [F]$

$[E][S1]$
$= [F] \qquad [E] = [F]$

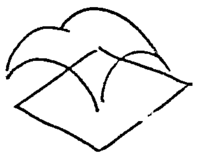
C3 5/JULHO/2022

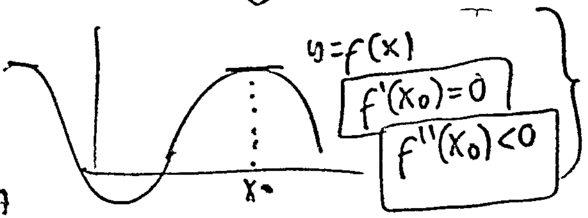
HOJE: FUNÇÕES HOMOGÊNEAS!

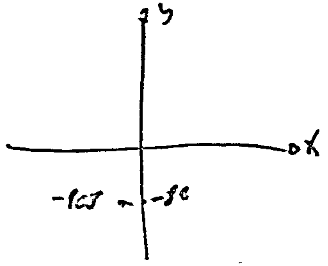
ACESSEM O PDF SOBRE ISSO NA PÁGINA DO CURSO E COMECEM A FAZER OS EXERCÍCIOS DELE... VOU POR LINKS PRA APLICAÇÕES E EXERCÍCIOS SOBRE FUNÇÕES HOMOGÊNEAS "FORA DO (0,0)" DAQUI A POUCO!

NO ITEM 2a A PERGUNTA CERTA É: QUAL É O VALOR DO $F(3,0)$?

PROVAS:
P1: 6ª 15
P2: 4ª 20
VR: 6ª 22
VS: 6ª 29







$z=F(x,y)$

SE $f(g(x)) \overset{(1)}{=} x$

ENTÃO $\frac{d}{dx} f(g(x)) \overset{(2)}{=} \frac{d}{dx} x \overset{(3)}{=} 1$

$\frac{d}{dx} f(g(x)) \overset{(4)}{=} f'(g(x))g'(x)$

$f'(g(x))g'(x) \overset{(5)}{=} 1$

1: HIPÓTESE
2: POR 1
3: SABEMOS QUE $\frac{d}{dx}x=1$
4: REGRA DA CADEIA

$f'(g(x))g'(x) \overset{(6)}{=} \frac{d}{dx} f(g(x)) \overset{(7)}{=} \frac{d}{dx} x \overset{(8)}{=} 1$

$f'(g(x))g'(x) \overset{(9)}{=} 1$

6: POR 4
7: POR 2
8: 3
9: POR 6,7,8

(EXPR1) = $(x^2=y^2)$

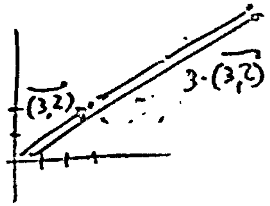
[S2] = $\begin{bmatrix} x:=4 \\ y:=5 \end{bmatrix}$

(EXPR1) [S2] = RESULTADO EXPR2

3 · 4 = 12

F(1,6)

3·(3,2)



$2 = 3 + a \cdot 4$

$(3 + a \cdot 4)$ [a:= 42] $= (3 + 42 \cdot 42)$

$\left(x+\frac{2}{x}\right)[x:=2+3] = \left((2+3)+\frac{2}{2+3}\right)$

expr1

$\boxed{\text{C3 8/JUL/2022}}$

A GENTE VAI DIZER QUE UMA FUNÇÃO $F(x,y)$ É "HOMOGÊNEA DE GRAU K EM TORNO DO PONTO (x_0,y_0)" QUANDO ELA OBEDECE ISSO AQUI:

$$F(x_0+\lambda\Delta x,\ y_0+\lambda\Delta y) = \lambda^k F(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)$$

VOU CHAMAR A FÓRMULA ACIMA DE [HP].

(1) SEJA $[HP1] = [HP]\begin{bmatrix} x_0:=3 \\ y_0:=2 \\ k:=2 \end{bmatrix}$.

$[HP1] = ?$

(2) SEJA $[HP2] = [HP1]\begin{bmatrix} \Delta x:=1 \\ \Delta y:=1 \\ \lambda:=2 \end{bmatrix}$.

$[HP2] = ?$

(3) DIGAMOS QUE $\boxed{F(3+1,2+1)}=10$ E QUE [HP2] VALE. QUAL É O VALOR DE $F(3+2,2+2)$?

SUBSTITUIÇÃO EM PORTUGUÊS.

SABEMOS QUE

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x).$$

SUBSTITUINDO $f(u)$ POR $\operatorname{sen} u$ E $g(x)$ POR $42x$ OBTEMOS:

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sen}(42x) = \cos(42x)\cdot 42$$

USANDO O [:=]:

$$[RC] = \left(\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)\right)$$

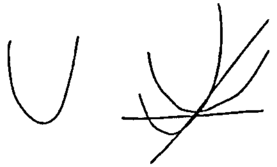
$$[RC]\begin{bmatrix} f(u) := \operatorname{sen} u \\ f'(u) := \cos u \\ g(x) := 42x \\ g'(x) := 42 \end{bmatrix} = \left(\frac{d}{dx} \operatorname{sen}(42x) = \cos(42x)\cdot 42\right)$$

(4) DIGAMOS QUE [HP1] VALE E QUE $F(3-4,2+2)=100$. DESCUBRA O VALOR DE $F(3-2,2+1)$, O DE $F(3+2,2-1)$, E O DE $F(3+4,2-2)$.

(5) FAÇA O ~~DIAG~~ DE NUMEROZINHOS DESTA FUNÇÃO AQUI PARA $\Delta x, \Delta y \in \{-2,-1,0,1,2\}$:

$$F(4+\Delta x, 2+\Delta y) = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2.$$

$$\begin{array}{ll}
[HP]: & F(x_0+\lambda\Delta x, y_0+\lambda\Delta y) = \lambda^k F(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \\
[HP1]: & F(3+\lambda\Delta x, 2+\lambda\Delta y) = \lambda^2 F(3+\Delta x, 2+\Delta y) \\
[HP2]: & F(3+2\cdot 1, 2+2\cdot 1) = 2^2 F(3+1, 2+1)
\end{array}$$



$\boxed{\text{C3 13/JULHO/2022}}$

Hoje: última aula com matéria! Vamos ver dois assuntos que vão ser parte do que vai cair na P2, daqui a 9 dias...

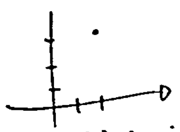
① Matriz Jacobiana - a derivada de funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$

② Taylor pra funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ (só aproximações de 1º e 2º grau).

$(\underbrace{a}_{\in\mathbb{R}}+i\underbrace{b}_{\in\mathbb{R}})$

$i^2=-1$

$2+3i$ como $(2,3)$



$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+(b+d)i$

$(a+ib)\cdot(c+id)=a(c+id)+ib(c+id)$
$=ac+adi+bci+bdi^2$
$=ac+(ad+bc)i+\underbrace{bd\underbrace{i^2}_{-1}}_{-bd}=(ac-bd)+(ad+bc)i$

Convenção: as letras z e w representam números complexos.

$z=a+bi$
$w=c+di$
$w=z^2$
$=(a+bi)^2$
$=(a^2-b^2)+(2ab)i$

$\Leftarrow z\mapsto z^2$

$w=c+di$
$w=z^2$
$=(a^2-b^2)+(2ab)i$

$c=a^2-b^2$
$d=2ab$

Exercício 0

Em cada um dos casos abaixo calcule o c e d correspondentes ao (a,b) dado.

g) $(a,b)=(0,2)$ h) $(a,b)=(1,2)$ i) $(a,b)=(2,2)$
d) $(a,b)=(0,1)$ e) $(a,b)=(1,1)$ f) $(a,b)=(2,1)$
a) $(a,b)=(0,0)$ b) $(a,b)=(1,0)$ c) $(a,b)=(2,0)$

... e represente os seus resultados no plano deste jeito. Digamos que $(2+1i)^2=(-3,-2i)$ então:

$(2+i)^2$

Exercício 2

Tente fazer algo parecido com a fórmula Ⓐ pra função G.

$G(x,y)=\_x^0y^0+\_x^1y^0+\dots$
$+\_x^0y^1+x^1y^1+\dots$
$+\dots$

Taylor ~~pra funções~~ de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$

No caso $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a gente começou com polinômios, e com tudo "centrado em 0" pras contas ficarem mais fáceis...

$f(x)=a+bx+cx^2+dx^3$

$f(x)=a+bx+cx^2+dx^3$
$f'(x)=b+2cx+3dx^2$
$f''(x)=2c+6dx$
$f'''(x)=6d$
$f''''(x)=0$

$f(0)=a$
$f'(0)=b$
$f''(0)=2c$
$f'''(0)=6d$
$f''''(0)=0$

Na introdução das funções homogêneas eu mencionei que polinômios e duas variáveis podem ser decompostos em polis homogêneos de vários graus...

$G(x,y)=ax^0y^0$ ⇐ hom. de grau 0
$+bx^1y^0+cx^0y^1$ ⇐ hom. de grau 1
$+dx^2y^0+ex^1y^1+fx^0y^2$ ⇐ hom de grau 2.

$\left(\frac{d}{dx}\right)^2f(x)=\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}f(x)=f''(x)$

☆ ⇓

$f(x)=\underbrace{a}_{f(0)}+\underbrace{b}_{f'(0)}x+\underbrace{c}_{\frac{f''(0)}{2}}x^2+\underbrace{d}_{\frac{f'''(0)}{6}}x^3$

Exercício 1

Calcule $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\beta G(x,y)$ e $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\beta G(0,0)$ -

ou seja,
$G(0,0)$, $G_x(0,0)$, $G_{xx}(0,0)$
$G_y(0,0)$, $G_{xy}(0,0)$, $G_{xxy}(0,0)$
$G_{yy}(0,0)$, $G_{xyy}(0,0)$, $G_{xxyy}(0,0)$