Capítulo 8

seção 1 e 2

Derivadas direcionais e o vetor gradiente

8.1 Derivadas direcionais

Considere a função de Cobb-Douglas $z = f(x, y) = 4 \cdot x^{3/4} \cdot y^{1/4}$ estudada no exemplo (5.1). Lembramos que este tipo de função pode ser usada, por exemplo, para modelar a produção de uma empresa em termos do capital x e do trabalho y. Neste exemplo, vimos que com capital $x^* = 10000$ e trabalho $y^* = 625$, a produção desta firma é de $z^* = f(x^*, y^*) = 20000$ unidades e que as derivadas parciais de f com relação a x e y são dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(10000, 625) = 1.5 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(10000, 625) = 8.$$

O valor $(\partial f/\partial x)(10000, 625) = 1.5$ indica que se a quantidade de trabalho y^* é mantida constante e aumentamos a quantidade de capital x^* em h unidades, então a produção sofrerá um aumento de aproximadamente $1.5 \cdot h$ unidades. Analogamente, o valor $(\partial f/\partial y)(10000, 625) = 8$ indica que se a quantidade de capital x^* é mantida constante e aumentamos a quantidade de trabalho y^* em h unidades, então a produção sofrerá um aumento de aproximadamente $8 \cdot h$ unidades. Para esta empresa, no ponto $(x^*, y^*) = (10000, 625)$, entre aumentar o capital ou aumentar o trabalho, é mais produtivo aumentar o trabalho.

Contudo, você poderia se perguntar: por que manter uma variável constante e aumentar a outra? Afinal, esta não é a única estratégia possível! Por exemplo, não seria mais produtivo aumentar as duas variáveis ao mesmo tempo em uma certa proporção? A resposta é que, de fato, existe uma estratégia mais produtiva do aquela sugerida pelas derivadas parciais no exemplo acima.

O objetivo deste capítulo é justamente tentar estabelecer um método para se encontrar esta estratégia mais produtiva. Para isto, é conveniente colocarmos uma linguagem mais geométrica para o que queremos fazer. Dada uma função $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $\mathrm{p} = (a, b)$ um ponto interior de D, vimos no capítulo 5 que as derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{p}) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{p})$$

representam, respectivamente, a taxa de variação de f quando mantemos $y = b$ constante e variamos x perto de a e a taxa de variação de f quando matemos $x = a$ constante e variamos y perto de b.

Geometricamente, para a derivada parcial $(\partial f/\partial x)(a, b)$, o que estamos fazendo é caminhar no domínio D da função f por uma reta passando pelo ponto $\mathrm{p} = (a, b)$ que é paralela ao eixo x e analisando o comportamento de f sobre esta reta. Para caminhar por esta reta, basta considerar o traço da curva parametrizada

$$\alpha_1(t) = \mathrm{p} + t \cdot \mathrm{e}_1 = (a, b) + t \cdot (1, 0) = (a + t, b)$$

que justamente descreve a reta que passa pelo $\mathrm{p} = (a, b)$ com direção dada pelo vetor $\mathrm{e}_1 = (1, 0)$ (veja a seção (2.5)) e, para analisar o comportamento de f sobre esta reta, basta estudar a função composta de uma única variável dada por

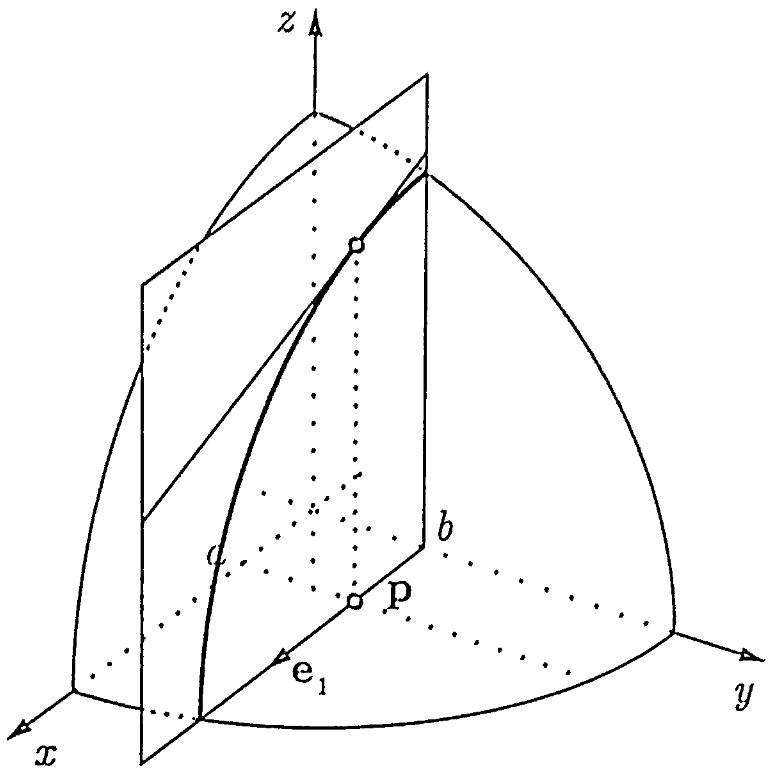
$$h(t) = (f \circ \alpha_1)(t) = f(\alpha_1(t)) = f(a + t, b).$$

Com esta terminologia,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{dh}{dt}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\alpha_1(t)) - f(\alpha_1(0))}{t} =$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\mathrm{p} + t \cdot \mathrm{e}_1) - f(\mathrm{p})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t, b) - f(a, b)}{t}.$$

Veja a figura (8.1).



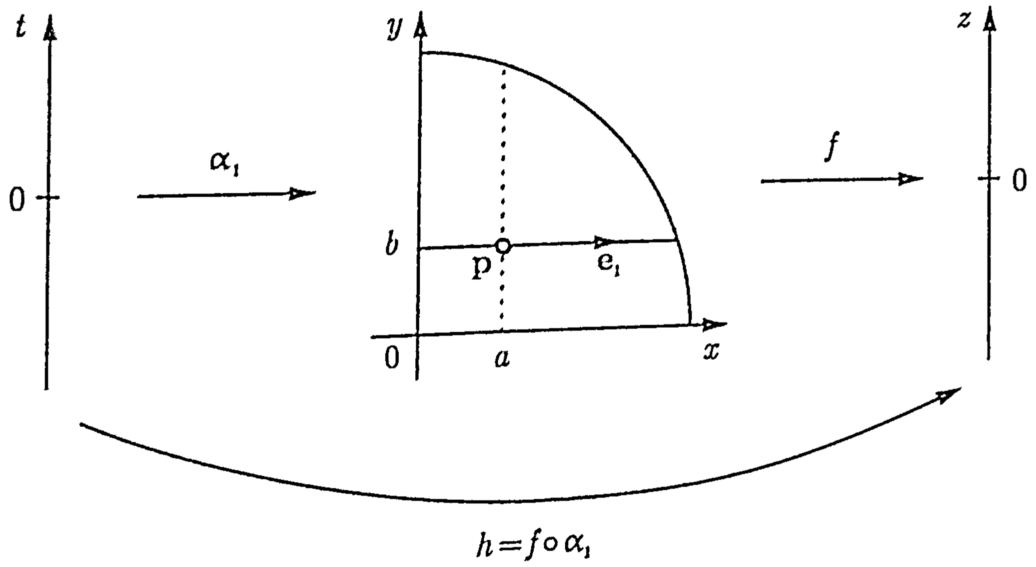


Figura 8.1: Derivada direcional de f no ponto $p = (a, b)$ na direção do vetor $e_1 = (1, 0)$.

Analogamente, para a derivada parcial $(\partial f/\partial y)(a,b)$, o que se está fazendo é caminhar no domínio D da função f por uma reta passando pelo ponto $\mathrm{p} = (a,b)$ que é paralela ao eixo y e analisando o comportamento de f sobre esta reta. Para caminhar por esta reta, basta considerar o traço da curva parametrizada

$$\alpha_2(t) = \mathrm{p} + t \cdot \mathrm{e}_2 = (a,b) + t \cdot (0,1) = (a, b+t)$$

que justamente descreve a reta que passa pelo $\mathrm{p} = (a,b)$ com direção dada pelo vetor $\mathrm{e}_2 = (0,1)$ (veja a seção (2.5)) e, para analisar o comportamento de f sobre esta reta, basta estudar a função composta de uma única variável dada por

$$h(t) = (f \circ \alpha_2)(t) = f(\alpha_2(t)) = f(a, b+t).$$

Com esta terminologia,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \frac{dh}{dt}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\alpha_2(t)) - f(\alpha_2(0))}{t} =$$

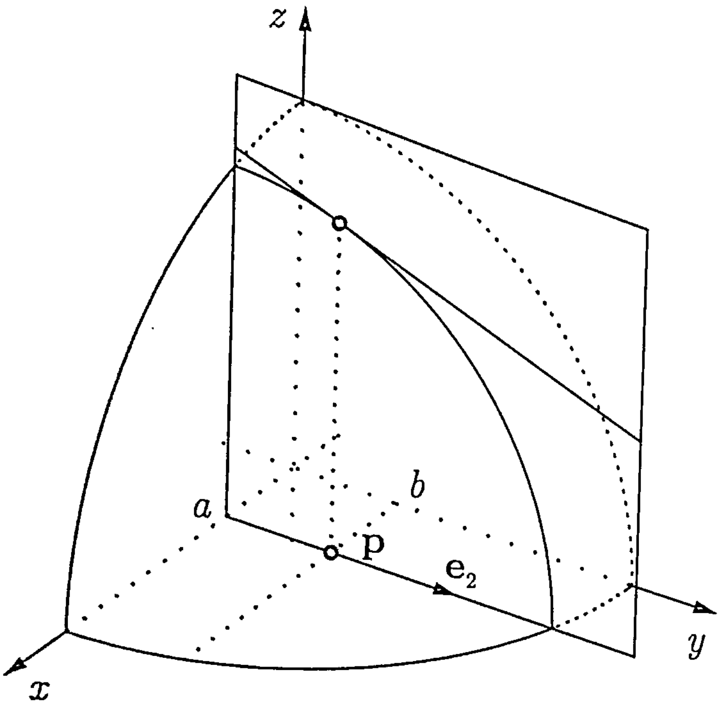
$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\mathrm{p} + t \cdot \mathrm{e}_2) - f(\mathrm{p})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a, b+t) - f(a,b)}{t}.$$

Veja a figura (8.2).

Em resumo, a estratégia de se mudar uma variável de cada vez corresponde, geometricamente, ao fato de que estamos caminhando por uma reta passando pelo ponto (a,b) e *paralela* a um dos eixos coordenados, isto é, estamos caminhando por uma reta passando pelo ponto (a,b) cujo vetor diretor é da forma $\mathrm{e}_1 = (1,0)$ ou $\mathrm{e}_2 = (0,1)$ (estes vetores são denominados *vetores da base canônica* de $\mathbb{R}^2$).

Fica claro agora como podemos obter outras estratégias: basta tomar retas passando por $\mathrm{p} = (a,b)$ mas com uma direção arbitrária. Mais especificamente, queremos caminhar no domínio D da função f por uma reta passando pelo ponto $\mathrm{p} = (a,b)$, cuja direção é dada por um vetor diretor $\mathrm{v} = (v_1, v_2)$ pré-estabelecido e analisar o comportamento de f sobre esta reta. Para caminhar por esta reta, basta considerar o traço da curva parametrizada

$$\alpha(t) = \mathrm{p} + t \cdot \mathrm{v} = (a,b) + t \cdot (v_1, v_2) = (a + t \cdot v_1, b + t \cdot v_2)$$



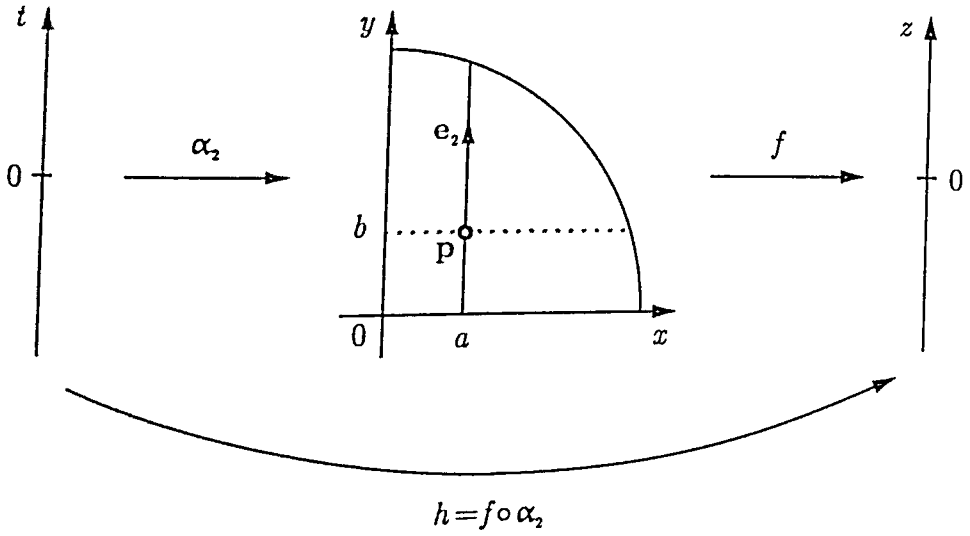


Figura 8.2: Derivada direcional de f no ponto $p = (a, b)$ na direção do vetor $e_2 = (0, 1)$.

que justamente descreve a reta que passa pelo $p = (a, b)$ com direção dada pelo vetor $v = (v_1, v_2)$ (veja a seção (2.5)) e, para analisar o comportamento de f sobre esta reta, basta estudarm a função composta de uma única variável dada por

$$h(t) = (f \circ \alpha)(t) = f(\alpha(t)) = f(a + t \cdot v_1, b + t \cdot v_2).$$

Com esta terminologia,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = \frac{dh}{dt}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\alpha(t)) - f(\alpha(0))}{t} =$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(p + t \cdot v) - f(p)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t \cdot v_1, b + t \cdot v_2) - f(a, b)}{t}.$$

O número real

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p + t \cdot v) - f(p)}{t}$$

é denominado a *derivada direcional* de f no ponto $p = (a, b)$ na direção do vetor $v = (v_1, v_2)$. Veja a figura (8.3).

Observe que, para calcular o limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(p + t \cdot v) - f(p)}{t},$$

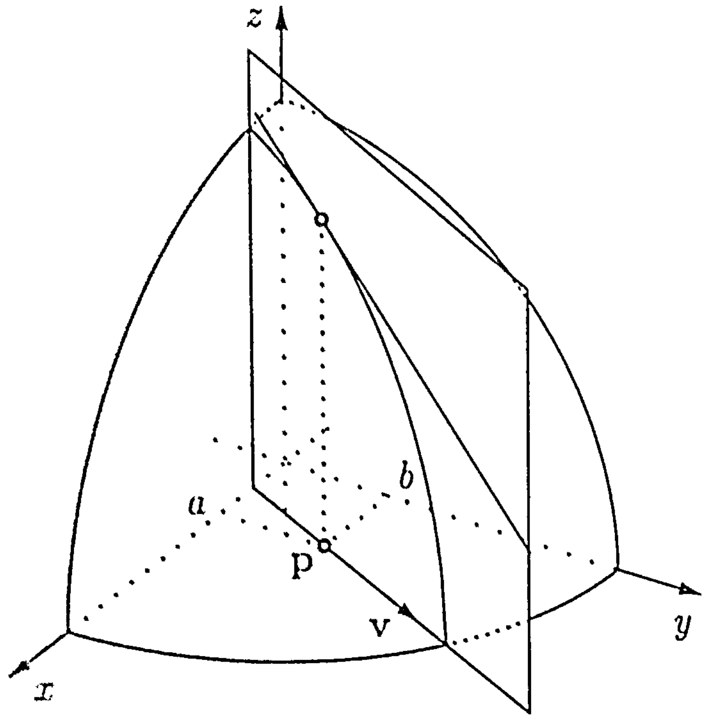
na definição de derivada direcional, é necessário que $\alpha(t) = p + t \cdot v$ esteja no domínio D de f para t próximo de zero. Para isto, é suficiente que $p = (a, b)$ seja um ponto interior de D.

Evidentemente, a definição de derivada direcional dada acima se estende para o caso de uma função escalar de n variáveis.

Definição 8.1 (Derivada direcional) Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função definida em um subconjunto D de $\mathbb{R}^n$, p um ponto interior de D e v um vetor em $\mathbb{R}^n$. A *derivada direcional de f no ponto p na direção de v* é definida por

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p + t \cdot v) - f(p)}{t}, \tag{8.1}$$

caso o limite exista.



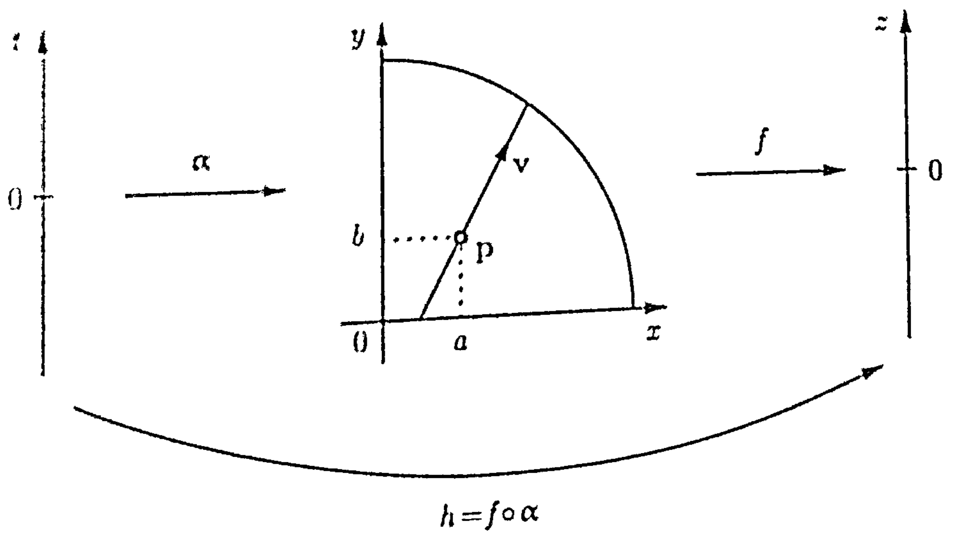


Figura 8.3: Derivada direcional de f no ponto $p = (a, b)$ na direção do vetor v.

8.2 O vetor gradiente

Se $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1, p é um ponto interior de D e v é um vetor em $\mathbb{R}^n$, então podemos calcular a derivada direcional $(\partial f/\partial \mathrm{v})(\mathrm{p})$ de uma maneira mais fácil e direta do que tentar calcular o limite em (8.1) diretamente. Para isto, vamos introduzir um objeto *importantíssimo* na teoria de otimização: o vetor gradiente.

Definição 8.2 (O VETOR GRADIENTE) Considere uma função escalar $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1 e p um ponto do domínio D de f. O *vetor gradiente* de f no ponto p é o vetor

$$\nabla f(\mathrm{p}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathrm{p}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathrm{p}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathrm{p})\right). \tag{8.2}$$

O *campo gradiente* de f é a função vetorial

$$\begin{aligned} \nabla f\colon\ D \subset \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ \mathrm{p} &\mapsto \nabla f(\mathrm{p}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathrm{p}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathrm{p}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathrm{p})\right). \end{aligned}$$

O símbolo ∇ é denominado *nabla*.

Teorema 8.1 Sejam $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 definida em um subconjunto D de $\mathbb{R}^n$, p um ponto interior de D e v um vetor em $\mathbb{R}^n$. Então

$$\frac{\partial f}{\partial \mathrm{v}}(\mathrm{p}) = \nabla f(\mathrm{p}) \cdot \mathrm{v} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathrm{p}) \cdot v_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathrm{p}) \cdot v_n, \tag{8.3}$$

isto é, a derivada direcional $(\partial f/\partial \mathrm{v})(\mathrm{p})$ de f em p na direção v é o produto interno (veja a definição (2.1)) entre o vetor gradiente $\nabla f(\mathrm{p})$ de f em p e o vetor v.

Demonstração: A demonstração é uma aplicação imediata da regra da cadeia. Se $\alpha(t) = \mathrm{p} + t \cdot \mathrm{v} = (p_1 + t \cdot v_1, \ldots, p_n + t \cdot v_n)$ e $h = f \circ \alpha$ então, por definição, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial \mathrm{v}}(\mathrm{p}) = h'(0).$$

Mas, pela regra da cadeia,

$$Dh(0) = D(f \circ \alpha)(0) = Df(\alpha(0)) \cdot D\alpha(0) = Df(\mathrm{p}) \cdot D\alpha(0),$$

isto é, em termos das entradas destas matrizes, concluímos que

$$\begin{aligned}
\left[\, h'(0) \,\right]_{1\times 1} &= \left[\, \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathrm{p}) \;\; \cdots \;\; \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathrm{p}) \,\right]_{1\times n} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}_{n\times 1} \\
&= \left[\, \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathrm{p}) \cdot v_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathrm{p}) \cdot v_n \,\right]_{1\times 1}.
\end{aligned}$$

Por comparação, segue-se que

$$\frac{\partial f}{\partial \mathrm{v}}(\mathrm{p}) = h'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathrm{p}) \cdot v_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathrm{p}) \cdot v_n = \nabla f(\mathrm{p}) \cdot \mathrm{v}.$$

□

Se estamos interessados em estudar a função f sobre a reta dada pelo traço da curva parametrizada $\alpha(t) = \mathrm{p} + t \cdot \mathrm{v}$, então somos naturalmente levados a estudar a derivada da função composta $h = f \circ \alpha$ em $t = 0$, cujo valor é justamente a derivada direcional $(\partial f/\partial \mathrm{v})(\mathrm{p})$. Mas, por outro lado, se $\mathrm{w} = 200 \cdot \mathrm{v}$, então a curva parametrizada $\beta(t) = \mathrm{p} + t \cdot \mathrm{w}$ determina a mesma trajetória (traço) da curva parametrizada α, mantendo-se o mesmo sentido mas com velocidade diferente. Se estudarmos a função composta $g = f \circ \beta$ também estaremos estudando o comportamento de f sobre a reta dada pelo traço de α (ou β) e a derivada de g em $t = 0$ também é dada por uma derivada direcional: $(\partial f/\partial \mathrm{w})(\mathrm{p})$. Qual é a relação entre estas duas derivadas direcionais? Podemos obter esta relação usando o teorema anterior:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathrm{w}}(\mathrm{p}) = \nabla f(\mathrm{p}) \cdot \mathrm{w} = \nabla f(\mathrm{p}) \cdot (200 \cdot \mathrm{v}) = 200 \cdot \nabla f(\mathrm{p}) \cdot \mathrm{v} = 200 \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathrm{v}}(\mathrm{p})$$

onde, na terceira igualdade, usamos a propriedade (c) do teorema (2.2). *Moral da história: retas passando por um mesmo ponto e com vetores diretores com mesma direção e sentido podem determinar derivadas direcionais diferentes!* Desta maneira, se estamos querendo calcular a taxa de variação de uma função sobre uma reta em seu domínio, então precisamos fixar uma escala para os vetores diretores das retas. Faremos isto estabelecendo que o vetor diretor de uma reta passando pelo ponto p deve possuir tamanho (norma) 1 quando queremos calcular a taxa de variação de uma função escalar sobre esta reta.

CUIDADO! CUIDADO! CUIDADO!

Derivadas direcionais podem ser calculadas para vetores de qualquer tamanho. Contudo, se você quiser usar derivadas direcionais para calcular taxas de variação de uma função escalar f sobre a reta, passando pelo ponto p no domínio de f na direção de um vetor v, você deve substituir v por um vetor de mesma direção e sentido mas de norma (tamanho) 1. Isto pode ser feito tomando-se

$$\mathrm{u} = \frac{\mathrm{v}}{\|\mathrm{v}\|},$$

conforme indicado na seção (2.4) do capítulo 2. Muitos autores só consideram derivadas direcionais com vetores unitários.

Exercício resolvido 8.1 Considere a função de produção Cobb-Douglas

$$z = f(x, y) = 4 \cdot x^{3/4} \cdot y^{1/4}$$

estudada no exemplo (5.1). Considere também os valores de capital $x^* = 10000$ e trabalho $y^* = 625$.

(a) Calcule a derivada direcional de f no ponto $\mathrm{p} = (x^*, y^*) = (10000, 625)$ na direção do vetor $\mathrm{v} = (1, 3)$.

(b) Calcule a taxa de variação de f no ponto $\mathrm{p} = (x^*, y^*) = (10000, 625)$ na direção do vetor $\mathrm{v} = (1, 3)$.

SOLUÇÃO:

(a) No exemplo (5.1) vimos que $(\partial f/\partial x)(\mathrm{p}) = 1.5$ e $(\partial f/\partial y)(\mathrm{p}) = 8$, logo

$$\nabla f(\mathrm{p}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{p}), \frac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{p})\right) = (1.5, 8).$$

Pelo teorema (8.1), segue-se que

$$\frac{\partial f}{\partial \mathrm{v}}(\mathrm{p}) = \nabla f(\mathrm{p}) \cdot \mathrm{v} = (1.5, 8) \cdot (1, 3) = 1.5 \cdot 1 + 8 \cdot 3 = 25.5.$$

Observe que este resultado *não* é a taxa de variação de f em p na direção v. Calculamos apenas uma derivada direcional.

(b) Como estamos querendo calcular uma taxa de variação, é preciso calcular a derivada direcional de f em p na direção de um vetor u unitário (de norma 1) com mesma direção e sentido de v. Assim,

$$\mathrm{u} = \frac{\mathrm{v}}{||\mathrm{v}||} = \frac{(1,3)}{\sqrt{(1)^2 + (3)^2}} = \frac{(1,3)}{\sqrt{10}} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \left(\frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{3\sqrt{10}}{10}\right).$$

A taxa de variação de f em p na direção v é dada por

$$\frac{\partial f}{\partial \mathrm{u}}(\mathrm{p}) = \nabla f(\mathrm{p}) \cdot \mathrm{u} = (1.5, 8) \cdot \left(\frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{3\sqrt{10}}{10}\right) =$$

$$1.5 \cdot \frac{\sqrt{10}}{10} + 8 \cdot \frac{3\sqrt{10}}{10} = \frac{51\sqrt{10}}{20} \approx 8.063\ldots.$$

Observe que o resultado acima também é a taxa de variação de f em p na direção u.

□

O item (b) do exercício resolvido acima sugere uma estratégia mais produtiva do que tentar manter o capital constante e variar o trabalho ou manter o trabalho constante e variar o capital: no ponto $\mathrm{p} = (10000, 625)$, devemos aumentar o capital e o trabalho na proporção $1/3$. Contudo, uma outra pergunta surge: como saber se não existe uma estratégia ainda mais produtiva? Como determiná-la? A resposta é dada mais uma vez pelo teorema (8.1) junto com as propriedades de produto interno. Descobrir a estratégia mais produtiva é equivalente a descobrir um vetor unitário **u** para o qual a derivada direcional no ponto p é máxima. Agora, usando o teorema (2.3), temos que

$$\frac{\partial f}{\partial \mathrm{u}}(\mathrm{p}) = \nabla f(\mathrm{p}) \cdot \mathrm{u} = ||\nabla f(\mathrm{p})|| \cdot \underbrace{||\mathrm{u}||}_{=1} \cdot \cos(\theta) = ||\nabla f(\mathrm{p})|| \cdot \cos(\theta)$$

(veja a figura (8.4)). Desta maneira, a fim de que a derivada direcional acima seja máxima, devemos ter $\theta = 0$ de modo que $\cos(\theta) = 1$. Moral da história:

o vetor que fornece a direção de maior crescimento de uma função f em um ponto p é o vetor gradiente $\nabla f(\mathrm{p})$ de f em p e a maior taxa de crescimento é dada por $||\nabla f(\mathrm{p})||$, a norma do vetor gradiente de f em p, que nada mais é do que a derivada direcional de f em p na direção do vetor gradiente $\nabla f(\mathrm{p})$. Analogamente, o vetor que fornece a direção de maior decrescimento de uma função f em um ponto p é o vetor $-\nabla f(\mathrm{p})$ e a maior taxa de decrescimento é dada por $-||\nabla f(\mathrm{p})||$, que nada mais é do que a derivada direcional de f em p na direção $-\nabla f(\mathrm{p})$. Vamos colocar estes resultados em um teorema.

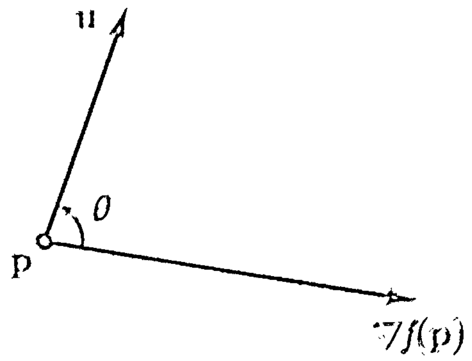


Figura 8.4: Se $||\mathrm{u}|| = 1$, então $(\partial f/\partial \mathrm{u})(\mathrm{p}) = ||\nabla f(\mathrm{p})|| \cdot \cos(\theta)$.

Teorema 8.2 Considere $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e p um ponto interior de D. Se $\nabla f(\mathrm{p}) \neq 0$, então a direção de maior crescimento de f em p é dada por $\nabla f(\mathrm{p})$ (com uma taxa de crescimento máxima igual a $||\nabla f(\mathrm{p})||$) e a direção de maior decrescimento de f em p é dada por $-\nabla f(\mathrm{p})$ (com uma taxa de decrescimento máxima igual a $-||\nabla f(\mathrm{p})||$).

Exercício resolvido 8.2 Considere a função de produção Cobb-Douglas

$$z = f(x, y) = 4 \cdot x^{3/4} \cdot y^{1/4}$$

estudada no exemplo (5.1). Considere também os valores de capital $x^* = 10000$ e trabalho $y^* = 625$. Encontre a direção de maior crescimento da produção f em $\mathrm{p} = (x^*, y^*) = (10000, 625)$. Qual é a taxa de crescimento de f em p nesta direção?

SOLUÇÃO: A direção de maior crescimento de f no ponto p é dada pelo vetor gradiente de f em p:

$$\nabla f(\mathrm{p}) = (1.5, 8)\,.$$

A taxa de crescimento de f em p nesta direção é dada por

$$||\nabla f(\mathrm{p})|| = \sqrt{(1.5)^2 + 8^2} = \frac{\sqrt{265}}{2} \approx 8.139\ldots.$$

Assim, se queremos aumentar a produção no ponto $\mathrm{p} = (10000, 625)$ o mais rapidamente possível, devemos aumentar o capital e o trabalho na proporção 1.5/8.

$\blacksquare$

Notação. Existem outras maneiras de se especificar um vetor para o cálculo de uma derivada direcional, além da notação

$$\mathrm{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

que estamos usando no texto. Por exemplo, podemos descrever v como uma combinação linear dos vetores da base canônica em $\mathbb{R}^n$:

$$\mathrm{v} = v_1 \cdot \mathrm{e}_1 + v_2 \cdot \mathrm{e}_2 + \cdots + \mathrm{e}_n,$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0, 0),\\
\mathrm{e}_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0, 0),\\
&\vdots\\
\mathrm{e}_n &= (0, 0, 0, \ldots, 0, 1).
\end{aligned}$$

Assim, o vetor $\mathrm{v} = 2\,\mathrm{e}_1 + 3\,\mathrm{e}_2$ em $\mathbb{R}^2$ nada mais é do que o vetor $\mathrm{v} = 2\,(1,0) + 3\,(0,1) = (2,3)$, enquanto que o vetor $\mathrm{v} = 2\,\mathrm{e}_1 + 3\,\mathrm{e}_2 + 4\,\mathrm{e}_3$ em $\mathbb{R}^3$ nada mais é do que o vetor $\mathrm{v} = 2\,(1,0,0) + 3\,(0,1,0) + 4\,(0,0,1) = (2,3,4)$. Muitos livros, incluindo o volume de Cálculo Integral a Várias Variáveis desta coleção, utilizam ainda uma outra notação:

$$\mathrm{v} = a\,\mathrm{i} + b\,\mathrm{j} = a\,(1,0) + b\,(0,1) = (a, b)$$

para um vetor em $\mathbb{R}^2$ e

$$\mathbf{v} = a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{k} = a\,(1,0,0) + b\,(0,1,0) + c\,(0,0,1) = (a,b,c)$$

para um vetor em $\mathbb{R}^3$. Assim, o vetor $\mathbf{v} = 2\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j}$ em $\mathbb{R}^2$ nada mais é do que o vetor $\mathbf{v} = 2\,(1,0) + 3\,(0,1) = (2,3)$, enquanto que o vetor $\mathbf{v} = 2\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} + 4\,\mathbf{k}$ em $\mathbb{R}^3$ nada mais é do que o vetor $\mathbf{v} = 2\,(1,0,0) + 3\,(0,1,0) + 4\,(0,0,1) = (2,3,4)$.

8.3 Exercícios

[01] Encontre o gradiente das funções abaixo.

(a) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

(b) $f(x,y,z) = xy + yz + xz$.

(c) $f(x,y,z) = x + y^2 + z^3$.

(d) $f(x,y,z) = xy^2 + yz^2 + zx^2$.

(e) $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$.

(f) $f(x,y) = (x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}$.

(g) $f(x,y) = x\,e^{x^2+y^2}$.

[02] Calcule a derivada direcional das funções abaixo no ponto e direção especificados, onde $\mathbf{e}_1 = (1,0)$ e $\mathbf{e}_2 = (0,1)$.

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 3\,xy^3$, $\mathbf{p} = (1,2)$ e $\mathbf{v} = (1/2, \sqrt{3}/2)$.

(b) $f(x,y) = e^x \cos y$, $\mathbf{p} = (0, \pi/4)$ e $\mathbf{v} = (\mathbf{e}_1 + 3\,\mathbf{e}_2)/\sqrt{10}$.

(c) $f(x,y) = 17\,x^y$, $\mathbf{p} = (1,1)$ e $\mathbf{v} = (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)/\sqrt{2}$.

(d) $f(x,y) = e^{x^2 \cos y}$, $\mathbf{p} = (1, \pi/2)$ e $\mathbf{v} = (3\,\mathbf{e}_1 + 4\,\mathbf{e}_2)/5$.

[03] Calcule a derivada direcional das funções abaixo no ponto e direção especificados, onde $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$ e $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$.

(a) $f(x,y,z) = x^2 - 2\,xy + 3\,z^2$, $\mathbf{p} = (1,1,2)$ e $\mathbf{v} = (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3)/\sqrt{3}$.

(b) $f(x,y,z) = e^{-(x^2+y^2+z^2)}$, $\mathbf{p} = (1,10,100)$ e $\mathbf{v} = (1,-1,-1)/\sqrt{3}$.

(c) $f(x,y,z) = \operatorname{sen}(xyz)$, $\mathbf{p} = (1,1,\pi/4)$ e $\mathbf{v} = (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$.

(d) $f(x,y,z) = 1/(x^2+y^2+z^2)$, $\mathbf{p} = (2,3,1)$ e $\mathbf{v} = (\mathbf{e}_2 - 2\,\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1)/\sqrt{6}$.

[04] Determine a direção na qual cada uma das funções abaixo cresce mais rapidamente no ponto $\mathrm{p} = (1, 1)$.

(a) $f(x, y) = x^2 + 2\,y^2$.

(b) $f(x, y) = x^2 - 2\,y^2$.

(c) $f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$.

(d) $f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y - e^{-x} \cos y$.

[05] Uma sonda espacial está nas proximidades do hemisfério mais quente do planeta Mercúrio. Um sensor verifica que a carcaça da nave está começando a derreter. Supondo que a temperatura na região é descrita pela função $T(x, y, z) = e^{-x} + e^{-2y} + e^{3z}$ e que a sonda se encontra na posição $\mathrm{p} = (1, 1, 1)$, qual deve ser a direção que a sonda deve tomar a fim de obter o maior decaimento na temperatura?

[06] A altura do vulcão havaiano Mauna Loa é (de maneira aproximada) descrita pela função

$$h(x, y) = 2.59 - 0.00024\,y^2 - 0.00065\,x^2,$$

onde h é a altura acima do nível do mar em milhas e x e y medem as distâncias leste-oeste e norte-sul em milhas com relação ao topo da montanha. No ponto $(x, y) = (-2, -4)$:

(a) O quão rapidamente cresce a altura na direção $(1, 1)$ (isto é, na direção nordeste)?

(b) Em qual direção a altura cresce mais rapidamente?

(c) Em qual direção a altura decresce mais rapidamente?

(d) Se você caminhasse na direção sul, você estaria subindo ou descendo? A que taxa?

(e) Se você caminhasse na direção noroeste, você estaria subindo ou descendo? A que taxa?

[07] Suponha que uma montanha tenha o formato de um parabolóide elíptico $z = c - a\,x^2 - b\,y^2$, onde a, b e c são constantes positivas, x e y são as coordenadas leste-oeste e norte-sul no mapa e z é a altitude acima do nível do mar (x, y e z são todas medidas em metros). No ponto $(1, 1)$ qual é a direção em que a altitude cresce mais rapidamente? Se uma pedra você largada em $(1, 1)$ em qual direção ela deveria começar a rolar?

[08] Sejam f e g funções com derivadas parciais contínuas. Justifique porque:

(a) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$.

(b) $\nabla(c \cdot f) = c \cdot \nabla f$, onde c é uma constante real.

(c) $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$.

(d) $\nabla(f/g) = (g\nabla f - f\nabla g)/g^2$ nos pontos onde $g \neq 0$.

[09] Em qual direção e sentido deveríamos nos mover a partir do ponto $(2,3)$ para aumentar o valor de $4x^2y$ o mais rapidamente possível? Expresse sua resposta como um vetor de comprimento 1.

[10] A figura (8.5) mostra uma porção de um mapa da região sul de Minas Gerais onde estão indicadas as curvas de nível da função altura h com relação ao nível do mar. Existe uma linha grossa para cada 100 m de elevação e uma linha fina em cada intervalo de 20 m. Considere os pontos A, B, C, D e E no mapa. As setas indicam o vetor gradiente de h no ponto indicado. Diga se as relações abaixo são verdadeiras ou não, marcando um "V" se a relação for verdadeira e um "F" se ela for falsa.

( ) $h(C) = h(E)$,	( ) $h(A) > h(C)$,
( ) $\dfrac{\partial h}{\partial x}(A) > 0$,	( ) $\dfrac{\partial h}{\partial y}(A) > 0$,
( ) $\dfrac{\partial h}{\partial x}(B) < 0$,	( ) $\dfrac{\partial h}{\partial y}(B) < 0$,
( ) $\dfrac{\partial h}{\partial x}(D) > 0$,	( ) $\dfrac{\partial h}{\partial y}(E) < 0$,
( ) $\dfrac{\partial h}{\partial x}(A) > \dfrac{\partial h}{\partial x}(E)$,	( ) $\dfrac{\partial h}{\partial x}(B) > \dfrac{\partial h}{\partial x}(D)$.

[11] Diga se cada uma das sentenças a seguir é verdadeira ou falsa, apresentando uma justificativa caso ela seja verdadeira ou um contra-exemplo caso ela seja falsa.

(a) Se $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 tal que $\nabla f(0,0,0) = (0,0,0)$ para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, então $f(x,y,z) = 0$ para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

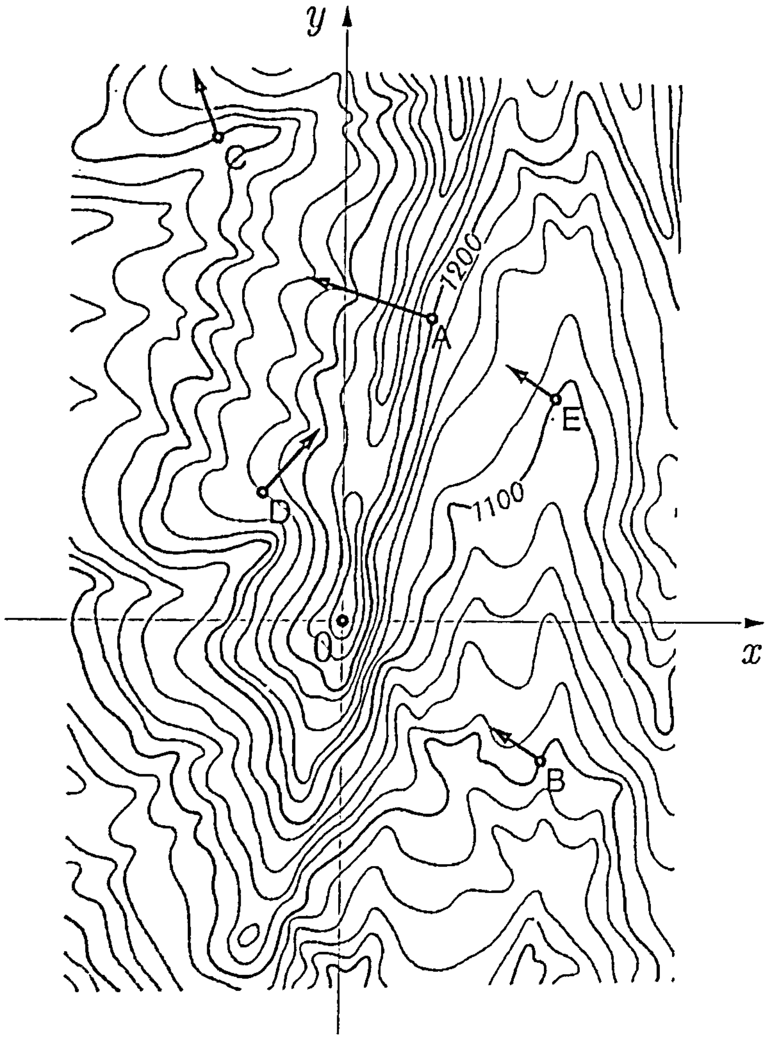


Figura 8.5: Mapa de contorno de uma região no sul de Minas Gerais.

(b) Se $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 tal que $\nabla f(x,y,z) = (0,0,0)$ para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, então $f(x,y,z) = 0$ para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

* (c) Se $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 tal que $\nabla f(x,y,z) = (0,0,0)$ para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ e $f(0,0,0) = 0$, então $f(x,y,z) = 0$ para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

[12] Diga se cada uma das sentenças a seguir é verdadeira ou falsa, apresentando uma justificativa caso ela seja verdadeira ou um contra-exemplo caso ela seja falsa.

(a) Se $f\colon D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 definida no conjunto aberto

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x < 1\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 2\}$$

tal que $\nabla f(x,y,z) = (0,0,0)$ para todo (x,y,z) em $\mathbb{R}^3$, então $f(x,y,z) = 0$ para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

(b) Se $f\colon D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 definida no conjunto aberto

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x < 1\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 2\}$$

tal que $\nabla f(x,y,z) = (0,0,0)$ para todo (x,y,z) em $\mathbb{R}^3$ e $f(0,0,0) = 0$, então $f(x,y,z) = 0$ para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

[13] Diga se cada uma das sentenças a seguir é verdadeira ou falsa, apresentando uma justificativa caso ela seja verdadeira ou um contra-exemplo caso ela seja falsa.

(a) Se $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 satisfazendo $\nabla f(0,0,0) = (2,0,0)$ então $f(x,y,z) = 2x$ para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

(b) Se $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 satisfazendo $\nabla f(x,y,z) = (2,0,0)$ para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, então $f(x,y,z) = 2x$ para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

* (c) Se $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 satisfazendo $\nabla f(x,y,z) = (2,0,0)$ para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ e $f(0,0,0) = 0$, então $f(x,y,z) = 2x$ para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

[14] Diga se cada uma das sentenças a seguir é verdadeira ou falsa, apresentando uma justificativa caso ela seja verdadeira ou um contra-exemplo caso ela seja falsa.

(a) Se $f: D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 definida no conjunto aberto

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x < 1\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 2\}$$

satisfazendo $\nabla f(x,y,z) = (2,0,0)$ para todo (x,y,z) no domínio D, então $f(x,y,z) = 2\,x$ para todo $(x,y,z) \in D$.

(b) Se $f: D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 definida no conjunto aberto

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x < 1\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 2\}$$

satisfazendo $\nabla f(x,y,z) = (2,0,0)$ para todo (x,y,z) no domínio D e $f(0,0,0) = 0$, então $f(x,y,z) = 2\,x$ para todo $(x,y,z) \in D$.

[15] Sejam u e v vetores em $\mathbb{R}^n$. Mostre que se $\mathrm{u} \cdot \mathrm{w} = \mathrm{v} \cdot \mathrm{w}$, para todo vetor w em $\mathbb{R}^n$, então $\mathrm{u} = \mathrm{v}$.

[16] Seja $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $f(\mathrm{x}) = ||\mathrm{x}||^2 = \mathrm{x}^T\mathrm{x}$. Mostre que

$$\nabla f(\mathrm{p}) = 2\,\mathrm{p}.$$

Dica: escreva explicitamente $h(t) = f(\mathrm{p} + t \cdot \mathrm{v})$ (use as propriedades de multiplicação e transposição de matrizes), calcule $h'(0) = (\partial f/\partial \mathrm{v})(\mathrm{p})$ e, em seguida, use o exercício anterior e o teorema (8.1).

*[17] Sejam A uma matriz $m \times n$, b uma matriz $m \times 1$, e x uma matriz $n \times 1$. Defina $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por

$$f(\mathrm{x}) = ||\mathrm{Ax} - \mathrm{b}||^2 = (\mathrm{Ax} - \mathrm{b})^T(\mathrm{Ax} - \mathrm{b}).$$

Mostre que

$$\nabla f(\mathrm{p}) = 2\,(\mathrm{A}^T\mathrm{Ap} - \mathrm{b}).$$

*[18] Seja $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Mostre que se $\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ é uma curva parametrizada de classe C^1, tal que $\alpha(0) = \mathrm{p}$ e $\alpha'(0) = \mathrm{v}$ e $h(t) = (f \circ \alpha)(t)$ (veja a figura (8.6)), então

$$\frac{dh}{dt}(0) = \frac{\partial f}{\partial \mathrm{v}}(\mathrm{p}).$$

Moral: na definição de derivada direcional, você pode substituir a reta $t \mapsto \mathrm{p} + t \cdot \mathrm{v}$ por qualquer curva parametrizada de classe C^1 que, no instante de tempo $t = 0$, passe por p com vetor velocidade v.

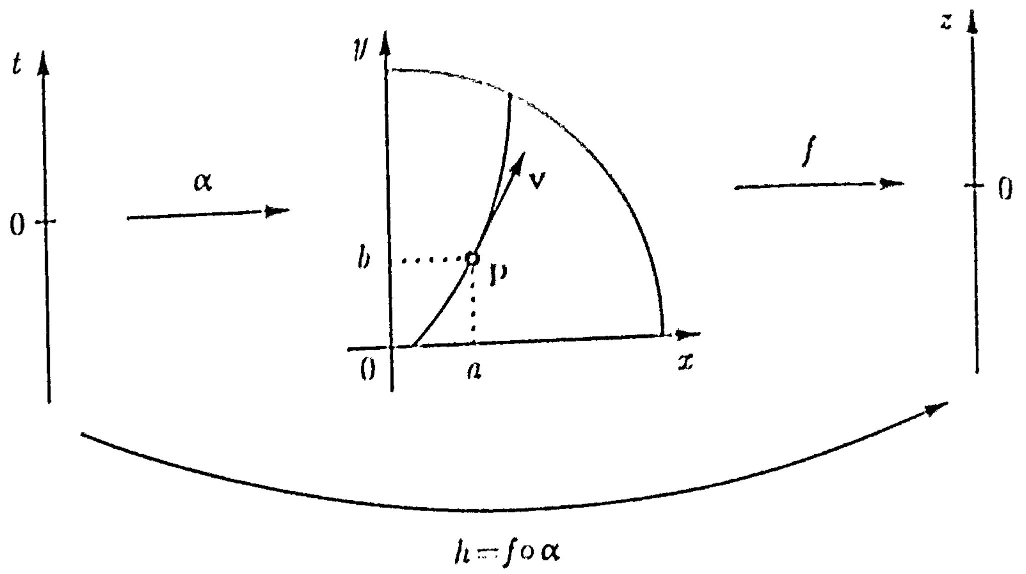


Figura 8.6: Se $\alpha(0) = \mathrm{p}$ e $\alpha'(0) = \mathrm{v}$, então $(f \circ \alpha)'(0) = (\partial f/\partial \mathrm{v})(\mathrm{p})$.

[19] (Campos conservativos) Dizemos que $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um *campo vetorial conservativo* se existe $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tal que $\nabla f(\mathrm{x}) = \mathbf{F}(\mathrm{x})$, para todo $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$.

(a) Mostre que $\mathbf{F}(x, y) = (y, x)$ é um campo vetorial conservativo.

(b) Em eletrostática, a força $\mathbf{F}$ de atração entre duas partículas de cargas opostas é dada pela *Lei de Coulomb*:

$$\mathbf{F}(\mathrm{x}) = k\,\frac{\mathrm{x}}{||\mathrm{x}||^3}.$$

Mostre que $\mathbf{F}$ é um campo vetorial conservativo.

(c) Mostre que se $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é um campo vetorial conservativo de classe C^1, então

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y),$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, onde F_1 e F_2 são as funções coordenadas de $\mathbf{F}$.

Dica: use o teorema de Young.

(d) Use o item anterior para mostrar que o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y) = (-y, +x)$ *não* é conservativo.

No curso de Cálculo Integral de Funções de Várias Variáveis, você verá que o trabalho realizado por um campo conservativo independe do caminho.

[20] Dizemos que $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função *par* se $f(\mathrm{x}) = f(-\mathrm{x})$, para todo $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$. Mostre que se $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função par de classe C^1, então

$$\nabla f(0) = 0.$$

Dica: derive os dois lados de $f(\mathrm{x}) = f(-\mathrm{x})$ usando a regra da cadeia.

8.4 Nota histórica

O símbolo nabla (∇) (também chamado de *del* ou *atled*) foi introduzido por William Rowan Hammilton em 1837, mas não com o objetivo de representar o gradiente de uma função. Na época, Hamilton usava o nabla para simbolizar uma função arbitrária. Para denotar o gradiente de uma função, Hamilton escrevia o nabla rodado de 90 graus. Alguns autores usam ainda uma outra notação para o vetor gradiente:

$$\mathrm{grad} f(\mathrm{x}).$$

Esta notação foi introduzida por Maxwell e Riemann-Weber.