

Capítulo 6

Curvas parametrizadas, transformações lineares e outras funções vetoriais

Até o presente momento, estudamos apenas funções do tipo

$$f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

que a cada ponto $\mathbf{x} \in D$ associa um *único* número real $z = f(\mathbf{x})$. Uma função cujo contradomínio é o conjunto \mathbb{R} dos números reais é denominada *função escalar* ou *campo escalar*. Vamos agora estender o nosso estudo para funções cujo o contradomínio é \mathbb{R}^m . Uma tal função é denominada *função vetorial* ou *campo vetorial*.

6.1 Curvas parametrizadas

Um primeiro exemplo muito importante de uma função vetorial é dado pela definição de *curva parametrizada*, que nada mais é do que uma função

$$\begin{aligned} \alpha: I \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ t &\mapsto \alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)), \end{aligned}$$

cujo domínio é um intervalo I da reta real e o contradomínio é \mathbb{R}^m . Curvas parametrizadas são utilizadas para se modelar m quantidades (posição de um objeto, trabalho e capital de uma empresa, etc) que variam no tempo. Assim, o intervalo I usualmente representa um intervalo de tempo e $\alpha(t)$ representa o valor das m quantidades no instante de tempo $t \in I$. Algumas vezes, a variável t é denominada de *parâmetro* da curva parametrizada α .

A representação geométrica mais importante de uma curva parametrizada é o seu *traço*.

Definição 6.1 (TRAÇO DE UMA CURVA PARAMETRIZADA) Considere $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma curva parametrizada. O *traço* de α é o conjunto

$$\{\alpha(t) \in \mathbb{R}^m \mid t \in I\}.$$

Para cada instante de tempo t , $\alpha(t)$ é um ponto em \mathbb{R}^m . O traço da curva parametrizada α nada mais é do que a união de todos estes pontos em \mathbb{R}^m .

Se, por exemplo, $\alpha(t)$ representa a posição de um objeto no instante de tempo t , o traço da curva representa, neste caso, a trajetória do objeto. Vamos ver como tudo isto funciona com um exemplo.

Exercício resolvido 6.1 Suponha que a posição de um objeto (um ponto material) movendo-se no plano \mathbb{R}^2 seja descrita pela curva parametrizada

$$\begin{aligned} \alpha: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \alpha(t) = (1+t, 3-2 \cdot t) \end{aligned}$$

(a) Qual é a posição inicial do objeto? (b) Qual é a posição do objeto no instante de tempo $t = 1$? (c) O objeto passa pela origem $(0, 0)$? (d) Faça um esboço da trajetória do objeto.

SOLUÇÃO:

(a) A posição inicial do objeto é a posição que ele ocupa no instante de tempo $t = 0$. Assim, para sabermos a posição inicial basta calcularmos

$$\alpha(0) = (1+0, 3-2 \cdot 0) = (1, 3).$$

(b) Para sabermos a posição do objeto no instante de tempo $t = 1$ basta calcularmos

$$\alpha(1) = (1+1, 3-2 \cdot 1) = (2, 1).$$

(c) Estamos querendo saber se existe um instante de tempo t tal que $\alpha(t) = (1+t, 3-2 \cdot t) = (0, 0)$. Como o sistema

$$\begin{cases} 1+t = 0, \\ 3-2 \cdot t = 0, \end{cases}$$

não pos
origem

(d) Para faz
determi
pontos

podem
valor

Assim

$y = -$

Desta
diferen
e (2)
ao ní
param

não possui solução (verifique!), segue-se que o objeto nunca passa pela origem $(0, 0)$.

- (d) Para fazer um esboço do gráfico da curva parametrizada α vamos tentar determinar uma equação nas variáveis x e y em \mathbb{R}^2 que é satisfeita pelos pontos $\alpha(t) = (1 + t, 3 - 2 \cdot t)$. Escrevendo

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 3 - 2 \cdot t, \end{cases}$$

podemos isolar t na primeira equação, $t = x - 1$, e substituir o valor de t na segunda equação:

$$y = 3 - 2 \cdot t = 3 - 2 \cdot (x - 1) = -2 \cdot x + 5.$$

Assim, o traço da curva α (e, portanto, a trajetória do objeto) é a reta $y = -2 \cdot x + 5$ no plano cartesiano \mathbb{R}^2 . Veja a figura (6.1).

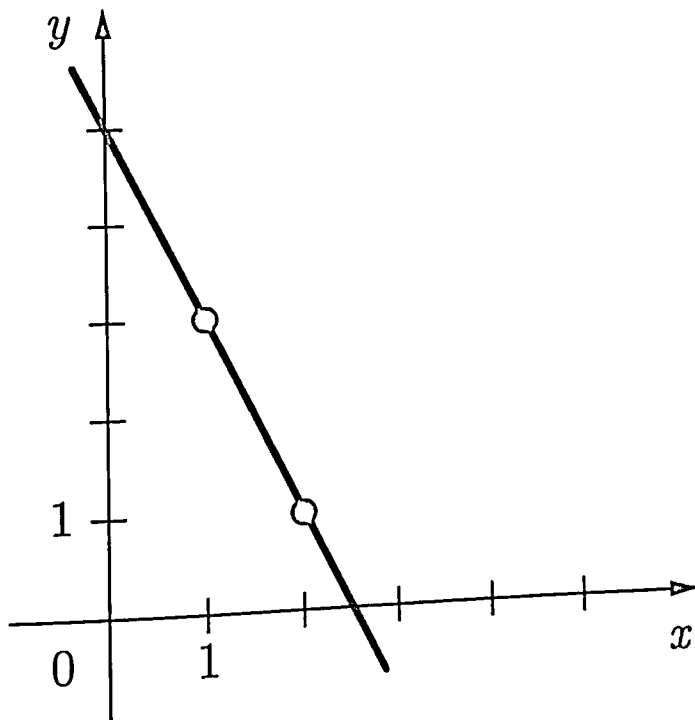


Figura 6.1: Traço da curva $\alpha(t) = (1 + t, 3 - 2 \cdot t)$.

Desta maneira, a trajetória do objeto pode ser descrita de duas maneiras diferentes: (1) como o traço da curva parametrizada $\alpha(t) = (1 + t, 3 - 2 \cdot t)$ e (2) como a curva de nível da função $f(x, y) = 2 \cdot x + y - 5$ associada ao nível 0. No primeiro caso, dizemos que estamos descrevendo a curva parametricamente e, no segundo caso, *implicitamente*. \square

Exercício resolvido 6.2 Faça um esboço do traço da curva parametrizada

$$\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto \beta(t) = (\cos(t), \text{sen}(t)) .$$

SOLUÇÃO: Observe que, por exemplo, $\beta(0) = (\cos(0), \text{sen}(0)) = (1, 0)$ [em $t = 0$ o móvel está na posição $(1, 0)$], $\beta(\pi/4) = (\cos(\pi/4), \text{sen}(\pi/4)) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ [em $t = \pi/4$ o móvel está na posição $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$] e $\beta(\pi/2) = (\cos(\pi/2), \text{sen}(\pi/2)) = (0, 1)$ [em $t = \pi/2$ o móvel está na posição $(0, 1)$]. Mas, ao invés de tentar obter um esboço do traço de β através de alguns poucos pontos, vamos utilizar a mesma técnica desenvolvida no exercício resolvido anterior, isto é, vamos tentar obter uma equação nas variáveis x e y que é satisfeita pelos pontos $\beta(t)$, com $t \in \mathbb{R}$. Escrevendo

$$\begin{cases} x = \cos(t), \\ y = \text{sen}(t), \end{cases}$$

observamos que

$$x^2 + y^2 = (\cos(t))^2 + (\text{sen}(t))^2 = 1.$$

Desta maneira, o traço da curva β é a circunferência de centro na origem $(0, 0)$ e raio 1. Veja a figura (6.2). \square

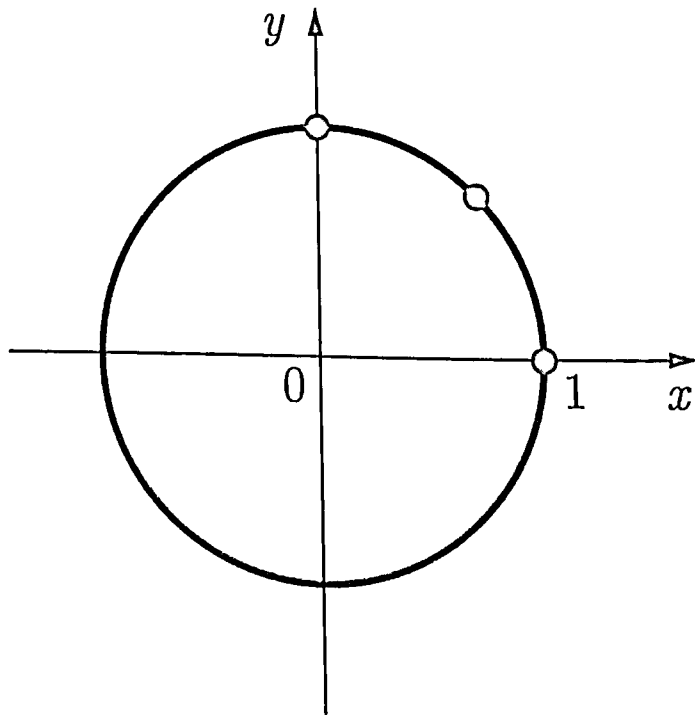


Figura 6.2: Traço da curva $\beta(t) = (\cos(t), \text{sen}(t))$.

Exercício resolvido 6.3 Faça um esboço do traço da curva parametrizada

$$\begin{aligned} \gamma: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \gamma(t) = (\cos(2 \cdot t), \operatorname{sen}(2 \cdot t)) \end{aligned}$$

SOLUÇÃO: Vamos, novamente, tentar obter uma representação implícita para os pontos $\gamma(t)$, com $t \in \mathbb{R}$. Escrevendo

$$\begin{cases} x = \cos(2 \cdot t), \\ y = \operatorname{sen}(2 \cdot t), \end{cases}$$

observamos que

$$x^2 + y^2 = (\cos(2 \cdot t))^2 + (\operatorname{sen}(2 \cdot t))^2 = 1.$$

Desta maneira, o traço da curva γ , como a curva β do exercício anterior, *também* é a circunferência de centro na origem $(0,0)$ e raio 1. Então as curvas β e γ são iguais? A resposta é *não!* No intervalo de tempo de 0 até $2 \cdot \pi$, um móvel locomovendo-se segundo a curva parametrizada β daria uma *única* volta em torno da origem, enquanto que um móvel locomovendo-se segundo a curva parametrizada γ daria *duas* voltas completas. A diferença está na *velocidade!* \square

Exercício resolvido 6.4 Faça um esboço do traço da curva parametrizada

$$\begin{aligned} \alpha: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \alpha(t) = (t^3, t^2) \end{aligned}$$

SOLUÇÃO: Nem sempre é uma tarefa fácil obter a representação implícita do traço de uma curva. Mas, felizmente, este não é o caso deste exercício.

Escrevendo

$$\begin{cases} x = t^3, \\ y = t^2, \end{cases}$$

observamos que $x^2 = (t^3)^2 = t^6 = (t^2)^3 = y^3$. Assim, o traço da curva α é o gráfico da função $y = f(x) = x^{2/3}$ de uma variável. Veja a figura (6.3). \square

Exercício resolvido 6.5 Faça um esboço do traço da curva parametrizada

$$\begin{aligned} \beta: [0, +\infty) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \beta(t) = (t \cdot \cos(t), t \cdot \operatorname{sen}(t)) \end{aligned}$$

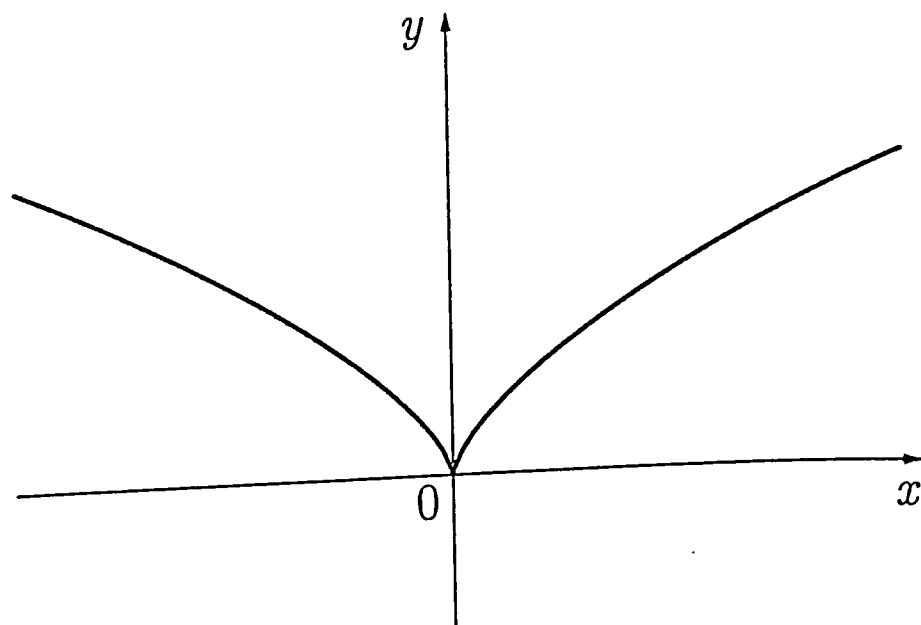


Figura 6.3: Traço da curva $\alpha(t) = (t^3, t^2)$.

SOLUÇÃO: Vamos tentar obter uma formulação implícita para o traço da curva parametrizada β :

$$\begin{cases} x = t \cdot \cos(t), \\ y = t \cdot \sin(t). \end{cases}$$

Como $x^2 + y^2 = (t \cdot \cos(t))^2 + (t \cdot \sin(t))^2 = t^2$ e $t \in [0, +\infty)$, segue-se que

$$t = \sqrt{x^2 + y^2}$$

e, portanto,

$$y = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sin\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

É muito difícil obter informações geométricas a partir desta formulação implícita. Com a experiência que ganhamos nos exercícios anteriores, vamos tentar obter um esboço do traço de β através de uma análise mais qualitativa. Observe que

$$\beta(t) = (t \cdot \cos(t), t \cdot \sin(t)) = t \cdot (\cos(t), \sin(t)).$$

Assim, para cada $t \in [0, \infty)$, a expressão $(\cos(t), \sin(t))$ representa um ponto sobre a circunferência de centro na origem e raio 1. Observe que t representa o ângulo orientado que o segmento de reta unindo a origem $(0, 0)$ e o ponto $(\cos(t), \sin(t))$ faz com o eixo x . Agora, como estamos multiplicando $(\cos(t), \sin(t))$ por t , o raio deixa de ser 1 e fica sendo t e isto para este valor de t ! À medida que variamos o ângulo t , mudamos o valor do raio para t .

Não é difícil de se convencer que, portanto, o traço da curva β tem a forma da espiral indicada na figura (6.4). \square

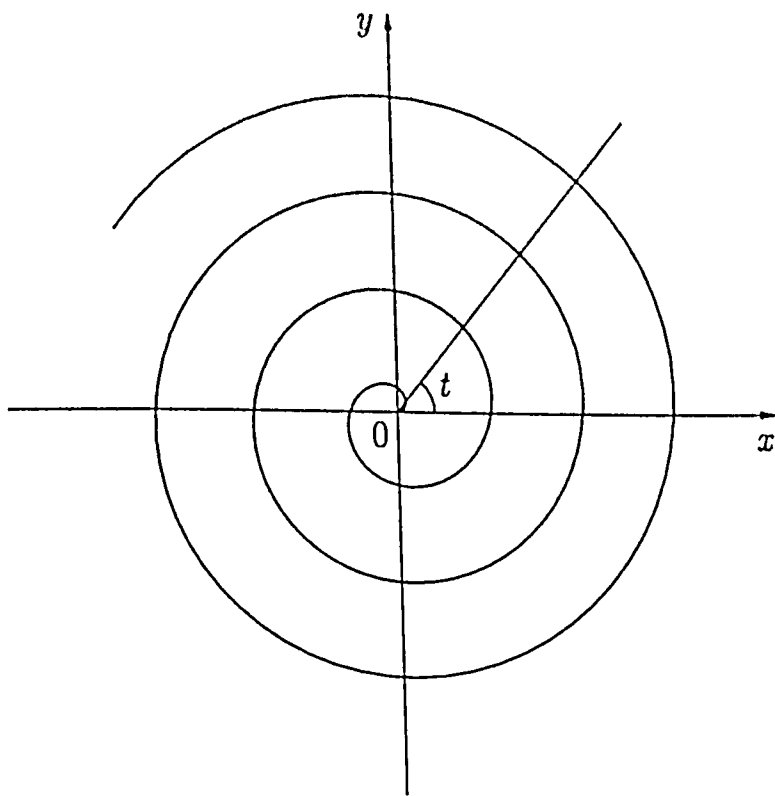


Figura 6.4: Traço da curva $\beta(t) = (t \cdot \cos(t), t \cdot \sin(t))$.

Exercício resolvido 6.6 Faça um esboço do traço da curva parametrizada

$$\begin{aligned} \gamma: [0, +\infty) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \gamma(t) = (e^{t/5} \cdot \cos(t), e^{t/5} \cdot \sin(t)) \end{aligned}$$

SOLUÇÃO: O traço de γ também é uma espiral. Contudo, para γ , o raio ($e^{t/5}$) cresce exponencialmente com o tempo t , enquanto que para β , do exercício resolvido anterior, o raio (t) cresce linearmente. Outra diferença é que em $t = 0$ temos $\gamma(0) = (1, 0)$ enquanto que $\beta(0) = (0, 0)$. Veja a figura (6.5). \square

Até agora vimos apenas exemplos de curvas parametrizadas planas, isto é, curvas cujo contradomínio é \mathbb{R}^2 . Vamos ver então um exemplo de uma curva parametrizada tridimensional.

Exemplo 6.1 (HÉLICE) A *hélice* é o traço da curva parametrizada tridimensional

$$\begin{aligned} \alpha: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), t) \end{aligned}$$

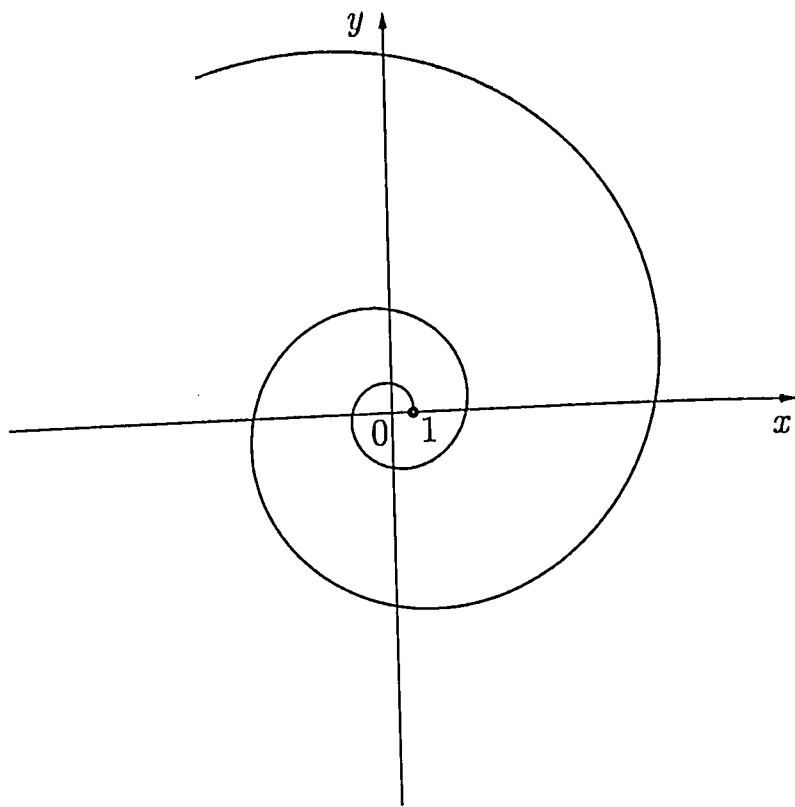


Figura 6.5: Traço da curva $\gamma(t) = (e^{t/5} \cdot \cos(t), e^{t/5} \cdot \text{sen}(t))$.

que a cada instante de tempo t associa um ponto $(\cos(t), \text{sen}(t), t)$ em \mathbb{R}^3 . Para fazer um esboço do desenho da hélice, observe que escrevendo

$$\begin{cases} x = \cos(t), \\ y = \text{sen}(t), \\ z = t, \end{cases}$$

segue-se que

$$x^2 + y^2 = (\cos(t))^2 + (\text{sen}(t))^2 = 1,$$

isto é, as duas primeiras coordenadas de $\alpha(t)$ satisfazem a equação da circunferência de centro na origem e raio 1. Concluimos então que o traço da curva α está contido no cilindro circular reto $x^2 + y^2 = 1$ em \mathbb{R}^3 e que a “altura” $z = t$ cresce com o tempo t .

Assim, não é difícil de se convencer que à medida que o tempo t varia, o ponto $\alpha(t)$ descreve uma trajetória que vai se “espiralando” por sobre o cilindro, formando o desenho de uma “mola”. \square

O traço
 $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$
Por

é a curva
é o traço

{

isto é
com
do e
par
inte
é o

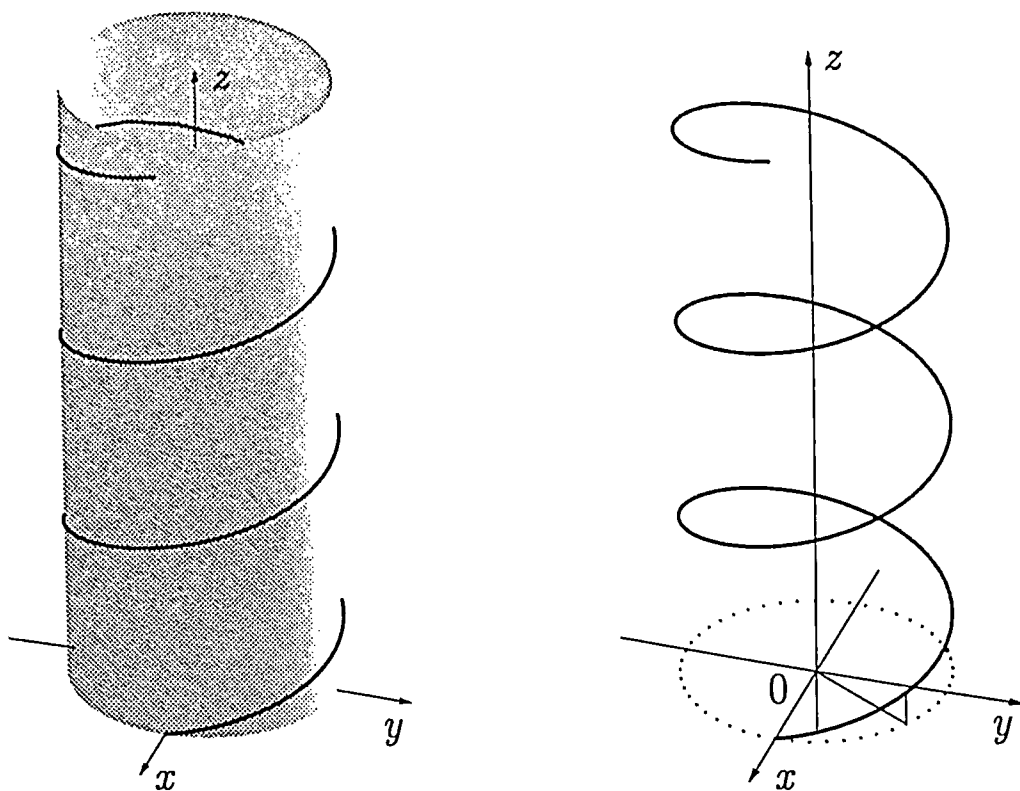


Figura 6.6: Traço da hélice $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$.

CUIDADO!

CUIDADO!

CUIDADO!

O traço de uma curva parametrizada é a *imagem* da função vetorial $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e, portanto, é um objeto bem diferente do *gráfico* de α . Por exemplo, o traço da curva parametrizada plana

$$\begin{aligned} \alpha: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \alpha(t) = (\cos(t), \sin(t)) \end{aligned}$$

é a circunferência de centro em $(0, 0)$ e raio 1 enquanto que o seu gráfico é o subconjunto de \mathbb{R}^3

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = t \text{ e } (y, z) = \alpha(t)\} = \{(t, \cos(t), \sin(t)) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\},$$

isto é, o gráfico de α é a hélice do exemplo anterior (veja a figura (6.7)), com a única diferença que o eixo de "espiralamento" é o eixo x no lugar do eixo z ! Como toda e qualquer função (escalar ou vetorial), uma curva parametrizada possui um gráfico mas ele não é o objeto geométrico mais interessante. Para uma curva parametrizada, o que realmente interessa é o seu traço.

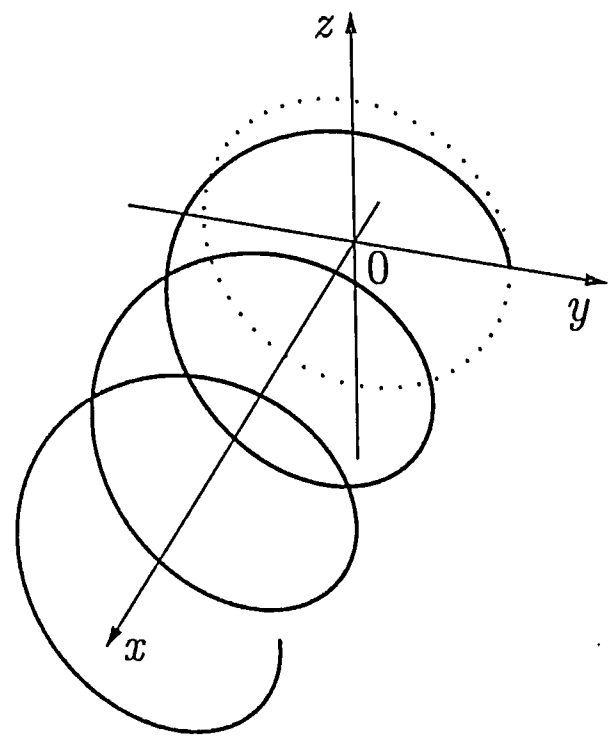
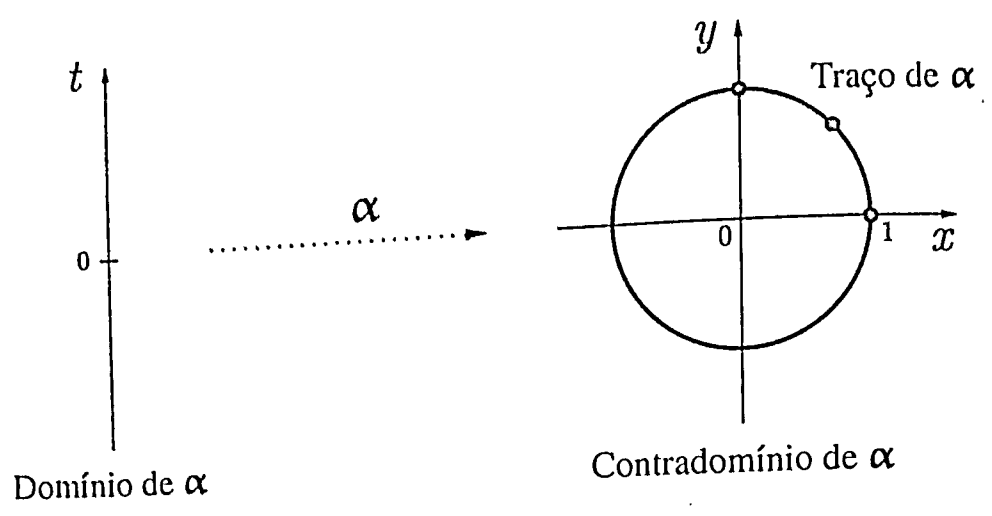


Gráfico de α

Figura 6.7: Domínio, imagem (traço) e gráfico da curva parametrizada $\alpha(t) = (\cos(t), \text{sen}(t))$.

CUIDADO!**CUIDADO!****CUIDADO!**

A partir de agora, é *muito importante* aprender a identificar quando um desenho está representando o traço de uma curva parametrizada, um conjunto de nível ou o gráfico de uma função!

Para encerrar esta seção, observe que podemos considerar uma curva parametrizada

$$\begin{aligned} \alpha: I \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ t &\mapsto \alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)), \end{aligned}$$

como um processo de se agrupar ou representar m funções de uma única variável ao mesmo tempo:

$$\begin{aligned} x_1: I \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} & x_m: I \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto x_1(t) & t &\mapsto x_m(t) \end{aligned} \quad , \quad \dots ,$$

Assim, por exemplo, a curva parametrizada $\beta(t) = (\cos(t), \sin(t))$ pode ser considerada como o agrupamento ou representação de *duas* funções reais de uma única variável:

$$\begin{aligned} x_1: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} & e & & x_2: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto x_1(t) = \cos(t) & & & t &\mapsto x_2(t) = \sin(t) \end{aligned}$$

6.2 O vetor tangente a uma curva parametrizada

Seja $\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$ uma curva parametrizada em \mathbb{R}^m . Se o parâmetro t representa o tempo, então $x'_j(t) = (dx_j/dt)(t)$ é a velocidade instantânea da j -ésima coordenada ao longo da curva no instante t . Assim, é razoável denominar o *vetor* com as velocidades instantâneas de cada componente

$$\alpha'(t) = (x'_1(t), \dots, x'_m(t))$$

de *vetor velocidade* da curva em t .

Se considerarmos $\alpha'(t_0)$ um vetor em \mathbb{R}^m com extremidade inicial em $\alpha_0 = \alpha(t_0)$, então $\alpha'(t_0)$ será tangente à curva em $\alpha(t_0)$. Para ver isto, seja h_j uma seqüência de números tendendo a 0. Então $\alpha(t_0 + h_j)$ é uma seqüência de pontos sobre a curva tendendo a $\alpha(t_0)$ na medida que h_j tende

a zero (veja figura (6.8)). O vetor deslocamento de $\alpha(t_0)$ até $\alpha(t_0 + h_j)$ em \mathbb{R}^m pode ser escrito como a diferença

$$\alpha(t_0 + h_j) - \alpha(t_0). \quad (*)$$

Por outro lado, os vetores da forma

$$\frac{\alpha(t_0 + h_j) - \alpha(t_0)}{h_j} \quad (**)$$

representam vetores de mesma direção que os vetores em (*), mas com seus tamanhos modificados pois estamos multiplicando por $1/h_j$ (veja a figura (6.8)). Quando $h_j \rightarrow 0$, o vetor limite será tangente à curva em $\alpha(t_0)$ (veja a figura (6.8)). Mas este vetor limite pode ser calculado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & \lim_{h_j \rightarrow 0} \frac{\alpha(t_0 + h_j) - \alpha(t_0)}{h_j} \\ &= \lim_{h_j \rightarrow 0} \frac{1}{h_j} \cdot \left((x_1(t_0 + h_j), \dots, x_m(t_0 + h_j)) - (x_1(t_0), \dots, x_m(t_0)) \right) \\ &= \lim_{h_j \rightarrow 0} \left(\frac{x_1(t_0 + h_j) - x_1(t_0)}{h_j}, \dots, \frac{x_m(t_0 + h_j) - x_m(t_0)}{h_j} \right) \\ &= \left(\lim_{h_j \rightarrow 0} \frac{x_1(t_0 + h_j) - x_1(t_0)}{h_j}, \dots, \lim_{h_j \rightarrow 0} \frac{x_m(t_0 + h_j) - x_m(t_0)}{h_j} \right) \\ &= (x'_1(t_0), \dots, x'_m(t_0)) = \alpha'(t_0). \end{aligned}$$

Assim, o *vetor tangente* nada mais é do que o vetor velocidade $\alpha'(t_0)$. Em outras palavras, para encontrarmos o vetor tangente a uma curva parametrizada em um ponto t_0 , basta derivarmos cada componente $x_j(t)$ de α no ponto t_0 .

Exemplo 6.2 Considere a curva

$$x(t) = \cos(t), \quad y(t) = \sin(t).$$

O traço desta, como já vimos, é a circunferência de centro na origem e raio 1. Quanto $t = 0$ estamos no ponto $(1, 0)$ e o vetor tangente neste ponto é

$$\left. \frac{d}{dt}(\cos(t), \sin(t)) \right|_{t=0} = (-\sin(t), \cos(t))|_{t=0} = (0, 1).$$

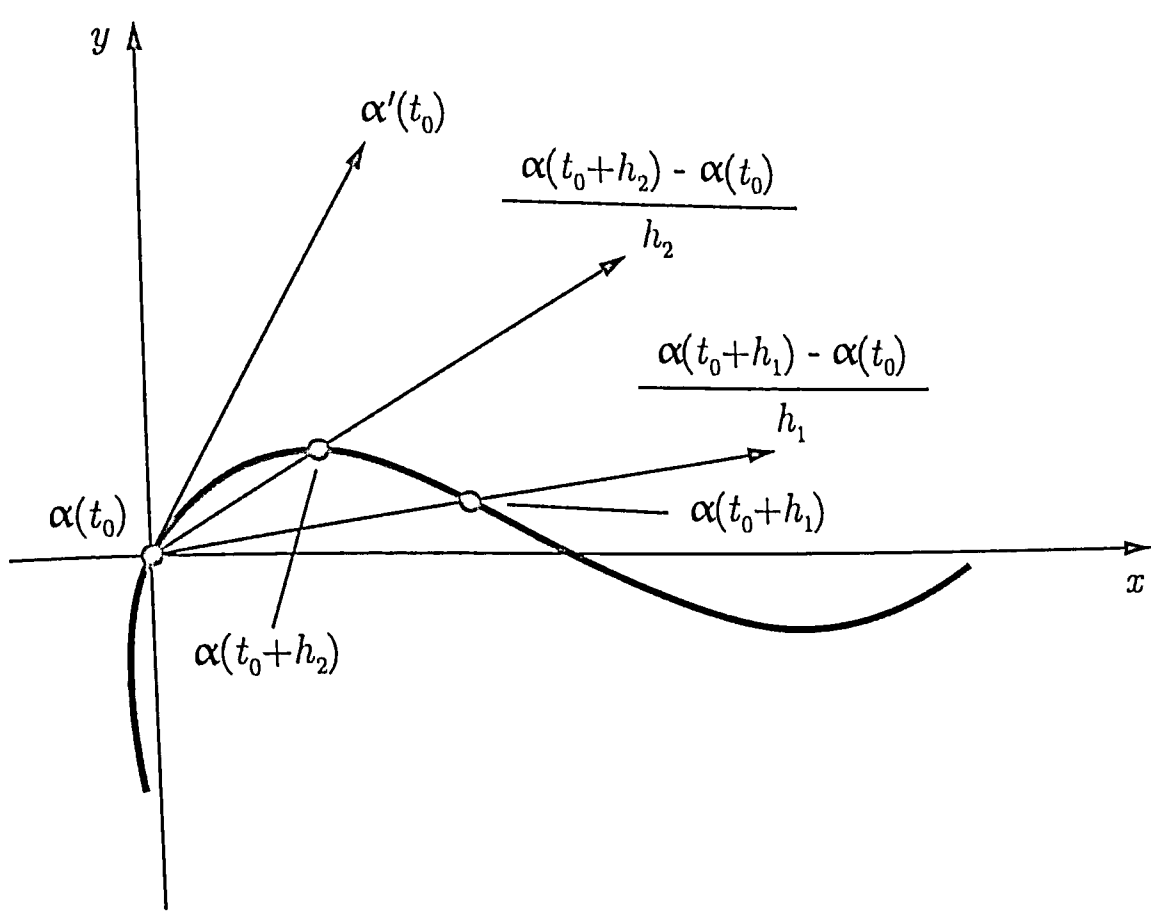
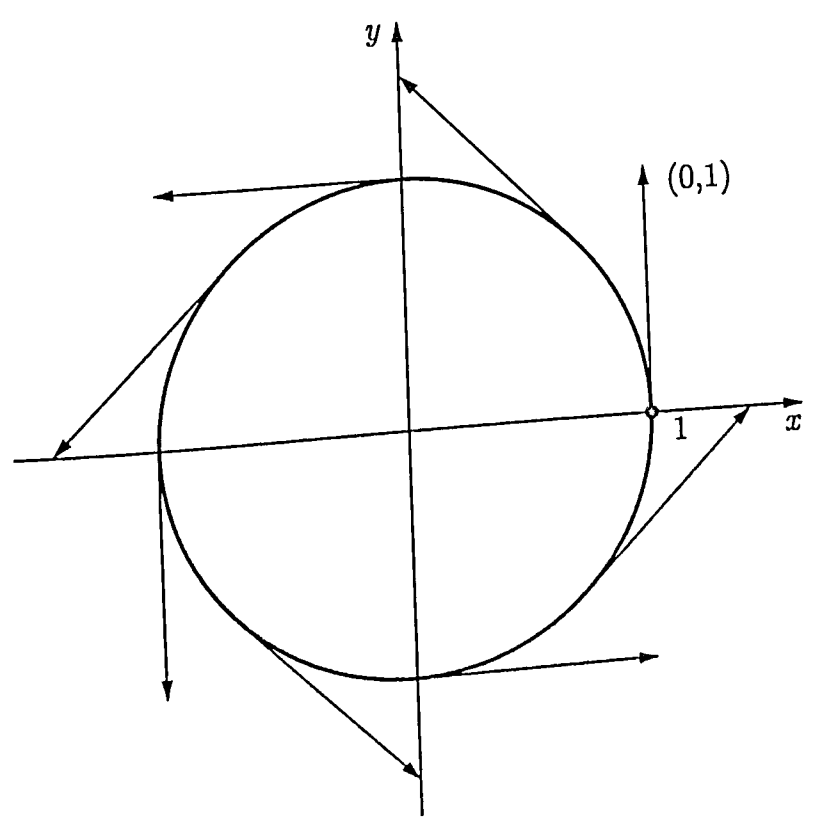


Figura 6.8: O vetor tangente de uma curva como um limite de vetores secantes.

Este vetor encontra-se representado na figura abaixo com extremidade inicial no ponto $(x(0), y(0)) = (1, 0)$. Outros vetores tangentes à circunferência também estão representados na mesma figura.



□

6.3 Funções de \mathbb{R}^n para \mathbb{R}^m

Vamos agora estudar o objeto mais genérico de nosso curso: uma função vetorial de \mathbb{R}^n para \mathbb{R}^m :

$$f: \begin{array}{l} D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \\ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m) = f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})) \end{array},$$

que a cada ponto $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ em $D \subset \mathbb{R}^n$ com n coordenadas associa o ponto $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$ em \mathbb{R}^m . Você pode pensar que uma função vetorial $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma maneira de se agrupar ou representar m funções escalares definidas em D :

$$f_1: \begin{array}{l} D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \end{array}$$

$$f_2: \begin{array}{l} D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto y_2 = f_2(x_1, \dots, x_n) \end{array}$$

⋮

$$f_m: \begin{array}{l} D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto y_m = f_m(x_1, \dots, x_n) \end{array}$$

Estas m funções escalares f_1, f_2, \dots, f_m são denominadas *funções coordenadas* da função vetorial f .

Exemplo 6.3 Considere a função vetorial

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) \mapsto (y_1, y_2) = f(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \sqrt[3]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3} \right), \end{array}$$

que a cada tripla (x_1, x_2, x_3) associa o par ordenado formado pela média aritmética e média geométrica de x_1, x_2 e x_3 . Podemos pensar f como o agrupamento ou representação de duas funções escalares de \mathbb{R}^3 para \mathbb{R} :

$$f_1: \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) \mapsto y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \end{array}$$

$$f_2: \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) \mapsto y_2 = f_2(x_1, x_2, x_3) = \sqrt[3]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3}. \end{array}$$

Observe qu
feriria que
aritmética

Como
de nível de

Defini
função
 $k =$
como

isto é
valor

Represent
gráfico e
exemplo
gráfico d
por dian
intuirmo
dimensõ

Exercíc

associac

SOLUÇÃ
 $f(x, y, z)$
sistema

A prim
equaçã

Observe que, por exemplo, $f(9, 9, 9) = (9, 9)$ e $f(9, 9, 0) = (6, 0)$. Você preferiria que a média de suas notas em Cálculo II fosse feita com a média aritmética ou a média geométrica? \square

Como no caso de funções escalares, também podemos definir conjuntos de nível de uma função vetorial:

Definição 6.2 (CONJUNTO DE NÍVEL) Seja $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função vetorial de n variáveis com domínio D . Dado um ponto (nível) $k = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{R}^m$, definimos o conjunto de nível associado a k como o conjunto

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \mid f(x_1, x_2, \dots, x_n) = k = (k_1, \dots, k_m)\},$$

isto é, o conjunto de todos os pontos do *domínio* de f para os quais o valor da função vetorial é k .

Representações geométricas de uma função — tais como conjunto de nível, gráfico e traço — só podem ser feitas para dimensões muito específicas. Por exemplo, conjuntos de nível só podem ser desenhados se $n = 2$ ou $n = 3$, o gráfico de uma função vetorial só pode ser desenhado se $n + m \leq 3$, e assim por diante. Mesmo assim, exemplos em dimensão baixa serão suficientes para intuirmos resultados que, depois, mostraremos ser verdadeiros para todas as dimensões com recursos algébricos.

Exercício resolvido 6.7 Determine o conjunto de nível da função vetorial

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = (z - 1, x^2 + y^2 - 1)$$

associado ao nível $k = (0, 0)$.

SOLUÇÃO: Queremos determinar todos os pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que $f(x, y, z) = (z - 1, x^2 + y^2 - 1) = k = (0, 0)$. Assim, devemos resolver o sistema não-linear

$$\begin{cases} z = 1, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

A primeira equação deste sistema descreve o plano $z = 1$ em \mathbb{R}^3 e a segunda equação descreve um cilindro circular reto e o conjunto de nível de f é a

interseção destas duas superfícies sendo, portanto, a circunferência $x^2 + y^2 = 1$ no plano $z = 1$ (veja a figura (6.9)). \square

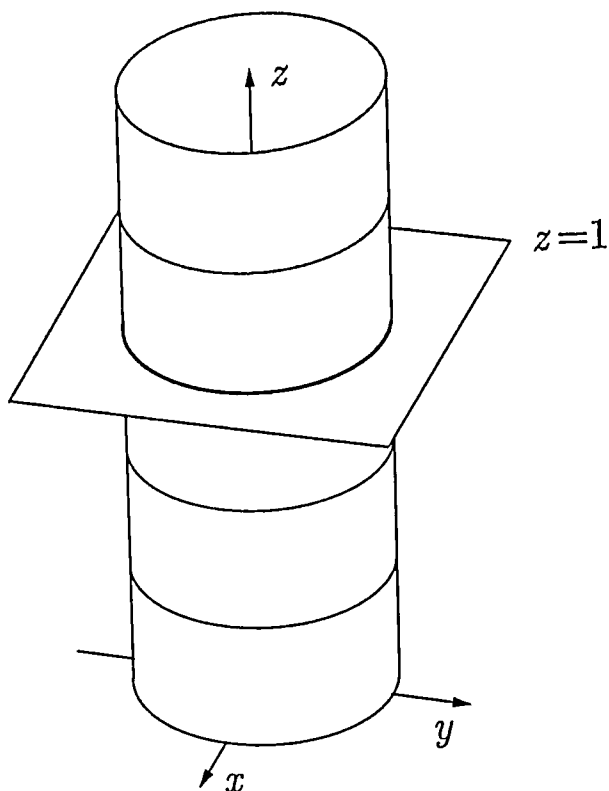


Figura 6.9: Interseção do plano $z = 1$ com o cilindro circular reto $x^2 + y^2 = 1$.

Definição 6.3 (FUNÇÃO DE CLASSE C^k) Dizemos que uma função vetorial

$$f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$$

é de classe C^k se cada função coordenada f_i é de classe C^k , conforme a definição (5.2). Se cada f_i é classe C^0 (isto é, se cada f_i é contínua), então dizemos que f é de classe C^0 (isto é, f é uma função contínua). Se cada f_i é de classe C^∞ , então dizemos que f é de classe C^∞ .

6.4 Transformações lineares

Vamos estudar agora uma classe de função vetorial muito importante: a classe das *transformações lineares*. Em um certo sentido, elas são as funções vetoriais mais simples que podemos imaginar.

Como ve
aproxima u
a composiçã
formação a
vizinhança

Definiç
near T
 $A_{m \times n}$:

isto é,

Podem

Exemp

isto é,

Observ
mais co
funções

Como veremos mais adiante, da mesma maneira que a reta tangente aproxima uma função de uma única variável na vizinhança de um ponto, a composição de uma transformação linear com uma translação (uma transformação afim) irá aproximar uma função vetorial de várias variáveis na vizinhança de um ponto em \mathbb{R}^n .

Definição 6.4 (TRANSFORMAÇÃO LINEAR) Uma *transformação linear* $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função vetorial definida por uma matriz $A_{m \times n}$:

$$T(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x},$$

isto é,

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

Podemos ainda escrever

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^n a_{1i} \cdot x_i, \sum_{i=1}^n a_{2i} \cdot x_i, \dots, \sum_{i=1}^n a_{mi} \cdot x_i \right).$$

Exemplo 6.4 Considere a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} 1 \cdot x + 2 \cdot y \\ 3 \cdot x + 4 \cdot y \\ 5 \cdot x + 6 \cdot y \end{bmatrix}_{3 \times 1},$$

isto é,

$$T(x, y) = (1 \cdot x + 2 \cdot y, 3 \cdot x + 4 \cdot y, 5 \cdot x + 6 \cdot y).$$

Observe que as funções coordenadas de T são do tipo constante vezes variável mais constante vezes variável. Neste sentido, transformações lineares são funções realmente muito simples! \square

Exemplo 6.5 Considere a transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$T(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{1 \times 3} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{3 \times 1}. \quad (6.1)$$

Observe que

$$T(x, y, z) = [1 \cdot x + 2 \cdot y + 3 \cdot z]_{1 \times 1} = 1 \cdot x + 2 \cdot y + 3 \cdot z,$$

onde, na última igualdade, estamos identificando as matrizes 1×1 com o conjunto dos números reais. Note também que a expressão (6.1) está codificando matricialmente o produto interno dos vetores $(1, 2, 3)$ e (x, y, z) em \mathbb{R}^3 :

$$T(x, y, z) = (1, 2, 3) \cdot (x, y, z) = 1 \cdot x + 2 \cdot y + 3 \cdot z. \quad \square$$

Devido à sua forma simples, uma transformação linear possui muitas propriedades interessantes que as demais funções vetoriais não compartilham. Por falta de tempo, não vamos nos deter muito no estudo destas propriedades. Se você quer se aprofundar no assunto, existe uma disciplina totalmente dedicada às transformações lineares e suas propriedades: *Álgebra Linear*. Contudo, vamos destacar três propriedades interessantes:

Teorema 6.1 (PROPRIEDADES DE UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR)

Considere uma transformação linear $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida por

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Se x e y são vetores em \mathbb{R}^n e c é um número real, então valem as seguintes propriedades:

(a) $T(0) = 0$, isto é,

$$T(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n \text{ zeros}}) = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{m \text{ zeros}}).$$

Em outras palavras, toda transformação linear leva a origem de um espaço na origem do outro.

(b) $T(x +$

Em o
de do
parad

(c) $T(c \cdot$

Em o
plica
no v
cala

Demonstra
ficam como

de modo q

$T(x + y)$

Como a m

$T(x$

isto é, $T($

Existe un
ares poss

(b) $T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y})$, isto é,

$$T(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) = T(x_1, \dots, x_n) + T(y_1, \dots, y_n).$$

Em outras palavras, calcular uma transformação linear na soma de dois vetores é a mesma coisa que calculá-la em cada vetor separadamente e, depois, somar os resultados.

(c) $T(c \cdot \mathbf{x}) = c \cdot T(\mathbf{x})$, isto é,

$$T(c \cdot x_1, \dots, c \cdot x_n) = c \cdot T(x_1, \dots, x_n).$$

Em outras palavras, calcular uma transformação linear na multiplicação de um vetor por um escalar é a mesma coisa que calculá-la no vetor separadamente e, depois, multiplicar o resultado pelo escalar.

Demonstração: Vamos provar apenas a propriedade (b). As outras duas ficam como exercício. Se

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \quad \text{e} \quad \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n),$$

de modo que $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$, então

$$T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) = A \cdot \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix} = A \cdot \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right).$$

Como a multiplicação de matrizes é distributiva, segue-se que

$$T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A \cdot \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right) = A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + A \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

isto é, $T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T(x_1, x_2, \dots, x_n) + T(y_1, y_2, \dots, y_n) = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y})$. \square

Existe uma outra propriedade muito interessante que transformações lineares possuem e as demais funções não possuem. Se $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma

transformação linear e você conhece o valor de T em apenas n vetores (escolhidos de uma maneira especial) então você conhece o valor de T em todos os vetores de \mathbb{R}^n ! Para ser mais preciso, considere os vetores "especiais"

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0), \\ \mathbf{e}_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0), \\ &\vdots \\ \mathbf{e}_n &= (0, 0, 0, \dots, 1), \end{aligned}$$

os assim denominados *vetores da base canônica* de \mathbb{R}^n . Suponha que saibamos o valor de T em cada um destes vetores: $T(\mathbf{e}_1), T(\mathbf{e}_2), \dots, T(\mathbf{e}_n)$. Se $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ é um vetor qualquer de \mathbb{R}^n então

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= x_1 \cdot (1, 0, 0, \dots, 0) + x_2 \cdot (0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + x_n \cdot (0, 0, 0, \dots, 1) \\ &= x_1 \cdot \mathbf{e}_1 + x_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \cdot \mathbf{e}_n, \end{aligned}$$

isto é, \mathbf{x} pode ser escrito como uma *combinação linear* dos vetores da base canônica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$.

Utilizando as propriedades do teorema (6.1) podemos facilmente calcular o valor de $T(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}) &= T(x_1 \cdot \mathbf{e}_1 + x_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \cdot \mathbf{e}_n) = \\ &= x_1 \cdot T(\mathbf{e}_1) + x_2 \cdot T(\mathbf{e}_2) + \dots + x_n \cdot T(\mathbf{e}_n). \end{aligned}$$

Observe que $T(\mathbf{x})$ é uma combinação linear dos vetores $T(\mathbf{e}_1), \dots, T(\mathbf{e}_n)$, sendo que os coeficientes da combinação linear são justamente as coordenadas x_1, \dots, x_n de \mathbf{x} . Assim, se T é uma transformação linear, para saber o que acontece com a aplicação em um vetor \mathbf{x} qualquer basta saber o que acontece com a aplicação nos vetores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$. Conhecer o comportamento da aplicação T em apenas n vetores (escolhidos de maneira especial) é informação suficiente para calcular a transformação linear nos infinitos vetores de \mathbb{R}^n !

Exemplo 6.6 Considere a transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(\mathbf{e}_1) = (1, 2, 1), \quad T(\mathbf{e}_2) = (-1, 3, 9) \quad \text{e} \quad T(\mathbf{e}_3) = (2, 3, 7).$$

Para calcular $T(1, 2, 3)$, observe que

$$(1, 2, 3) = 1 \cdot (1, 0, 0) + 2 \cdot (0, 1, 0) + 3 \cdot (0, 0, 1) = 1 \cdot \mathbf{e}_1 + 2 \cdot \mathbf{e}_2 + 3 \cdot \mathbf{e}_3,$$

portanto,

Isto funciona a técnica acima em \mathbb{R}^n , para ser linear dos d ser linearmente simplificado nos aprofund Álgebra Lin

Para enc uma transfo

Teorema

tal que

(1) $T(\mathbf{x})$ (2) $T(\mathbf{c})$ Então T tal que

Demonstra dere os val

Por outro que

 $T(\mathbf{x}) =$

portanto,

$$\begin{aligned} T(1, 2, 3) &= 1 \cdot T(e_1) + 2 \cdot T(e_2) + 3 \cdot T(e_3) \\ &= 1 \cdot (1, 2, 1) + 2 \cdot (-1, 3, 9) + 3 \cdot (2, 3, 7) \\ &= (5, 17, 40). \end{aligned}$$

□

Isto funciona apenas para os vetores e_1, \dots, e_n da base canônica? Não, a técnica acima funciona para qualquer conjunto $\{b_1, \dots, b_n\}$ de n vetores em \mathbb{R}^n , para os quais não é possível escrever um vetor como combinação linear dos demais (na linguagem de Álgebra Linear, os n vetores devem ser *linearmente independentes*). Em certas situações, muitos cálculos são simplificados com a escolha adequada da base $\{b_1, \dots, b_n\}$. Não vamos nos aprofundar neste tópico, que é amplamente discutido em um curso de Álgebra Linear.

Para encerrar esta seção, vamos dar uma outra maneira de se identificar uma transformação linear:

Teorema 6.2 Seja $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função vetorial de \mathbb{R}^n para \mathbb{R}^m tal que

$$(1) \quad T(x + y) = T(x) + T(y), \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}^n \text{ e}$$

$$(2) \quad T(c \cdot x) = c \cdot T(x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n \text{ e } c \in \mathbb{R}.$$

Então T é uma transformação linear, ou seja, existe uma matriz $A_{m \times n}$ tal que $T(x) = A \cdot x$.

Demonstração: Sejam e_1, \dots, e_n os vetores da base canônica de \mathbb{R}^n e considere os valores

$$T(e_1) = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}),$$

$$T(e_2) = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2}),$$

$$\vdots$$

$$T(e_n) = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn}).$$

Por outro lado, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \dots + x_n \cdot e_n$, de modo que

$$\begin{aligned} T(x) &= x_1 \cdot T(e_1) + \dots + x_n \cdot T(e_n) = \\ &= x_1 \cdot (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}) + \dots + x_n \cdot (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn}), \end{aligned}$$

isto é, $T(\mathbf{x}) = (\sum_{i=1}^n a_{1i} \cdot x_i, \sum_{i=1}^n a_{2i} \cdot x_i, \dots, \sum_{i=1}^n a_{mi} \cdot x_i)$ ou, ainda,

$$T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A \cdot \mathbf{x},$$

para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. □

6.5 Exercícios

[01] Faça a associação das seis curvas parametrizadas indicadas abaixo com cada um dos traços na figura (6.10).

- (a) $\alpha(t) = (t^3 - 2t, t^2 - t)$,
- (b) $\alpha(t) = (t^3 - 1, 2 - t^2)$,
- (c) $\alpha(t) = (\text{sen}(3t), \text{sen}(4t))$,
- (d) $\alpha(t) = (t + \text{sen}(2t), t + \text{sen}(3t))$,
- (e) $\alpha(t) = (\text{sen}(t + \text{sen}(t)), \cos(t + \cos(t)))$,
- (f) $\alpha(t) = (\cos(t), \text{sen}(t + \text{sen}(5t)))$.

Observação: para cada um dos desenhos, escalas diferentes foram utilizadas para cada um dos eixos coordenados!

[02] Faça a associação das seis curvas parametrizadas indicadas abaixo com cada um dos traços na figura (6.11).

- (a) $\alpha(t) = (\cos(8t), t, \text{sen}(8t))$,
- (b) $\alpha(t) = (t^2 - 1, t^3, t^4)$,
- (c) $\alpha(t) = (t, 1/(1+t^2), t^2)$,
- (d) $\alpha(t) = (\text{sen}(6t) \cos(2t), \text{sen}(6t) \text{sen}(2t), t)$,
- (e) $\alpha(t) = (\cos(t), \text{sen}(t), \text{sen}(5t))$,
- (f) $\alpha(t) = (\cos(t), \text{sen}(t), \ln(t)/2)$.

Observação: em cada um dos desenhos, a mesma escala foi utilizada para os três eixos coordenados, mas desenhos diferentes podem possuir escalas diferentes.

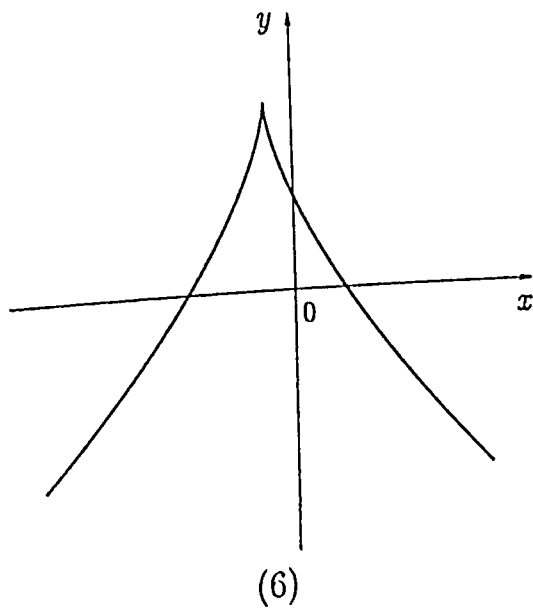
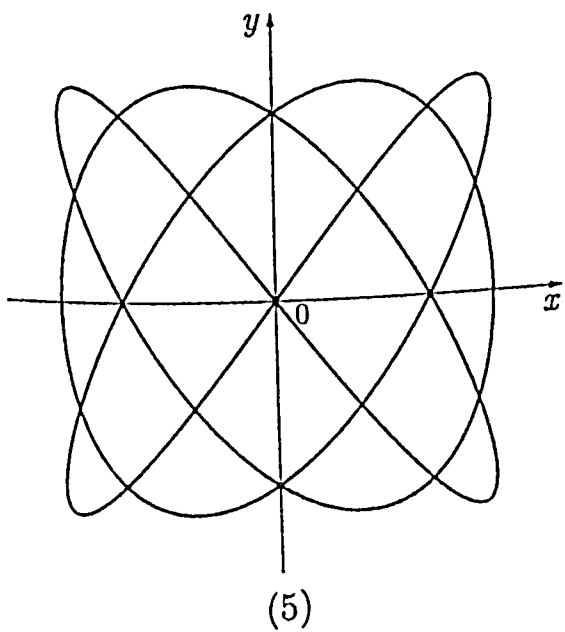
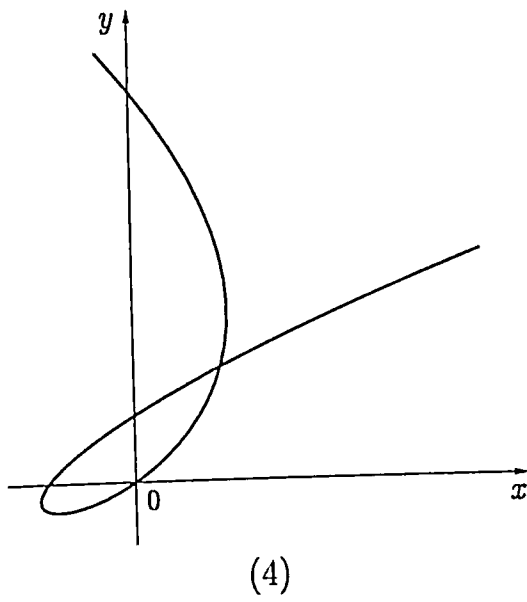
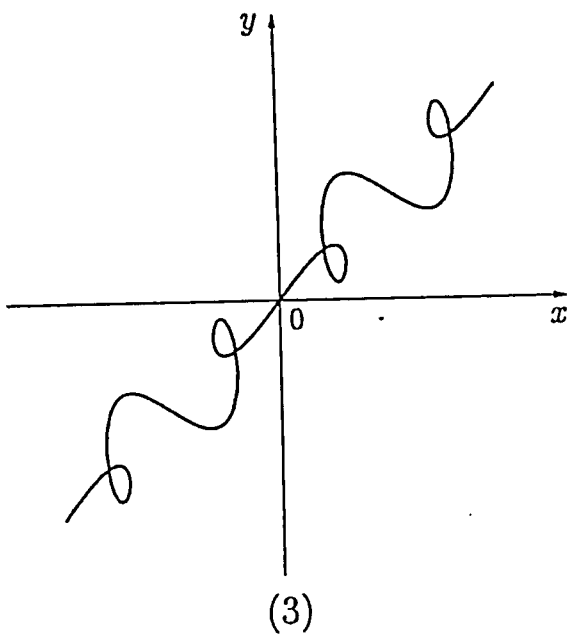
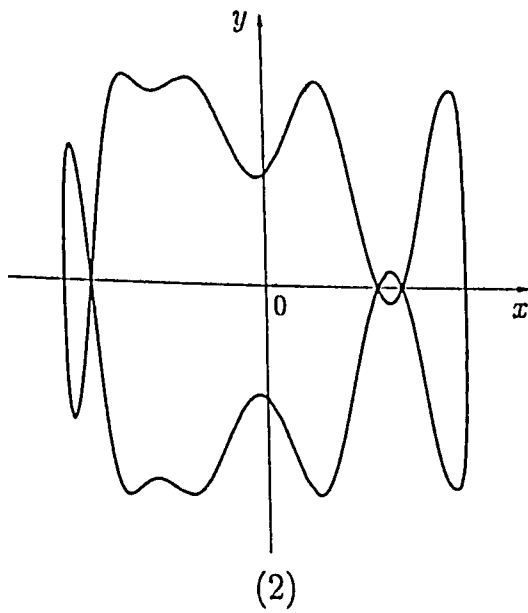
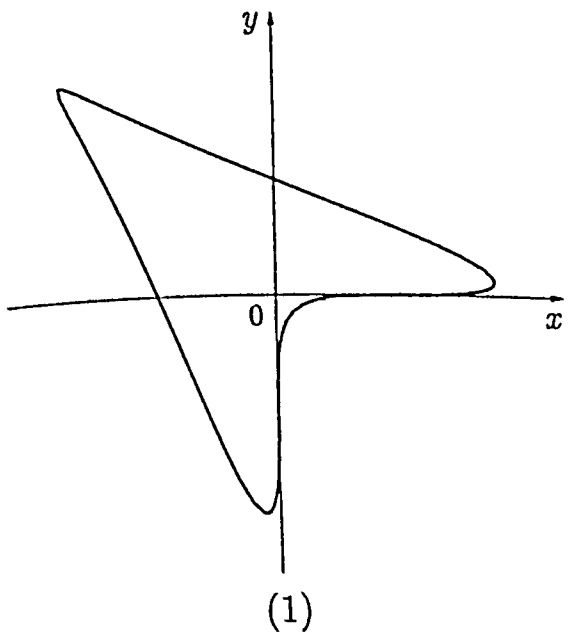
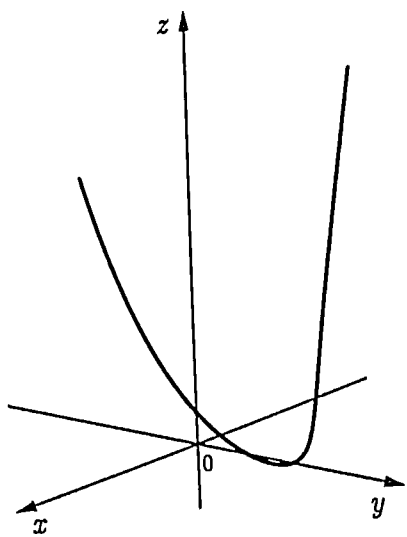
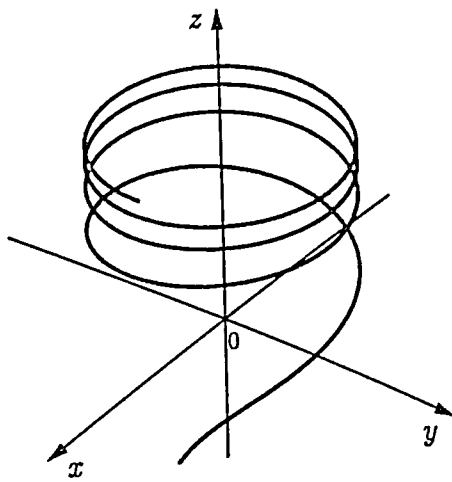


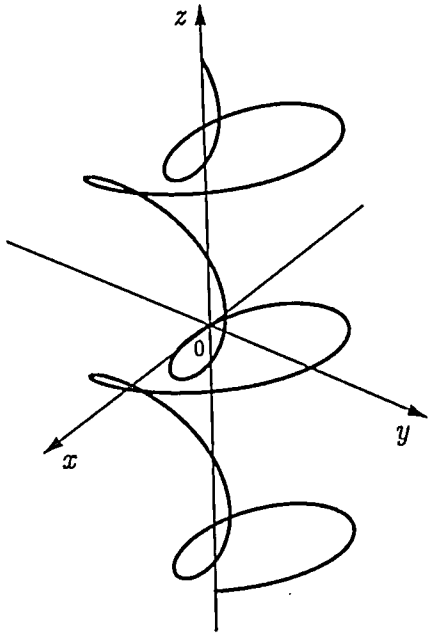
Figura 6.10: Traços de seis curvas parametrizadas diferentes.



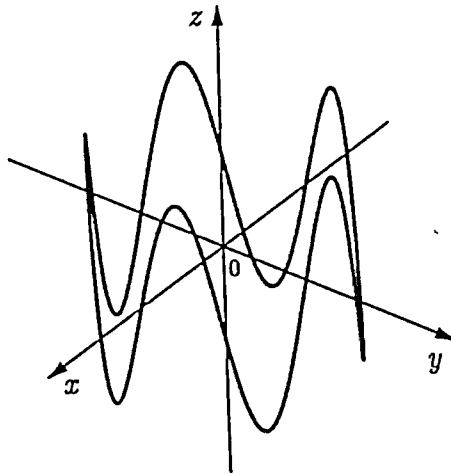
(1)



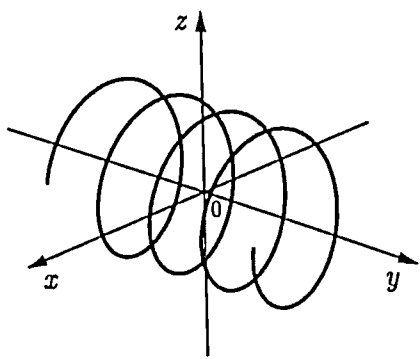
(2)



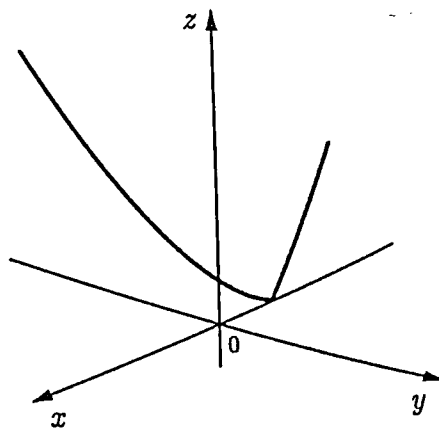
(3)



(4)



(5)



(6)

Figura 6.11: Traços de seis curvas parametrizadas diferentes.

[03] Faç

(a)

(b)

(c)

(d)

[04] Co

o g

de

[05] U

po

in

je

a

[06] U

a

[07] S

e

F

[08] S

e

F

[09]

[03] Faça um esboço do traço das seguintes curvas parametrizadas:

(a) $\alpha(t) = (4 - 2t, 1 + t),$

(b) $\alpha(t) = (t^2, t^2 + 2),$

(c) $\alpha(t) = (2 \cos(t), 3 \sin(t))$

(d) $\alpha(t) = (t, t^2, t^3).$

[04] Considere $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de uma única variável. Mostre que o gráfico de f no plano é exatamente o traço da curva parametrizada definida por $\alpha(t) = (t, f(t))$.

[05] Um objeto move-se ao longo de um caminho de tal maneira que sua posição no instante de tempo t é $(2t, t^2, 1 + t^2)$, para $t \in [0, 1]$. No instante de tempo $t = 1$, ele resolve seguir a reta tangente à sua trajetória mantendo a velocidade que ele tinha no tempo $t = 1$. Qual será a posição de objeto no tempo $t = 3$?

[06] Um objeto move-se sobre o caminho $(x, y) = (e^t + 5t^2, t^4 - 4t)$. Quais são as coordenadas do objeto quando sua velocidade é paralela ao eixo x ?

[07] Suponha que a curva parametrizada $\beta(t) = (t \cdot \cos(t), t \cdot \sin(t))$ do exercício resolvido (6.5) esteja definida para todo $t \in \mathbb{R}$. O que você pode dizer a respeito do traço de β ?

[08] Suponha que a curva parametrizada $\gamma(t) = (e^{t/5} \cdot \cos(t), e^{t/5} \cdot \sin(t))$ do exercício resolvido (6.6) esteja definida para todo $t \in \mathbb{R}$. O que você pode dizer a respeito do traço de γ ?

[09] Ache uma parametrização para cada uma das curvas abaixo, isto é, ache uma curva parametrizada cujo traço seja igual ao conjunto indicado em cada item.

(a) O segmento de reta que vai do ponto $(0, 0)$ ao ponto $(1, 2)$.

(b) O arco de parábola $y = x^2$ do ponto $(-1, 1)$ ao ponto $(1, 1)$.

(c) A parábola $y^2 = 4x$.

(d) A elipse $2x^2 + y^2 = 2$.

(e) O segmento de reta que liga os pontos $(1, 0, -2)$ e $(1, -3, 1)$.

(f) A interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ com o plano $z = 10 - 2x - y$.

(g) A interseção do parabolóide $z = x^2 + y^2$ com o plano $x + y + z = 1$.

[10] (Propriedades da derivada de uma curva parametrizada) Sejam

$$\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad \beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

curvas parametrizadas de classe C^1 definidas em um mesmo intervalo I .

- (a) Mostre que $(\alpha + \beta)'(t) = \alpha'(t) + \beta'(t)$, para todo $t \in I$.
- (b) Mostre que se c é uma constante real, então $(c \cdot \alpha)'(t) = c \cdot \alpha'(t)$, para todo $t \in I$.
- (c) Mostre que se $g: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de uma variável de classe C^1 , então $(g \cdot \alpha)'(t) = g'(t) \cdot \alpha(t) + g(t) \cdot \alpha'(t)$, para todo $t \in I$.
- (d) Mostre que se $h: J \subset \mathbb{R} \rightarrow I \subset \mathbb{R}$ é uma função de uma variável de classe C^1 , então $(\alpha \circ h)'(t) = h'(t) \cdot \alpha'(h(t))$, para todo $t \in I$.

[11] (O comprimento de arco de uma curva parametrizada) Neste exercício vamos deduzir uma fórmula para o cálculo do comprimento (de arco) do traço de uma curva parametrizada. Vamos mostrar que se $\alpha: I = [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma curva parametrizada de classe C^1 , então o comprimento de arco do traço de α é dado por

$$s = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt. \quad (6.2)$$

Para isto, vamos usar a técnica de aproximar o traço de α por poligonais. Considere uma partição do intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de mesmo tamanho:

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

com $\Delta t = t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = \cdots = t_n - t_{n-1} = (b-a)/n$. Associada a esta partição, temos uma curva poligonal obtida unindo-se pares sucessivos de pontos $\alpha(t_i)$ e $\alpha(t_{i+1})$, com $0 \leq i \leq n-1$, sobre o traço de α (veja a figura (6.12)).

O comprimento de arco da curva poligonal fornece uma aproximação para o comprimento de arco da curva original. É de se esperar que quanto mais “fina” a partição, isto é, quanto maior o valor de n , melhor será o valor da aproximação. Mas calcular o comprimento de arco da curva poligonal é uma tarefa fácil de se fazer: basta somar o comprimento de cada segmento de reta que compõe a curva poligonal. Usando agora a fórmula para a distância euclidiana em \mathbb{R}^3 (veja a definição (4.4)

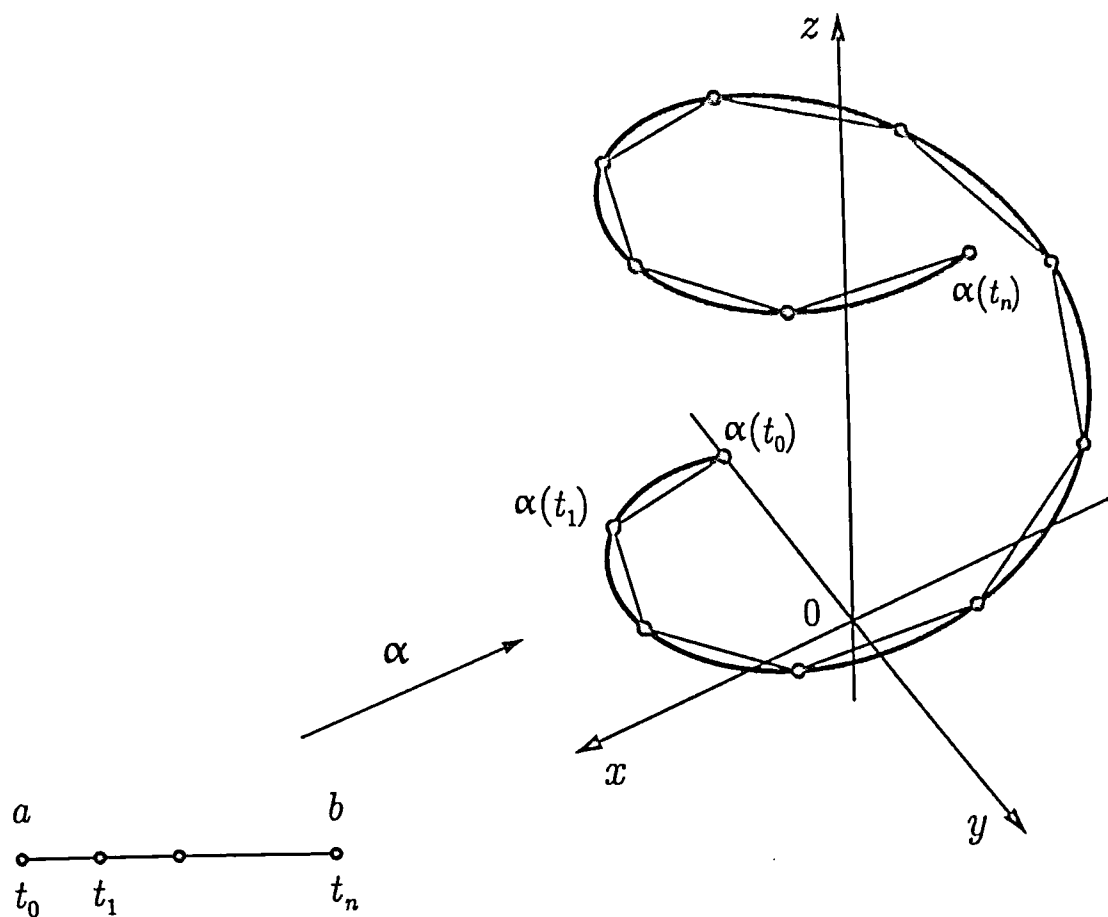


Figura 6.12: Aproximando o traço de uma curva parametrizada por uma curva poligonal.

na página 139), temos que o comprimento do segmento de reta que une os pontos $\alpha(t_i)$ e $\alpha(t_{i+1})$ é dado por

$$\|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i+1})\| = \sqrt{[x(t_{i+1}) - x(t_i)]^2 + [y(t_{i+1}) - y(t_i)]^2 + [z(t_{i+1}) - z(t_i)]^2},$$

onde $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Vamos agora usar o teorema do valor médio (veja a referência [53]) para as funções x , y e z de forma a obter números reais τ_i^* , τ_i° e τ_i° no intervalo aberto (t_i, t_{i+1}) satisfazendo

$$\begin{aligned} x(t_{i+1}) - x(t_i) &= x'(\tau_i^*) (t_{i+1} - t_i), \\ y(t_{i+1}) - y(t_i) &= y'(\tau_i^\circ) (t_{i+1} - t_i), \\ z(t_{i+1}) - z(t_i) &= z'(\tau_i^\circ) (t_{i+1} - t_i). \end{aligned}$$

Logo, o segmento de reta unindo $\alpha(t_i)$ e $\alpha(t_{i+1})$ tem comprimento

$$\|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i+1})\| = \sqrt{[x'(\tau_i^*)]^2 + [y'(\tau_i^\circ)]^2 + [z'(\tau_i^\circ)]^2} (t_{i+1} - t_i)$$

e, portanto, a curva poligonal tem comprimento

$$s_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[x'(\tau_i^*)]^2 + [y'(\tau_i^*)]^2 + [z'(\tau_i^*)]^2} \Delta t,$$

onde $\Delta t = t_{i+1} - t_i = (b - a)/n$. Desta maneira, o comprimento de arco s da curva parametrizada α é o limite da seqüência s_n quando $n \rightarrow +\infty$, se este limite existe. Como α' é contínua, tal limite existe e

$$s = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt,$$

isto é,

$$s = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

Apesar das contas acima terem sido feitas para curvas parametrizadas em \mathbb{R}^3 , não é difícil de ver que elas podem ser estendidas facilmente para curvas parametrizadas em outras dimensões.

- (a) Calcule o comprimento de arco da curva parametrizada

$$\alpha(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t)),$$

para $t \in [0, 1]$.

- (b) Calcule o comprimento de arco da hélice

$$\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), t),$$

com $t \in [0, 2\pi]$.

- (c) Mostre que o comprimento de arco da elipse, definida parametricamente pela expressão

$$\alpha(t) = (a \cos(t), b \sin(t)),$$

com $t \in [0, 2\pi]$ e $a > b > 0$, é dada por

$$s = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2(t)} dt,$$

onde $e = \sqrt{a^2 - b^2}/a$ é a *excentricidade* da elipse.

- (d) Use a fórmula (6.2) do comprimento de arco para a curva parametrizada

$$\alpha(t) = (r \cos(t), r \sin(t)),$$

com $t \in [0, 2\pi]$, e conclua que o comprimento de uma circunferência de raio r é igual a $2\pi r$.

[12] (As bre páginas e o

[13] As tiva

(a)

(b)

[14] (

[12] (As geodésicas do cilindro circular reto) Desenhe uma hélice sobre um cilindro de cartolina, conforme indicado na figura (6.6) da página 195. Se você cortasse o cilindro por uma reta paralela ao eixo z e o abrisse sobre uma mesa, que desenho você veria?

[13] As funções *cosseno hiperbólico* e *seno hiperbólico* são definidas, respectivamente, por:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

(a) Mostre que $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) Mostre que o traço da curva parametrizada definida por

$$\alpha(t) = (a \cosh(t), b \sinh(t)),$$

com $t \in \mathbb{R}$ e a e b constantes positivas, é o ramo da hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

no primeiro e quarto quadrantes do plano euclidiano.

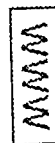
(c) Mostre que a derivada do cosseno hiperbólico é o seno hiperbólico e que a derivada do seno hiperbólico é o cosseno hiperbólico.

[14] (A cicloide) A trajetória descrita por um ponto p sobre uma circunferência, quando esta rola sem deslizar sobre uma reta fixa no plano cartesiano, é denominada *cicloide*. Suponha que a circunferência tenha raio r e que o eixo x seja a reta fixa sobre a qual a circunferência gira. Se o ponto p está na origem $(0, 0)$ quando a circunferência está em $(r, 0)$, mostre que a cicloide pode ser descrita parametricamente pela expressão

$$\alpha(t) = (x(\theta), y(\theta)) = (r \cdot (\theta - \sin(\theta)), r \cdot (1 - \cos(\theta))),$$

onde o parâmetro θ é o ângulo indicado na figura (6.13).

A cicloide tem uma propriedade muito interessante: ela é a solução do *problema da braquistócrona* [do grego, *bráchistos* (brevíssimo) + *chrónos* (tempo)], proposto por Johann Bernoulli em junho de 1696:



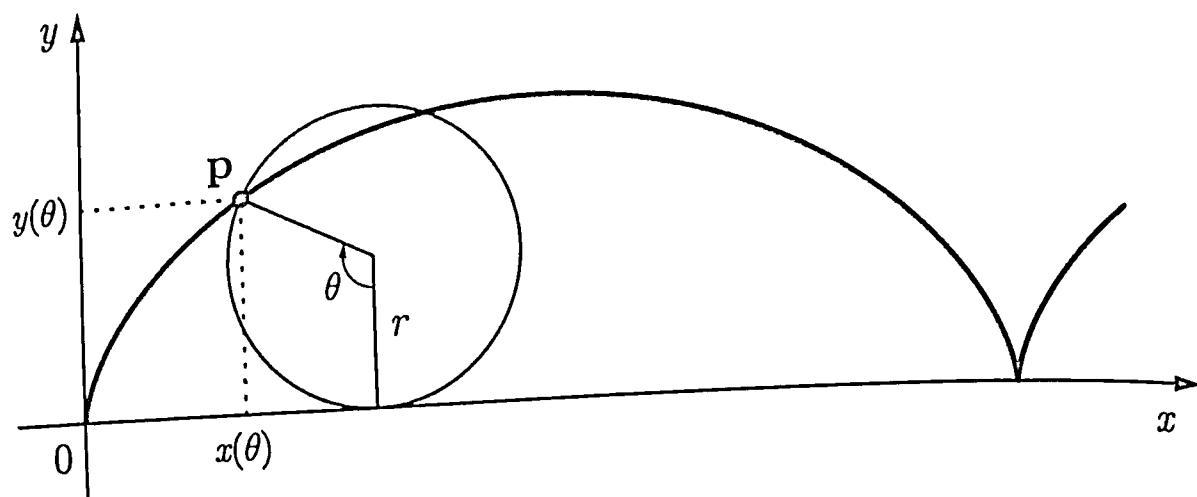
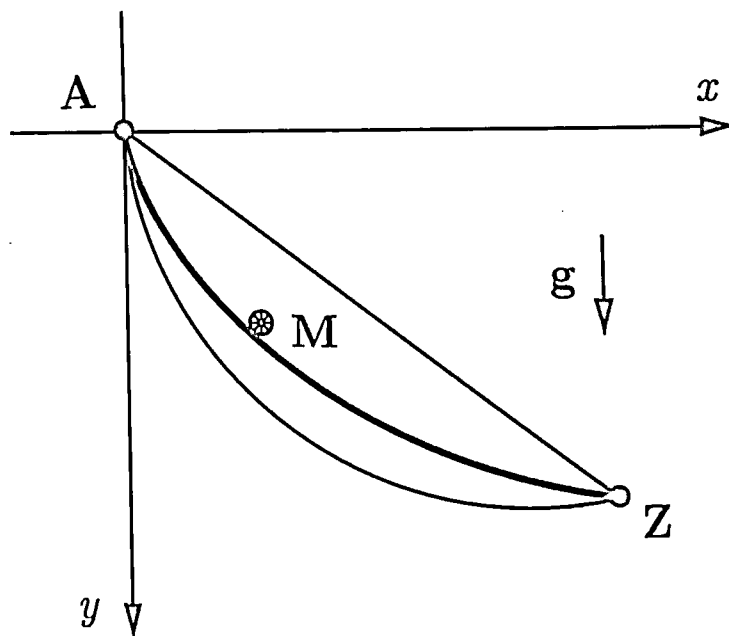


Figura 6.13: A cicloide.

O PROBLEMA DA BRAQUISTÓCRONA

Encontre a curva ao longo da qual um ponto material M deslizará sem atrito no tempo mais curto, sob a influência da gravidade, a partir de um ponto A até um ponto Z , situado mais abaixo e fora da reta vertical que passa por A .



A resposta não é uma reta! Galileu estudou este problema antes de Bernoulli e concluiu que o movimento sobre um arco de circunferência é mais rápido do que aquele sobre o segmento de reta que une os dois pontos. Contudo, ele não conseguiu estabelecer qual era a solução do problema da braquistócrona. Muitos matemáticos responderam ao desafio de Bernoulli e demonstraram que, de fato, a cicloide (“invertida”) é a curva que resolve o problema da braquistócrona. Entre eles: Leib-

ni
Be
O
or
el
ci
[c
t
v
t
D
e

[15]

niz, Jakob Bernoulli (irmão de Johann), l'Hôpital e o próprio Johann Bernoulli.

Outra propriedade interessante da cicloide é a seguinte: não importa onde o ponto material M seja colocado sobre a cicloide "invertida", ele leva o mesmo tempo para deslizar até o fundo (ponto mais baixo da cicloide). Portanto, a cicloide resolve também o *problema da tautócrona* [do grego, *tautó* (o mesmo) + *chrónos* (tempo)]. O físico holandês Christiaan Huygens propôs que o pêndulo do relógio (que ele inventou) deveria oscilar em um arco cicloidal, porque então ele levaria o mesmo tempo para fazer uma oscilação completa por um arco maior ou menor. Não demonstraremos estas propriedades da cicloide aqui. De fato, elas exigem técnicas um pouco mais sofisticadas do que aquelas que desenvolveremos neste curso. Indicamos ao leitor interessado no assunto o livro *Stories about Maxima and Minima* de V. M. Tikhomirov (referência [77] da bibliografia).

[15] (O vetor aceleração de uma curva parametrizada) Se uma curva parametrizada $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ descreve o movimento de um ponto material, então é natural definirmos a *aceleração* como a taxa de variação do vetor velocidade:

$$\alpha''(t) = (x_1''(t), \dots, x_n''(t)),$$

onde $\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$. Calcule o vetor aceleração das seguintes curvas parametrizadas:

- (a) $\alpha(t) = (4 - 2t, 1 + t)$,
- (b) $\alpha(t) = (t^2, t^2 + 2)$,
- (c) $\alpha(t) = (2 \cos(t), 3 \sin(t))$
- (d) $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$.

Se um ponto material de massa m se movimenta em \mathbb{R}^3 então, pela *segunda lei de Newton*, a força F que age sobre ele no ponto $\alpha(t)$ está relacionada com sua aceleração:

$$F(\alpha(t)) = m \cdot \alpha''(t).$$

Em particular, se nenhuma força age sobre o ponto material, então sua aceleração α'' é 0 e, conseqüentemente, seu vetor velocidade α' é constante. Sendo assim, a trajetória do ponto material é uma reta.

*[16] (Propriedades da derivada de uma curva parametrizada) Sejam

$$\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{e} \quad \beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

curvas parametrizadas de classe C^1 definidas em um mesmo intervalo I .

(a) Mostre que $(\alpha \cdot \beta)'(t) = \alpha'(t) \cdot \beta(t) + \alpha(t) \cdot \beta'(t)$, para todo $t \in I$, onde \cdot denota o produto escalar de vetores em \mathbb{R}^3 .

(b) Mostre que $(\alpha \times \beta)'(t) = \alpha'(t) \times \beta(t) + \alpha(t) \times \beta'(t)$, para todo $t \in I$, onde \times denota o produto vetorial de vetores em \mathbb{R}^3 .

*[17] (Geometria diferencial de curvas parametrizadas) Neste exercício vamos desenvolver a teoria clássica de geometria diferencial de curvas parametrizadas.

Definição 6.5 (REPARAMETRIZAÇÃO DE UMA CURVA) Considere uma curva parametrizada $\alpha: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^1 definida em um intervalo $[a, b]$. Seja

$$h: [c, d] \subset \mathbb{R} \rightarrow [a, b] \subset \mathbb{R}$$

uma função de uma variável de classe C^1 *estritamente crescente*. A curva parametrizada

$$\beta: [c, d] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\tau \mapsto \beta(\tau) = (\alpha \circ h)(\tau) = \alpha(h(\tau))$$

é denominada uma *reparametrização* de α .

Definição 6.6 (CURVA REGULAR) Dizemos que uma curva parametrizada $\alpha: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é *regular* se α é de classe C^1 e $\alpha'(t) \neq 0$, para todo $t \in [a, b]$.

Definição 6.7 (CURVA PARAMETRIZADA PELO COMPRIMENTO DE ARCO) Dizemos que $\alpha: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 é uma *curva parametrizada pelo comprimento de arco* se $\|\alpha'(s)\| = 1$, para todo $s \in [a, b]$.

(a) M

o

(b) M

m

(c) M

d

- (a) Mostre que se β é uma reparametrização de α , então α e β possuem o mesmo traço e o mesmo comprimento de arco.
- (b) Mostre que se $\alpha: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ está parametrizada pelo comprimento de arco, então o comprimento de arco de α é igual a $b - a$.
- (c) Mostre que se α é uma curva parametrizada regular, então a função de uma variável $g: [a, b] \rightarrow [0, l]$ definida por

$$s = g(t) = \int_a^t \|\alpha'(\tau)\| d\tau$$

é de classe C^1 , estritamente crescente e inversível. O símbolo l representa o comprimento de arco de α . Seja $h: [0, l] \rightarrow [a, b]$ a inversa de g definida no item anterior. Mostre que h também é uma função de classe C^1 estritamente crescente e que a reparametrização $\beta = \alpha \circ h$ satisfaz a propriedade

$$\left\| \frac{d\beta}{ds}(s) \right\| = 1,$$

para todo $s \in [0, l]$. Moral da história: toda curva regular pode ser parametrizada pelo comprimento de arco.

Definição 6.8 (O VETOR TANGENTE UNITÁRIO) Se uma curva parametrizada $\alpha: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é regular, então podemos definir o *vetor tangente unitário* à curva α em $\alpha(t)$:

$$t(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$$

- (d) Mostre que se $\alpha: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma curva regular de classe C^∞ , então $t'(t) \cdot t(t) = 0$ para todo $t \in [a, b]$.

Com o vetor tangente unitário é possível quantificar o quanto uma curva está “encurvada”. Observe a espiral logarítmica dada na figura (6.14). Nela estão desenhados os vetores tangentes unitários em pontos igualmente espaçados, no sentido que o comprimento de arco entre dois pontos sucessivos é constante. Em pontos mais próximos da origem, a espiral está mais “encurvada” do que em pontos mais distantes. Note que

quanto mais a curva se “encurva”, mais rápida é a variação da direção do vetor tangente unitário. A variação do vetor tangente unitário fornece, portanto, uma medida da curvatura da curva.

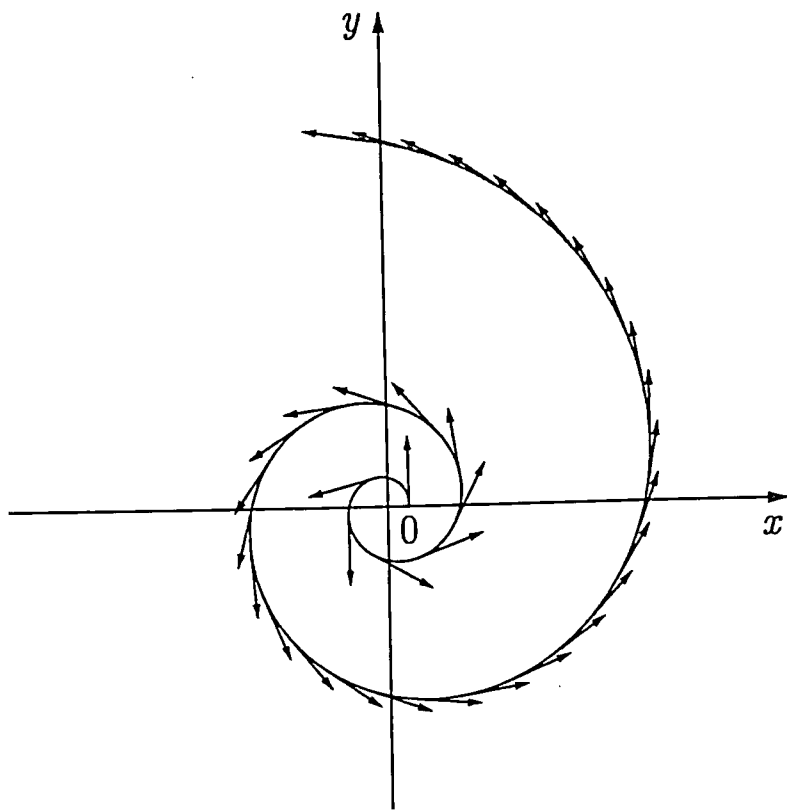


Figura 6.14: O vetor tangente unitário em pontos “igualmente espaçados” da espiral logarítmica.

Definição 6.9 (A CURVATURA) Seja $\alpha: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva de classe C^∞ parametrizada pelo comprimento de arco. A *curvatura* em um ponto $\alpha(s)$ sobre o traço da curva é o número

$$k(s) = \|\alpha'(s)\|.$$

- (e) Se uma curva regular $\alpha: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^∞ não está parametrizada pelo comprimento de arco sabemos, pelo item (c), que é possível reparametrizá-la pelo comprimento de arco e, com esta reparametrização, podemos calcular sua curvatura. Contudo, é possível estabelecer uma fórmula para a curvatura de α usando diretamente a parametrização original. Para isto, mostre que

$$k(t) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}.$$

- (f) Most
(g) Most
um c
(h) Calc
(i) Faça
Qua
com

Defi
uma
com
prin

- (j) Us
pa
en
m

D
pa
pa
 α

Obse
 $t(t)$,
form

- (k) p

- (f) Mostre que toda reta tem curvatura zero em cada um de seus pontos.
- (g) Mostre que a curvatura de uma circunferência de raio r em cada um de seus pontos é constante e igual a $1/r$.
- (h) Calcule a curvatura da hélice $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ para $t \in \mathbb{R}$.
- (i) Faça o gráfico da curvatura da parábola $\alpha(t) = (t, t^2)$ para $t \in \mathbb{R}$. Qual é o ponto da parábola de maior curvatura? O que acontece com a curvatura quando $t \rightarrow +\infty$? E quando $t \rightarrow -\infty$?

Definição 6.10 (O VETOR NORMAL PRINCIPAL) Considere uma curva parametrizada $\alpha: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^∞ com $\alpha'(t) \neq 0$, para todo $t \in [a, b]$. Definimos o vetor *normal principal* de α em $\alpha(t)$ por:

$$\mathbf{n}(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}.$$

- (j) Use o item (d) para mostrar que se $\alpha: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada de classe C^∞ com $\alpha'(t) \neq 0$, para todo $t \in [a, b]$, então os vetores $\mathbf{t}(t)$ e $\mathbf{n}(t)$ são perpendiculares. Em outras palavras, mostre que $\mathbf{t}(t) \cdot \mathbf{n}(t) = 0$, para todo $t \in [a, b]$.

Definição 6.11 (O VETOR BINORMAL) Considere uma curva parametrizada $\alpha: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^∞ com $\alpha'(t) \neq 0$, para todo $t \in [a, b]$. Definimos o vetor *normal binormal* de α em $\alpha(t)$ por $\mathbf{b}(t) = \mathbf{t}(t) \times \mathbf{n}(t)$.

Observe que, pelo item (i) e pela definição do vetor binormal, os vetores $\mathbf{t}(t)$, $\mathbf{n}(t)$ e $\mathbf{b}(t)$ são unitários e dois a dois perpendiculares. Estes vetores formam o *triedro de Serret-Frenet* da curva. Veja a figura (6.15).

- (k) Mostre que se $\alpha: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada de classe C^∞ com $\alpha'(t) \neq 0$, para todo $t \in [a, b]$, então

$$\mathbf{b}'(t) \cdot \mathbf{b}(t) = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{b}'(t) \cdot \mathbf{t}(t) = 0,$$

para todo $t \in [a, b]$. Conclua que \mathbf{b}' é um múltiplo escalar de \mathbf{n} .

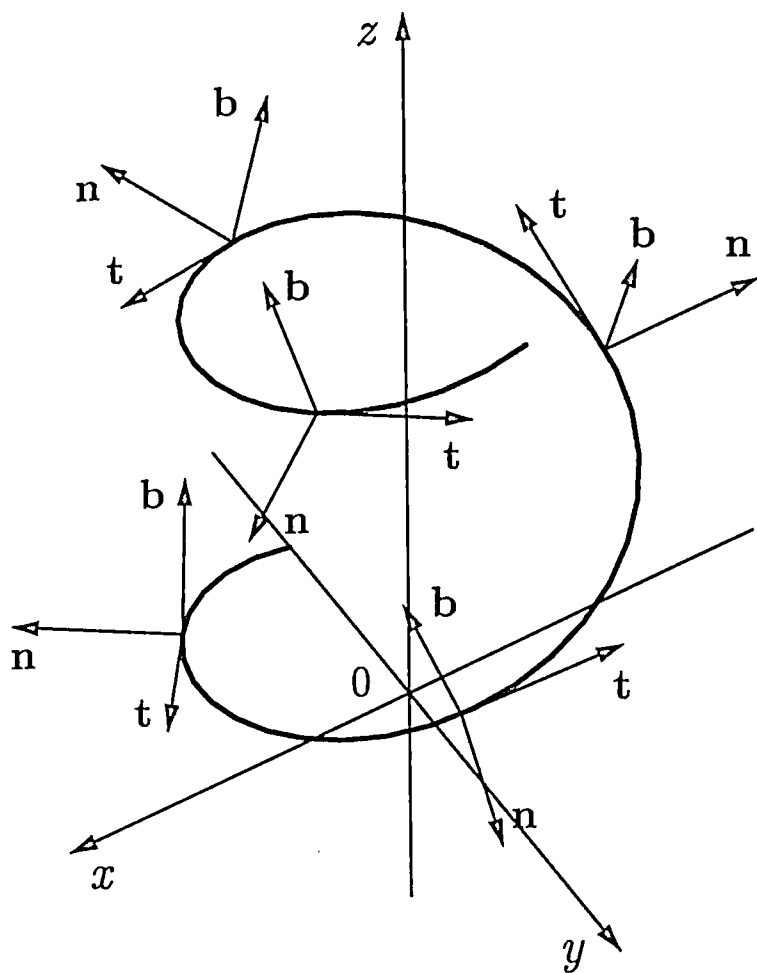


Figura 6.15: Os vetores tangente t , normal principal n e binormal n .

Definição 6.12 (A TORÇÃO) Considere $\alpha: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^∞ parametrizada pelo comprimento de arco satisfazendo $\alpha'(s) \neq 0$, para todo $s \in [a, b]$. A *torção* em um ponto $\alpha(s)$ sobre o traço da curva é o número $\tau(s)$ tal que

$$b'(s) = -\tau(s) \cdot n(s),$$

isto é, $\tau(s) = -n(s) \cdot b'(s)$.

- (1) Seja uma curva regular $\alpha: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^∞ (não necessariamente parametrizada pelo comprimento de arco). Se $\alpha'(t) \neq 0$, para todo $t \in [a, b]$, mostre que a torção de α pode ser calculada pela expressão

$$\tau(t) = \frac{[\alpha'(t) \times \alpha''(t)] \cdot \alpha'''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2}.$$

- (m) Calcule a torção da hélice $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$, com $t \in \mathbb{R}$.

(n) M
cu
un
m
(o) U
u

Para
de G
com
trans
cua
o teo

[18] Diga
linea

e, e
em

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

(f)

(g)

(h)

(i)

(j)

(k)

- (n) Mostre que a torção de uma curva parametrizada plana (isto é, uma curva cujo traço está contido em algum plano de \mathbb{R}^3) é zero em cada um de seus pontos. Se a torção não é zero, então ela fornece uma medida do quanto a curva tende a se afastar de um plano.
- (o) Use o item (k) para demonstrar as *fórmulas de Serret-Frenet* de uma curva parametrizada pelo comprimento de arco:

$$\begin{cases} \mathbf{t}'(s) = & +k(s) \cdot \mathbf{n}(s), \\ \mathbf{n}'(s) = & -k(s) \cdot \mathbf{t}(s) & -\tau(s) \cdot \mathbf{b}(s), \\ \mathbf{b}'(s) = & -\tau(s) \cdot \mathbf{n}(s). \end{cases}$$

Para terminar, mencionamos um resultado muito interessante na teoria de Geometria Diferencial: dadas duas funções $k = k(s)$ e $\tau = \tau(s)$, com $k(s) \neq 0$ para todo s , a menos de movimentos rígidos (isto é, translações e rotações), existe uma única curva parametrizada em \mathbb{R}^3 cuja curvatura é k e cuja torção é τ . Este resultado é conhecido como o *teorema fundamental das curvas*.

- [18] Diga se cada uma das funções vetoriais a seguir é uma transformação linear ou não. Em caso afirmativo, encontre uma matriz A que satisfaz

$$\mathbf{T}(x, y) = A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

e, em caso negativo, explique porque você acha que a função vetorial em questão não é uma transformação linear.

- (a) $\mathbf{T}(x, y) = (\cos(x + y), \sin(x - y))$.
 (b) $\mathbf{T}(x, y) = (\sin(x + y), \sin(x - y))$.
 (c) $\mathbf{T}(x, y) = (x - y, x + y)$.
 (d) $\mathbf{T}(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.
 (e) $\mathbf{T}x, y = (x, y)$.
 (f) $\mathbf{T}x, y = (y, x)$.
 (g) $\mathbf{T}(x, y) = (x + y)/2$.
 (h) $\mathbf{T}(x, y) = x + y + 1$.
 (i) $\mathbf{T}(x, y) = (0, 0, 0, 0, 0)$.
 (j) $\mathbf{T}(x, y) = (x + 2y, -x - y, 3x + 2y)$.
 (k) $\mathbf{T}(x, y) = (x + 2y, -x - y, 3x + 2y, \cos(1)x, \sin(1)y)$.

[19] Dê três exemplos de transformações lineares e três exemplos de transformações não-lineares

- (a) de \mathbb{R}^2 para \mathbb{R}^2 , (b) de \mathbb{R}^2 para \mathbb{R} , (c) de \mathbb{R} para \mathbb{R} ,
 (d) de \mathbb{R}^3 para \mathbb{R}^4 , (e) de \mathbb{R}^4 para \mathbb{R}^3 , (f) de \mathbb{R}^3 para \mathbb{R}^3 ,
 (g) de \mathbb{R}^5 para \mathbb{R}^7 , (h) de \mathbb{R} para \mathbb{R}^3 , (i) de \mathbb{R}^2 para \mathbb{R}^5 .

[20] Sabendo que $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma transformação linear, $T(1, 0) = (2, 2)$ e $T(0, 1) = (0, 1)$, calcule $T(4, -3)$.

[21] Mostre que existe uma única transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 0) = (2, 2)$ e $T(0, 1) = (0, 1)$.

[22] Exiba explicitamente duas funções $F_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $F_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tais que $F_1(1, 0) = F_2(1, 0) = (2, 2)$ e $F_1(0, 1) = F_2(0, 1) = (0, 1)$, mas $F_1 \neq F_2$.

[23] Seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que

$$T(1, 1, 1) = (1, 0, 0), \quad T(1, 0, 1) = (0, 0, 1) \quad \text{e} \quad T(1, 1, 0) = (0, 1, 0).$$

(a) Calcule $T(1, 0, 0)$, $T(0, 1, 0)$ e $T(0, 0, 1)$.

(b) Encontre uma matriz A tal que

$$T(x, y, z) = A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

(c) Calcule $T(1, 2, 3)$.

[24] Considere $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida da seguinte maneira: se $p \in \mathbb{R}^2$, então $F(p)$ é a reflexão de p com relação ao eixo x . A função F é linear? Justifique sua resposta! Em caso afirmativo, encontre uma matriz A tal que $F(p) = A \cdot p$.

*[25] Considere $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida da seguinte maneira: se $p \in \mathbb{R}^2$, então $F(p)$ é a rotação de p de ângulo θ , no sentido anti-horário, em relação à origem. A função F é linear? Justifique sua resposta! Em caso afirmativo, encontre uma matriz A tal que $F(p) = A \cdot p$.

[26] Complete a demonstração do teorema (6.1).

[27] Sejam $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $S: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ transformações lineares e c uma constante real. Mostre que $T + S: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $c \cdot T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ também são transformações lineares.

- [28] Seja $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma transformação linear. Mostre que se $T \neq 0$, isto é, se existe $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $T(\mathbf{x}) \neq 0$, então T não possui extremos globais.
- *[29] Mostre que uma transformação linear $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ leva cada reta de \mathbb{R}^n em uma reta ou em um ponto de \mathbb{R}^m .
- [30] Mostre que a média aritmética $M(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n$ é uma transformação linear definida em \mathbb{R}^n .
- [31] Considere a função vetorial

$$\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto \mathbf{F}(x, y, z) = (z - x^2 - y^2, z + x^2 + y^2).$$

Determine os conjuntos de nível de \mathbf{F} associados respectivamente aos níveis $(0, 0)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, $(1, -1)$ e $(1, 1)$. Faça um esboço do desenho destes conjuntos de nível em \mathbb{R}^3 .

- [32] Considere a função vetorial

$$\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto \mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, z^2 - x^2 - y^2).$$

Determine o conjunto de nível de \mathbf{F} associado ao nível $(1, 0)$. Faça um esboço do desenho deste conjunto de nível em \mathbb{R}^3 .

- [33] (Coordenadas polares) Considere a função vetorial

$$\mathbf{F}: \mathbb{R} \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\theta, r) \mapsto (x, y) = \mathbf{F}(\theta, r) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta)).$$

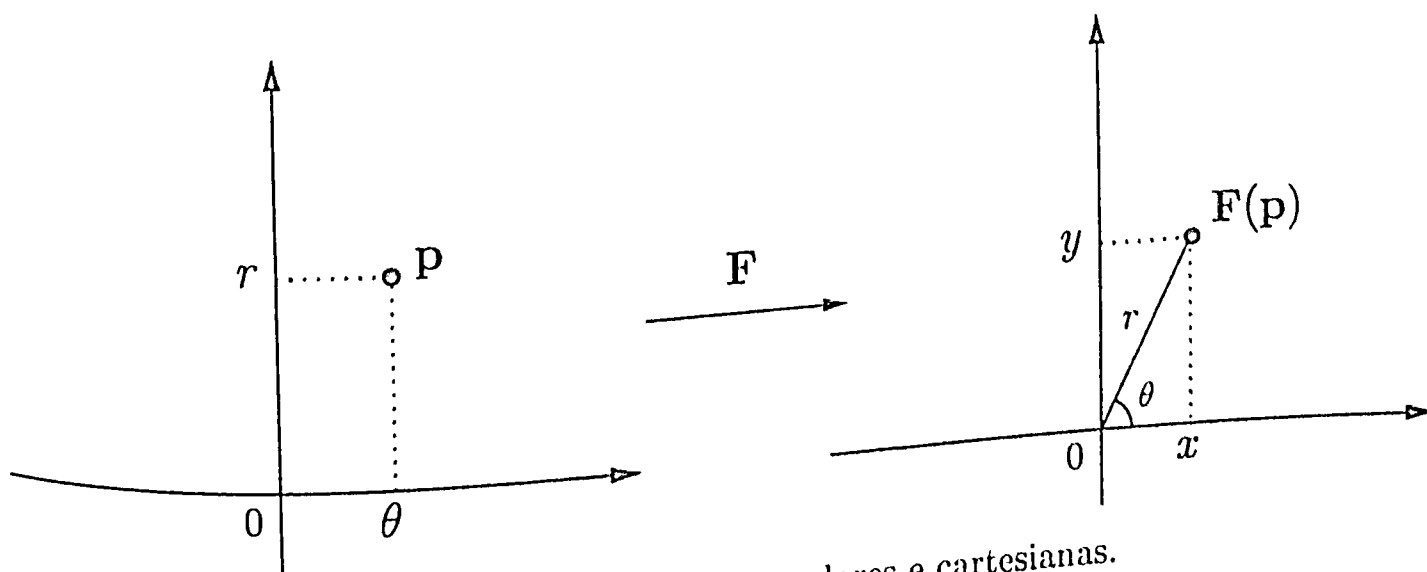
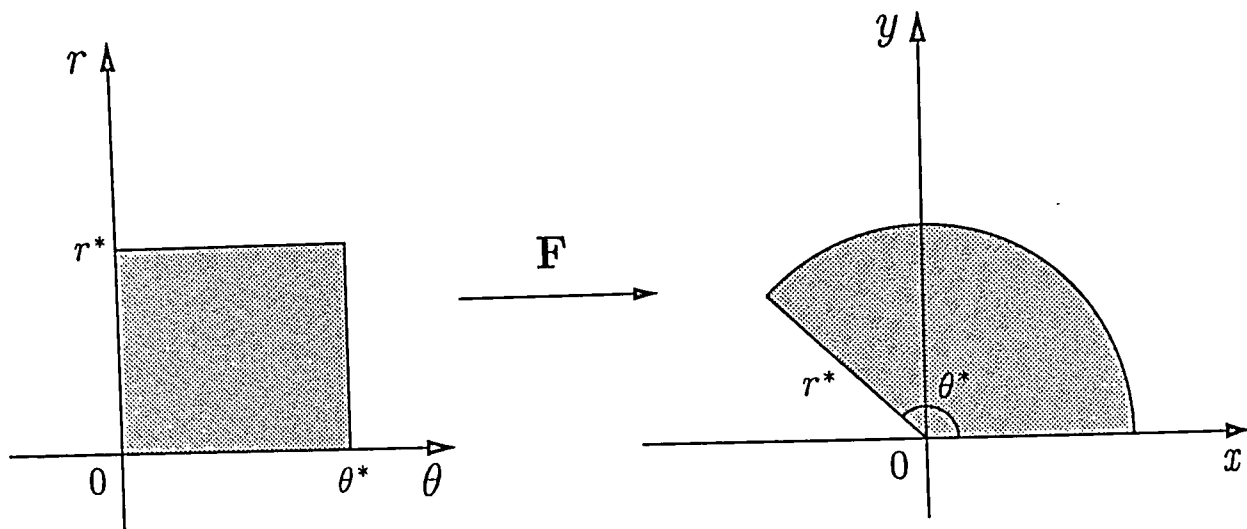


Figura 6.16: Coordenadas polares e cartesianas.

- (a) Mostre que \mathbf{F} leva os pontos da reta $r = c$ (no plano θr), com c uma constante ≥ 0 , em pontos da circunferência de centro na origem e raio c (no plano xy).
- (b) Mostre que \mathbf{F} leva os pontos da reta $\theta = c$ (no plano θr), com c uma constante, em pontos da semi-reta que passa pela origem e tem inclinação $\text{tg}(c)$ (no plano xy).
- (c) Conclua que a função \mathbf{F} leva os pontos do retângulo $[0, \theta^*] \times [0, r^*]$ (no plano θr) nos pontos do setor circular delimitado pelas retas $y = 0$, $y = \text{tg}(\theta^*) x$ e a circunferência $x^2 + y^2 = (r^*)^2$ (no plano xy), conforme a figura abaixo.



Em particular, conclua que a função \mathbf{F} leva os pontos do retângulo $[0, 2\pi] \times [0, r^*]$ (no plano θr) no disco de centro na origem e raio r^* (no plano xy).

Esta propriedade de \mathbf{F} transformar retângulos em setores circulares será útil no cálculo de integrais duplas, assunto que você verá no curso de Cálculo Integral de Funções de Várias Variáveis.

Os números θ e r que satisfazem as relações $x = r \cos(\theta)$ e $y = r \sin(\theta)$ são denominados as *coordenadas polares* do ponto (x, y) .

*[34] (Coordenadas esféricas) Considere a função vetorial

$$\begin{aligned} \mathbf{F}: [0, +\infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\rho, \varphi, \theta) &\mapsto (x, y, z) = \mathbf{F}(\rho, \varphi, \theta) \end{aligned}$$

definida por

$$\mathbf{F}(\rho, \varphi, \theta) = (\rho \sin(\varphi) \cos(\theta), \rho \sin(\varphi) \sin(\theta), \rho \cos(\theta)).$$

- (a) Encontre $(\rho, \varphi, \theta) \in [0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tal que $F(\rho, \varphi, \theta) = (1, 1, 1)$.
- (b) Mostre que F leva os pontos do paralelepípedo $[0, \rho^*] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$, no sistema de eixos $\rho\varphi\theta$, em pontos da esfera “sólida” de centro na origem e raio r^* , no sistema de eixos xyz .

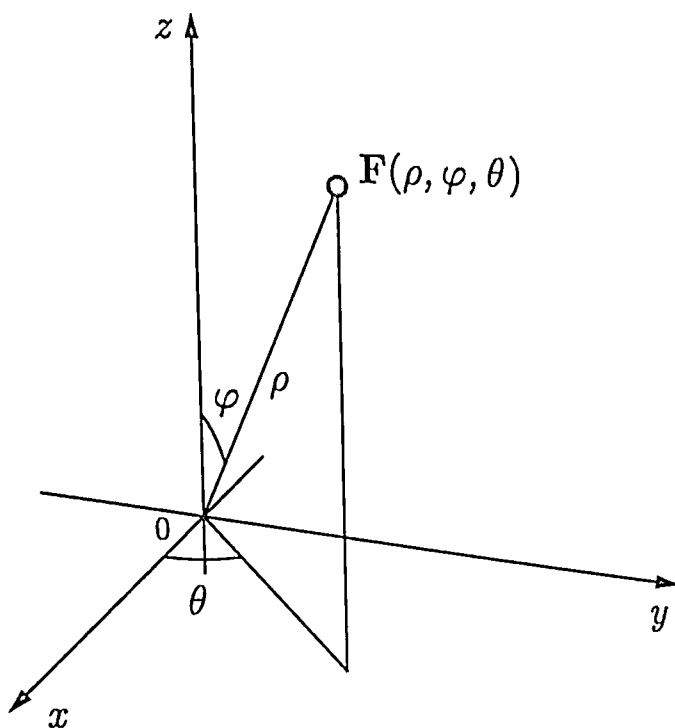


Figura 6.17: Coordenadas esféricas.

Esta propriedade de F transformar paralelepípedos em esferas será útil no cálculo de integrais triplas, assunto que você verá no curso de Cálculo Integral de Funções de Várias Variáveis.

Os números ρ , φ e θ que satisfazem as relações $x = \rho \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta)$, $y = \rho \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta)$ e $z = \rho \cos(\theta)$ são denominados as *coordenadas esféricas* do ponto (x, y, z) .

*[35] (Coordenadas cilíndricas) Considere a função vetorial

$$F: [0, +\infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \theta, z) \mapsto (x, y, z) = F(r, \theta, z)$$

definida por

$$F(\rho, \varphi, \theta) = F(r, \theta, z) = (r \cos(\theta), r \operatorname{sen}(\theta), z).$$

- (a) Encontre $(r, \theta, z) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tal que $F(r, \theta, z) = (1, 1, 1)$.
- (b) Mostre que F leva os pontos do paralelepípedo $[0, r^*] \times [0, 2\pi] \times [0, z^*]$, no sistema de eixos $r\theta z$, em pontos do cilindro “sólido” de raio r^* e altura z^* , sobre o eixo z , no sistema de eixos xyz .

Esta propriedade de F transformar paralelepípedos em cilindros será útil no cálculo de integrais triplas, assunto que você verá no curso de Cálculo Integral de Funções de Várias Variáveis.

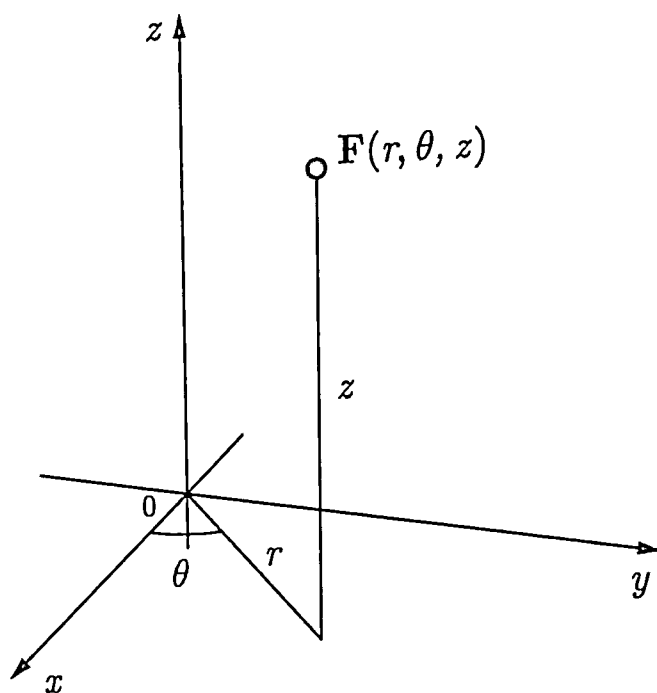


Figura 6.18: Coordenadas cilíndricas.

Os números r , θ e z que satisfazem as relações $x = r \cos(\theta)$ e $y = r \sin(\theta)$ são denominados as *coordenadas cilíndricas* do ponto (x, y, z) .

WWW

[36] (Campos vetoriais) Um *campo vetorial* em \mathbb{R}^n é uma função

$$F: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

definida em um subconjunto D de \mathbb{R}^n , que a cada ponto x em D associa um vetor $F(x)$ em \mathbb{R}^n . Como toda função, um campo vetorial possui gráfico, conjuntos de nível, etc. Contudo, a representação geométrica mais interessante de um campo vetorial é aquela que, para cada ponto x em D , representa $F(x)$ como um vetor com extremidade inicial em x .

Para o campo vetorial dado por

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto F(x, y) = (-y, +x)$$

temos, por exemplo, que $F(+9, -6) = (+6, +9)$. Desta maneira, no ponto $p = (+9, -6)$, desenhamos o vetor $F(p) = (+6, +9)$, com extremidade inicial no ponto $p = (+9, -6)$. Se repetirmos este processo para

outros pontos, obtemos a figura (6.19) (para facilitar a visualização, o tamanho de cada vetor foi reduzido para 15% do tamanho original).

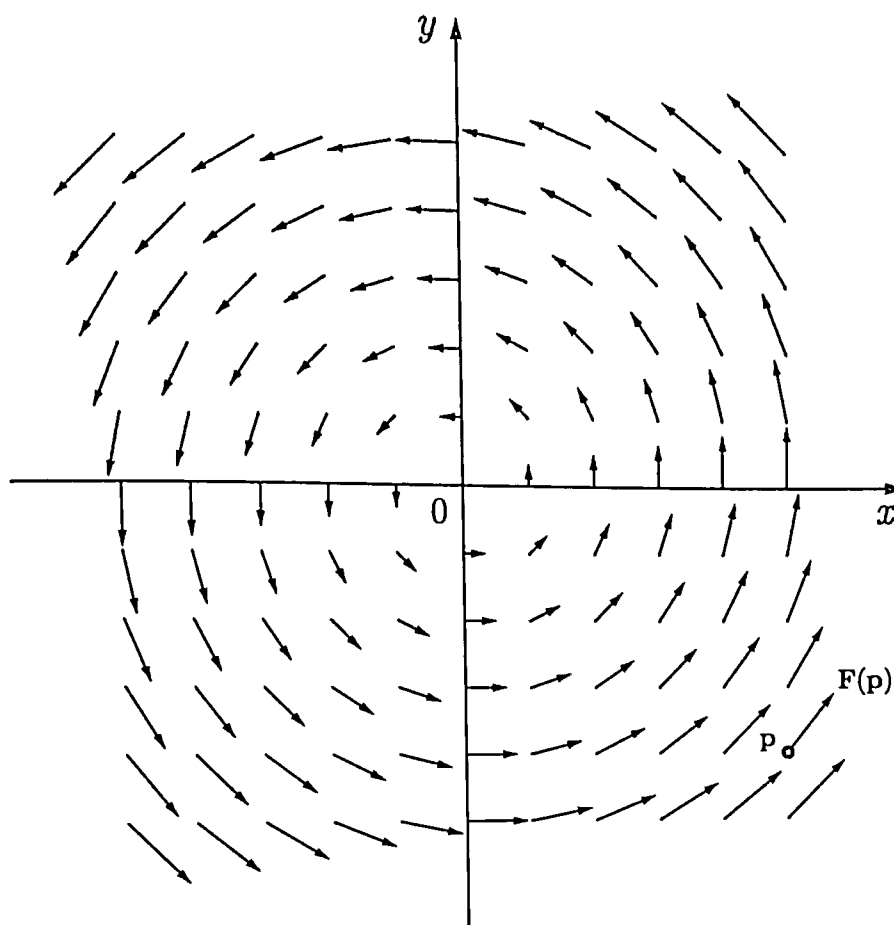


Figura 6.19: Representação geométrica do campo vetorial $F(x, y) = (-y, +x)$.

(a) Faça a associação dos quatro campos vetoriais indicados abaixo com cada uma das representações geométricas na figura (6.20). Observação: para facilitar a visualização, os vetores nesta figura estão representados com escalas diferentes.

(1) $F(x, y) = (0, 1)$,

(2) $F(x, y) = (\ln(1 + x^2 + y^2), x)$,

(3) $F(x, y) = (y, x)$,

(4) $F(x, y) = (2x - 3y, 2x + 3y)$.

(b) Faça uma representação geométrica análoga à da figura (6.19) do campo vetorial $F(x, y) = (+x, +y)$.

(c) Faça uma representação geométrica análoga à da figura (6.19) do campo vetorial $F(x, y) = (-x, -y)$.

(d) Faça uma representação geométrica do campo vetorial

$$F(x, y, z) = (+x, +y, +z).$$

Observe que, desta vez, o seu desenho deve ser feito no espaço e não no plano euclidiano!

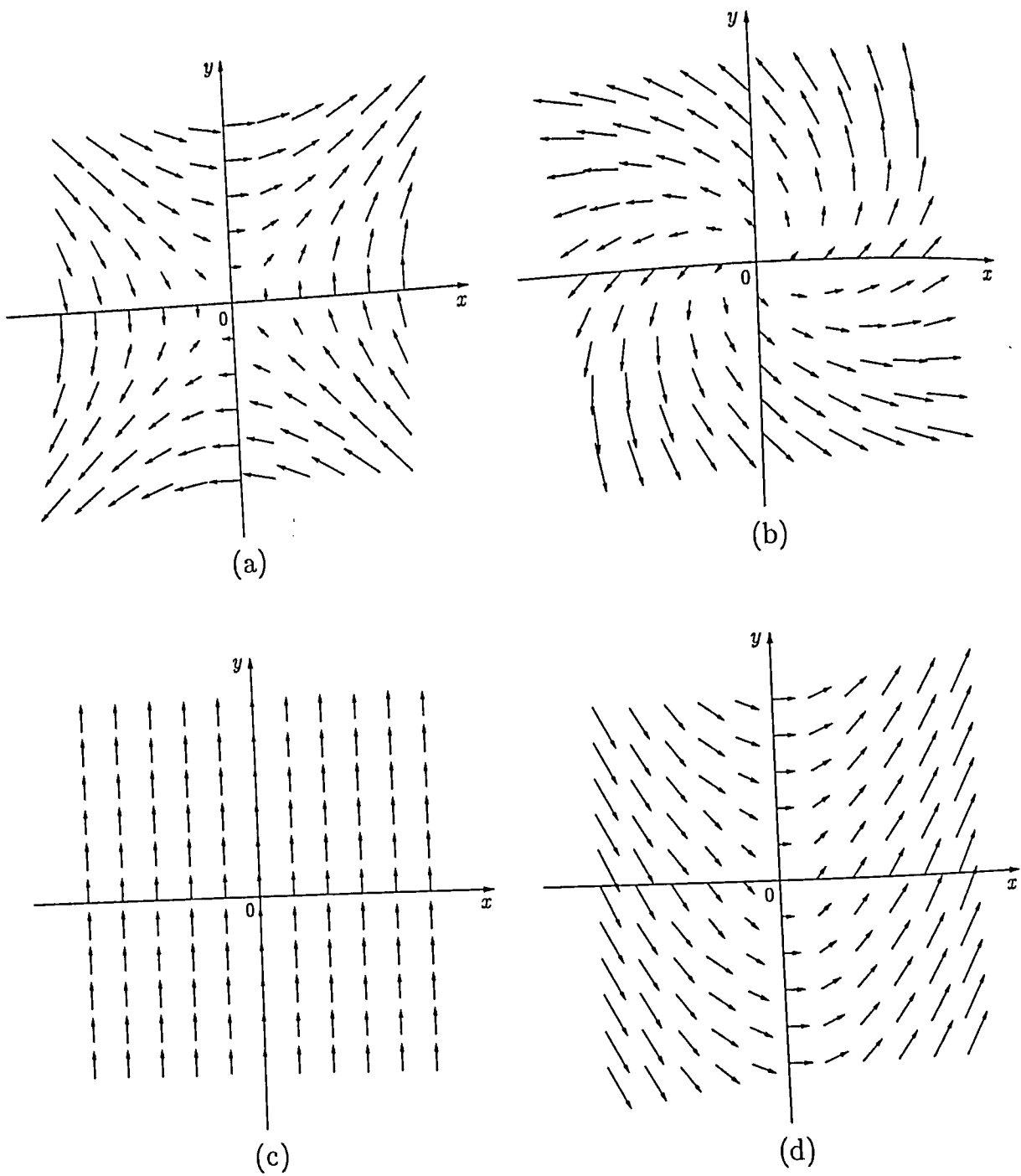


Figura 6.20: Representação geométrica de quatro campos vetoriais diferentes.

Mas por que esta representação geométrica é interessante? Você pode pensar, por exemplo, que o campo vetorial \mathbf{F} modela a velocidade de um ponto material. Mais precisamente, $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ representa o vetor velocidade que o ponto material teria se estivesse ocupando a posição \mathbf{x} . Neste contexto, cada seta na figura (6.19) representa o vetor velocidade que o ponto material teria se estivesse ocupando a posição indicada pela extremidade inicial da seta. Assim, ainda com relação ao campo vetorial $\mathbf{F}(x, y) = (-y, +x)$ da figura (6.19), devemos ler a relação

$\mathbf{F}(+9, -$
 terial na
 Esta int
 dades, i
 trajetór
 torial \mathbf{F}

cujo ve
 cada t

Uma c
 linha
 ver qu

é um
 que

para

$\mathbf{F}(x,$

Além

dela

um

mod

Dife

lhes

vár

A f

fini

ger

res

Ar

$F(+9, -6) = (+6, +9)$ da seguinte maneira: a velocidade do ponto material na posição $p = (+9, -6)$ no plano cartesiano é $v = (+6, +9)$.

Esta interpretação nos leva à seguinte pergunta: a partir das *velocidades*, isto é, a partir do campo vetorial F , é possível determinar a *trajetória* do ponto material? Mais precisamente, dado um campo vetorial F , é possível calcular uma curva parametrizada

$$\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

cujo vetor tangente $\alpha'(t)$ seja igual ao valor do campo F em $\alpha(t)$, para cada $t \in I$? Algebricamente, α deve satisfazer a equação (diferencial)

$$\alpha'(t) = F(\alpha(t)).$$

Uma curva com esta propriedade é denominada uma *curva integral*, *linha de fluxo* ou *integral primeira* do campo F . Por exemplo, é fácil de ver que, para cada $r \geq 0$, a curva parametrizada

$$\alpha(t) = (r \cos(t), r \sin(t))$$

é uma curva integral do campo vetorial $F(x, y) = (-y, +x)$, uma vez que

$$\alpha'(t) = (-r \sin(t), +r \cos(t)) = F(r \cos(t), r \sin(t)) = F(\alpha(t)),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. De fato, pode-se mostrar que as curvas integrais de $F(x, y) = (-y, +x)$ são circunferências (veja a figura (6.21)).

Além de velocidades, campos vetoriais podem ser usados para se modelar fluxos de calor, campos gravitacionais, populações de espécies em um ecossistema, etc. Muitas leis da Física, Economia e Biologia são modeladas com campos vetoriais. No curso de Cálculo IV (Equações Diferenciais e de Diferenças), você estudará esta teoria com mais detalhes: questões de existência e unicidade de curvas integrais bem como os vários métodos usados para se calcular as curvas integrais de um campo.

A figura (6.22) mostra algumas curvas integrais do campo vetorial definido por

$$F(x, y) = (\sin(y), x^2 - y),$$

geradas numericamente pelo programa *Java Microscope* dos professores Shannon Holland e Matthias Kawski, da Universidade Estadual do Arizona.

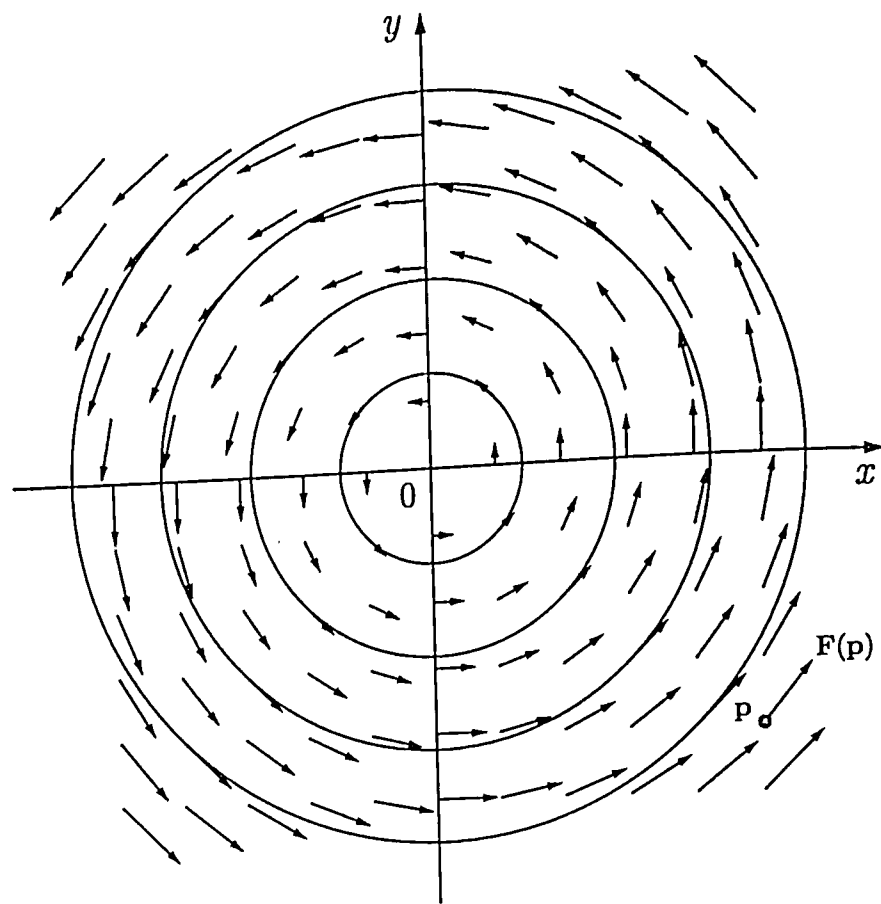


Figura 6.21: Curvas integrais do campo vetorial $F(x, y) = (-y, +x)$.

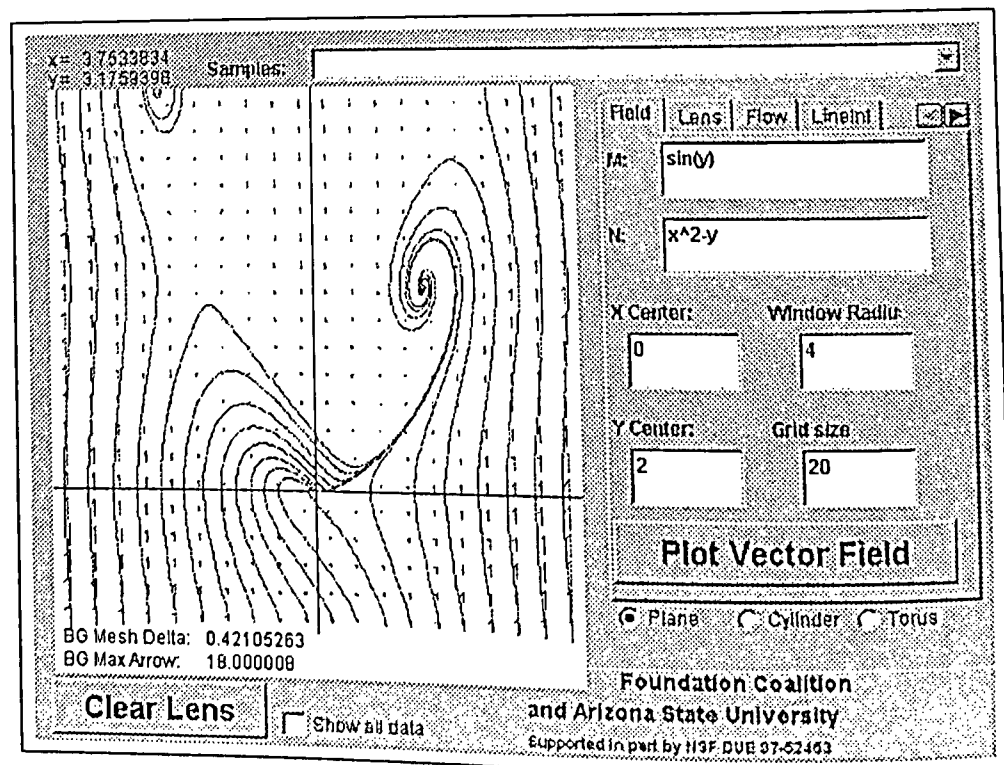


Figura 6.22: Algumas curvas integrais do campo $F(x, y) = (\text{sen}(y), x^2 - y)$ geradas numericamente por computador.

- (e) Mostre que $\alpha(t) = (e^{2t}, \ln(|t|), 1/t)$, para $t \neq 0$, é uma curva integral do campo vetorial $F(x, y, z) = (2x, z, z^2)$.
- (f) Mostre que $\alpha(t) = (t^2, 2t - 1, \sqrt{t})$, para $t > 0$, é uma curva integral do campo vetorial $F(x, y, z) = (y + 1, 2, 1/(2z))$.

[37] (Superfícies parametrizadas) Na seção (6.1) vimos que, em algumas situações, podemos representar uma curva de duas maneiras: *implicitamente* (isto é, como um conjunto de nível de uma função escalar $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$) ou *parametricamente* (isto é, como a imagem de uma função vetorial $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$). Nos exercícios do capítulo 3 vimos alguns exemplos de superfícies definidas implicitamente: planos, elipsóides, cones, hiperbolóides elípticos de uma e duas folhas, etc. Cada um destes objetos geométricos foi definido como o conjunto de nível de uma função escalar $f: D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ apropriada. Agora, como no caso de curvas, também podemos representar superfícies parametricamente, isto é, como a imagem de uma função vetorial $\Phi: R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Mais especificamente, uma *superfície parametrizada* é uma função vetorial

$$\begin{aligned} \Phi: R \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x, y, z) = \Phi(u, v) = (\Phi_1(u, v), \Phi_2(u, v), \Phi_3(u, v)) \end{aligned}$$

cujo domínio é um retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$ do plano euclidiano e o contradomínio é \mathbb{R}^3 . As variáveis u e v são denominadas de *parâmetros* da superfície parametrizada Φ e a imagem $S = \Phi(R)$ da região R , pela função Φ , de *superfície* correspondente à função Φ . Veja a figura (6.23).

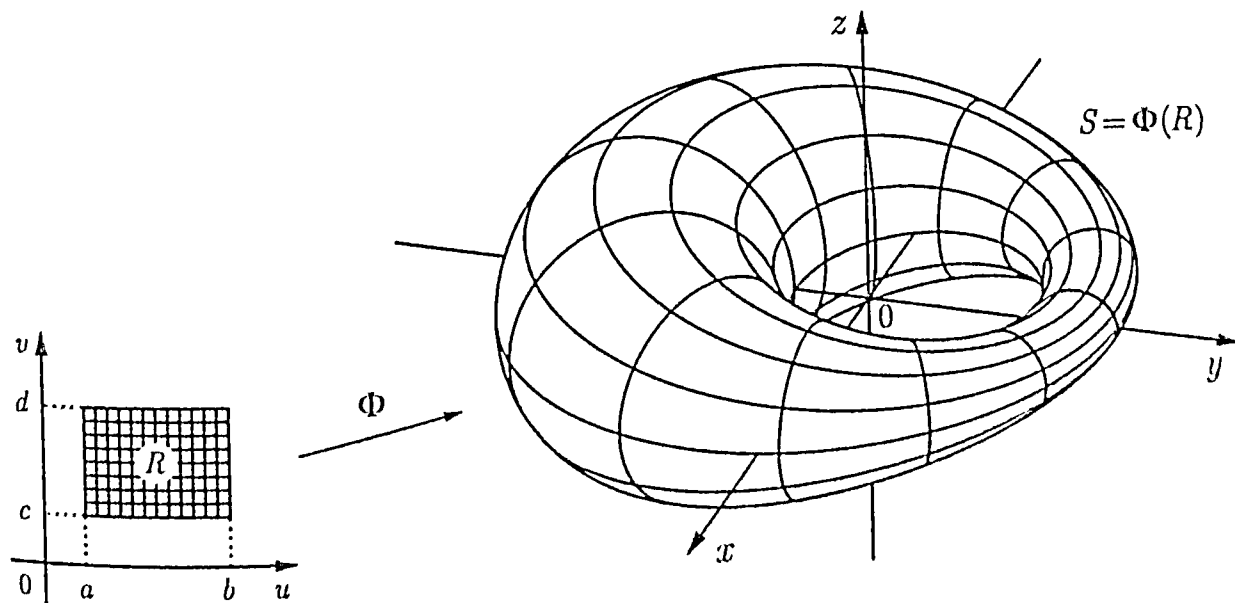


Figura 6.23: Uma superfície parametrizada.

Como no caso de curvas parametrizadas, o objeto geométrico mais importante de uma superfície parametrizada é sua imagem $S = \Phi(R)$. Costuma-se também dizer que Φ é uma *parametrização* da superfície S . Observe que, se fixarmos um valor para o parâmetro v , digamos, $v = v_0$, então a superfície parametrizada Φ induz uma curva parametrizada,

$$\alpha: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ u \mapsto \alpha(u) = \Phi(u, v_0) = (\Phi_1(u, v_0), \Phi_2(u, v_0), \Phi_3(u, v_0))'$$

definida no intervalo $[a, b]$ e cujo traço está contido na superfície $S = \Phi(R)$. Analogamente, se fixarmos um valor para o parâmetro u , digamos, $u = u_0$, então Φ induz uma outra curva parametrizada,

$$\beta: [c, d] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ v \mapsto \beta(v) = \Phi(u_0, v) = (\Phi_1(u_0, v), \Phi_2(u_0, v), \Phi_3(u_0, v))'$$

definida no intervalo $[c, d]$ e cujo traço também está contido na superfície S . Estas curvas são denominadas de *curvas coordenadas* da superfície parametrizada Φ . Veja a figura (6.24).

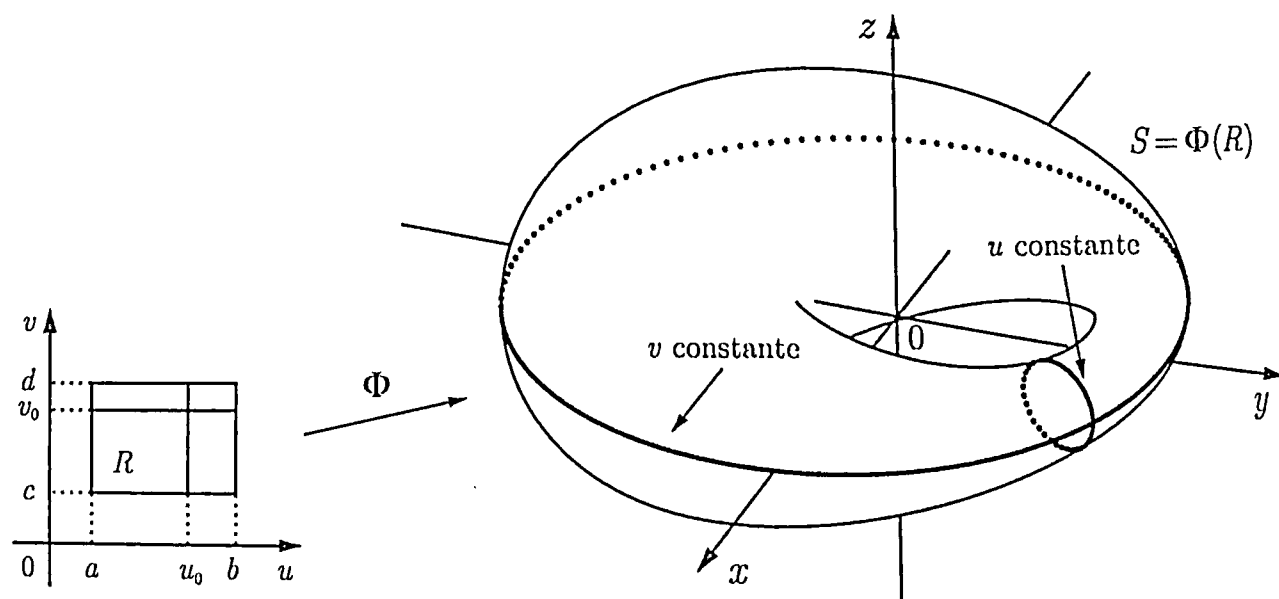


Figura 6.24: Curvas coordenadas de uma superfície parametrizada.

As curvas coordenadas de uma superfície parametrizada Φ são especialmente úteis para se construir um esboço da superfície $S = \Phi(R)$ correspondente. Por exemplo, considere a superfície parametrizada

$$\Phi(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v)$$

definida no retângulo $R = [0, 2\pi] \times [0, 8]$. Para cada $v = v_0 \in [0, 8]$ fixo,

o traço da curva coordenada

$$\alpha(u) = \Phi(u, v_0) = (\cos(u), \sin(u), v_0)$$

é a circunferência no plano $z = v_0$, de raio 1 e centro em $(0, 0, v_0)$. Analogamente, para cada $u = u_0 \in [0, 2\pi]$ fixo, o traço da curva coordenada

$$\beta(v) = \Phi(u_0, v) = (\cos(u_0), \sin(u_0), v)$$

é o segmento de reta paralelo ao eixo z , cujas extremidades são $(\cos(u_0), \sin(u_0), 0)$ e $(\cos(u_0), \sin(u_0), 8)$. Juntando todas estas informações, não é difícil ver que a superfície $S = \Phi([0, 2\pi] \times [0, 8])$, correspondente à parametrização Φ , é um cilindro. Veja a figura (6.25).

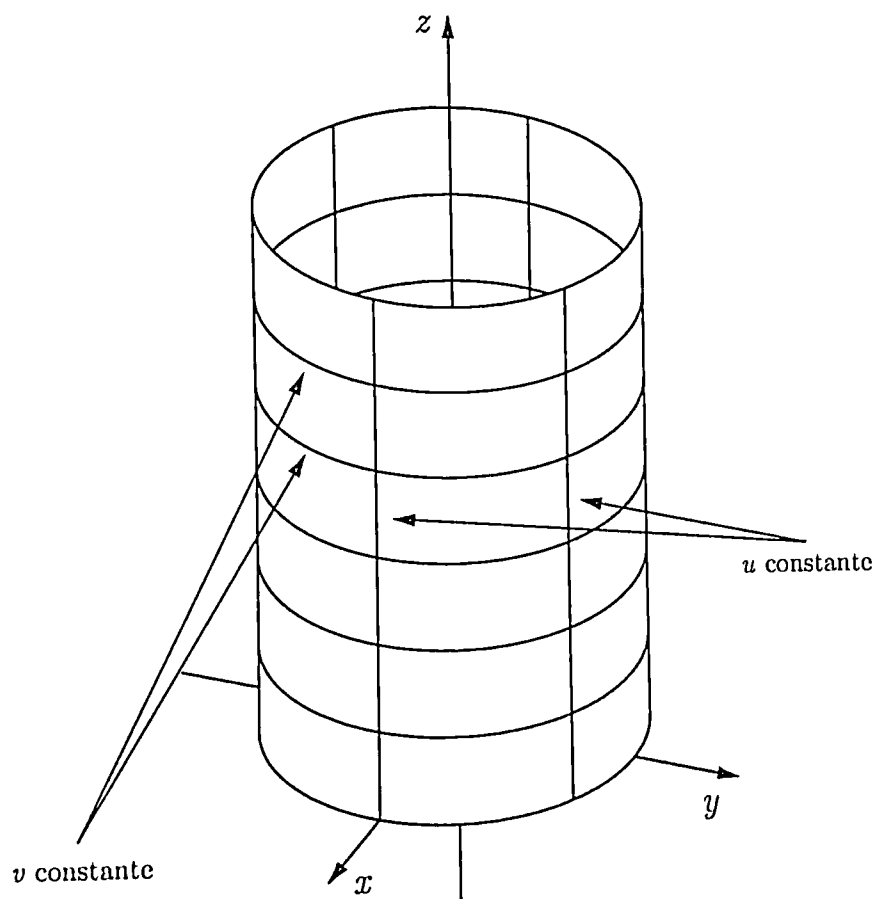


Figura 6.25: $\Phi(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v)$ é uma parametrização do cilindro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = x^2 + y^2 = 1\}$.

Assim, $\Phi(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v)$ é uma parametrização (ou representação paramétrica) do cilindro

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Note que este mesmo cilindro admite uma representação implícita, isto é, ele pode ser descrito como a superfície de nível $w = 1$ da função $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $w = f(x, y, z) = x^2 + y^2$.

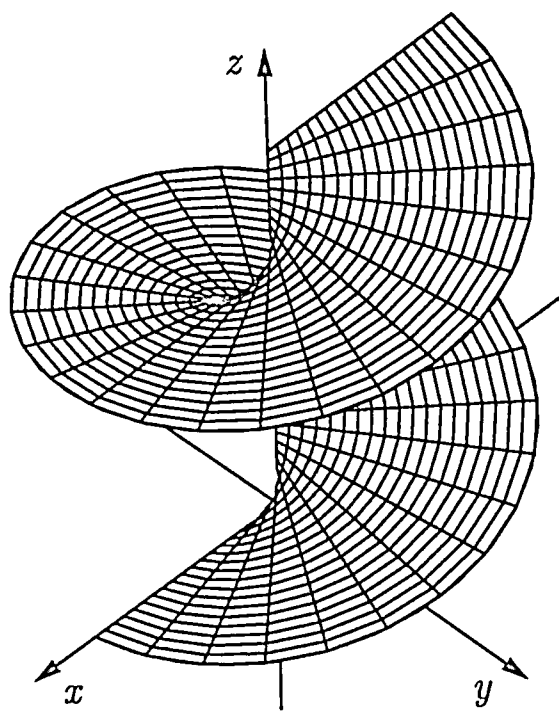
(a) Faça a associação das quatro parametrizações indicadas abaixo com cada uma das superfícies na figura (6.26). Não esqueça de apresentar alguns motivos para a sua escolha.

(1) $\Phi(u, v) = (u - u^3/3 + uv^2, -v - u^2v + v^3/3, u^2 - v^2)$, com (u, v) no retângulo $[-2, 2] \times [-2, 2]$.

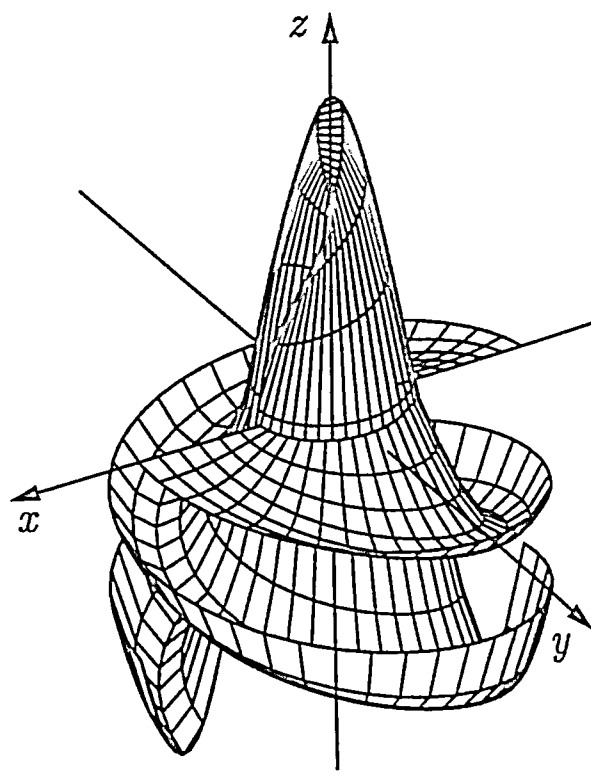
(2) $\Phi(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), v)$, $(u, v) \in [0, 5] \times [0, 3\pi]$.

(3) $\Phi(u, v) = (uv, u, v^2)$, $(u, v) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$.

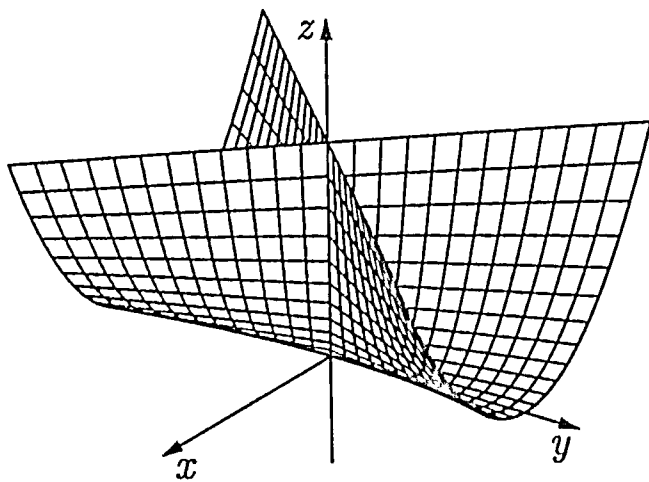
(4) $\Phi(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), v \cos(u))$, $(u, v) \in [-4, 4] \times [0, 2\pi]$.



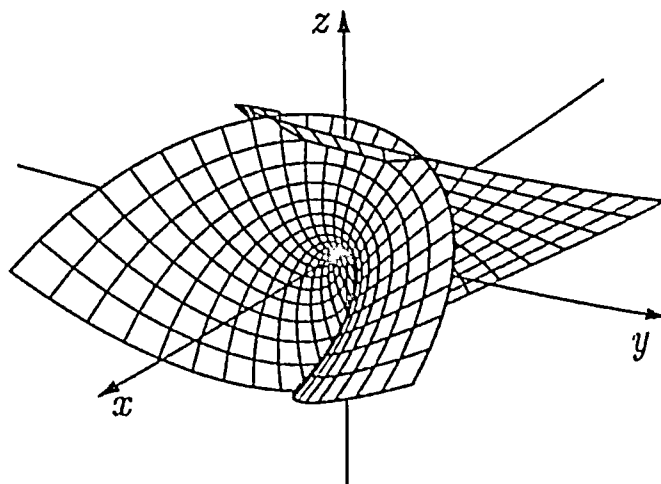
Helicóide



Parafuso de Steinbach



Guarda-chuva de Whitney



Superfície de Enneper

Figura 6.26: Quatro superfícies.

- (b) Mostre que $\Phi(u, v) = (\sin(u) \cos(v), \cos(u) \cos(v), \sin(v))$, com valores de (u, v) no retângulo $[0, \pi] \times [0, 2\pi]$, é uma parametrização da esfera:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Identifique as curvas coordenadas de Φ .

- (c) Mostre que $\Phi(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), u)$, com valores de (u, v) no retângulo $[0, 8] \times [0, 2\pi]$, é uma parametrização do cone:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0 \text{ com } 0 \leq z \leq 8\}.$$

Identifique as curvas coordenadas de Φ .

- (d) Considere o toro definido no exercício [42] da página 119:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 - 4R^2(x^2 + y^2) = 0\}.$$

Mostre que

$$\Phi(u, v) = ((R - r \cos(v)) \cos(u), (R - r \cos(v)) \sin(u), r \sin(v)),$$

com valores de (u, v) no retângulo $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, é uma parametrização do toro. Identifique as curvas coordenadas de Φ . Compare com as curvas sobre o toro da figura (6.27).

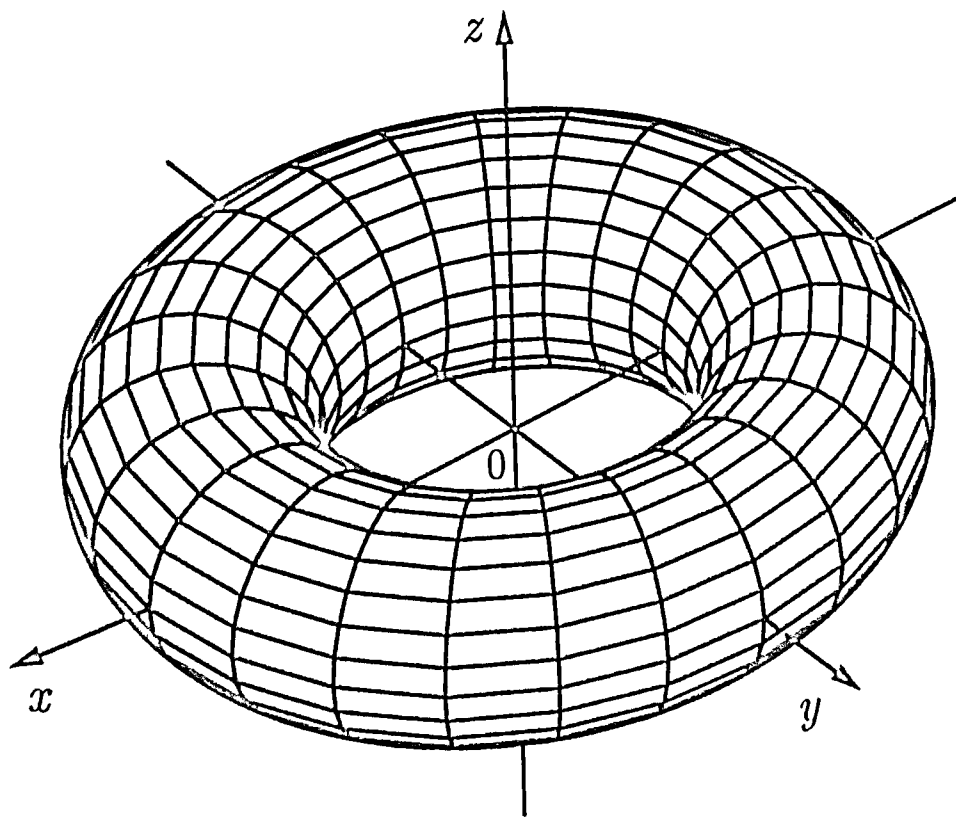


Figura 6.27: O toro.

[38] Seja $f: R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de duas variáveis definida em um retângulo R do plano euclidiano. Mostre que

$$\Phi(u, v) = (u, v, f(u, v)),$$

com valores de (u, v) no retângulo R , é uma parametrização do gráfico de f :

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in R \text{ e } z = f(x, y)\}.$$

Identifique as curvas coordenadas de Φ . Observe que o gráfico de f também admite uma representação implícita:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in R \text{ e } F(x, y, z) = z - f(x, y) = 0\}.$$

Compare com o exercício [23], da página 112 do capítulo 3, item (d).

[39] Considere as funções

$$\begin{array}{l} \alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto \alpha(t) = (t^3, t^2) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{l} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto y = f(x) = x^{2/3}. \end{array}$$

- A curva parametrizada α é de classe C^1 ?
- A função f é de classe C^1 ?
- Verdadeira ou falsa? Se o traço de uma curva parametrizada α de \mathbb{R} para \mathbb{R}^2 possui um “bico”, então α não é de classe C^1 .

6.6 Leitura suplementar

Para uma excelente coletânea de aplicações de conjuntos de nível (como, por exemplo, a projeção de curvas sobre superfícies em engenharia de aviação), indicamos o artigo:

- T. A. Grandine, *Applications of Contouring*, SIAM Review, vol. 42, no. 2, pp. 297-316, 2000.

Para saber mais sobre o uso e o cálculo numérico das representações paramétrica e implícita de curvas e superfícies em computação gráfica, indicamos o livro:

- C. Bajaj, J. Blinn, J. Bloomenthal, M. Cani-Gascuel, A. Rockwood, B. Wyvill e G. Wyvill, *Introduction to Implicit Surfaces*, Morgan-Kaufmann, 1997.