C2 14/AGO/2019

TURMA PEQUENA

HOJE: INTRODUÇÃO
- AO CURSO
- A EDOs
- A INTEGRAIS

A PÁGINA DO CURSO É:
http://angg.twu.net/ (ALGUMA COISA).
O TRUQUE PRA CHEGAR LÁ É:
PROCURE POR "EDUARDO OCHS" NO GOOGLE, VÁ PRA QUALQUER SUBPÁGINA DO angg.twu.net E CLIQUE EM "C2" NA BARRA DE NAVEGAÇÃO.

EDOs:
"EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS"
(EXISTEM TAMBÉM AS "EDP"s, QUE SÃO "PARCIAIS", QUE SÃO BEM MAIS DIFÍCEIS)

DIFERENCIAL:
A COISA COMPLICADA DELAS É UMA DERIVADA.

COMO ASSIM?
$x^2+x+3=9$
EQUAÇÃO DE 2º GRAU!

$f'(x)=4x^3$;
ENCONTRE O f...

ALIÁS, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

NOSSO PRIMEIRO MÉTODO É O CHUTAR E TESTAR.

TABELA
(CADA LINHA É UM CHUTE, E A ÚLTIMA COLUNA É UM TESTE)

$f(x)$	$f'(x)$	$f'(x)=4x^3$
e^x	e^x	F

OUTROS PROBLEMAS
(OUTRAS EDOS):
a) $f'(x)=e^{4x}$ SOL: $f(x)=\frac{1}{4}e^{4x}$
b) $f'(x)=2+3x$
c) $f'(x)=\operatorname{sen} x$
d) $f'(x)=\operatorname{sen} 4x$

a)

$f(x)$	$f'(x)$	$f'(x)=e^{4x}$
$\frac{1}{4}e^{4x}$	e^{4x}	V

b)

$f(x)$	$f'(x)$	$f'(x)=2+3x$
$4x^3$		
$9x$		
$2x^3$		
$\operatorname{sen} x$		

UM EXERCÍCIO PRA TREINAR REGRA DA CADEIA:

$f(u)$	$g(x)$	$f(g(x))$	$f'(u)$	$g'(x)$	$f'(g(x))\,g'(x)$
e^u	$4x$	e^{4x}	e^u	$g'(x)$	$e^{g(x)}g'(x)$
e^u	$g(x)$	$e^{g(x)}$			

C2 14/AGO/2019

TURMA PEQUENA

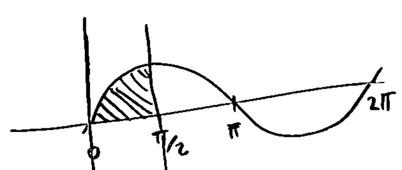
HOJE: INTRODUÇÃO
- AO CURSO
- A EDOs
- A INTEGRAIS

A PÁGINA DO CURSO É:
http://angg.twu.net/ (ALGUMA COISA).
O TRUQUE PRA CHEGAR LÁ É:
PROCURE POR "EDUARDO OCHS"
NO GOOGLE, VÁ PRA QUALQUER
SUBPÁGINA DO angg.twu.net
E CLIQUE EM "C2" NA BARRA
DE NAVEGAÇÃO.

INTEGRAIS SÃO
ÁREAS SOB CURVAS.

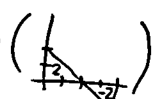
EXEMPLO:
$\int_{x=0}^{x=\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx$ É...

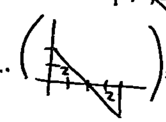
A GENTE PRIMEIRO
DESENHA A CURVA $y = \operatorname{sen} x$,
DEPOIS DESENHA RETAS
VERTICAIS EM $x=0$ E
$x = \pi/2$...



$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$: "A ÁREA
SOB A CURVA
f(x) ENTRE
x=a E x=b"
[DEFINIDA]
OU: "A INTEGRAL
DE f(x) ENTRE
x=a E x=b"

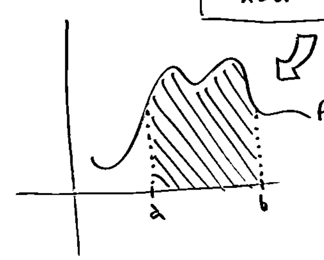
OBS: ÁREA SOB UMA CURVA
É DIFERENTE DE ÁREA
ENTRE UMA CURVA E O
EIXO HORIZONTAL

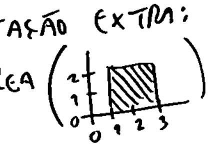
ÁREA SOB () = 0

ÁREA ENTRE... () = 4

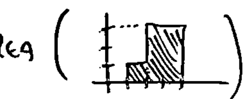
$\boxed{\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx}$ $\xRightarrow{\text{RESULTADO}}$ NÚMERO!

⇩ REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

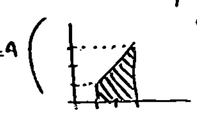


NOTAÇÃO EXTRA:
ÁREA ()

EXERCÍCIOS:

a) ÁREA ()

b) ÁREA ()

c) ÁREA ()

d) $\int_{x=1}^{x=4} 3 \, dx$

e) $\int_{x=0}^{x=3} x \, dx$

f) $\int_{x=0}^{x=3} 4-x \, dx$ f') $\int_{x=0}^{x=3} 4+x \, dx$

g) $\int_{x=0}^{x=3} 3-x \, dx$ g') $\int_{x=0}^{x=3} 3+x \, dx$

h) $\int_{x=0}^{x=3} 2-x \, dx$ h') $\int_{x=0}^{x=3} 2+x \, dx$

i) IDEM COM 1−x i') $\int_{x=0}^{x=3} 1+x \, dx$

C2 14/AGO/2019

TURMA PEQUENA

HOJE: INTRODUÇÃO
- AO CURSO
- A EDOs
- A INTEGRAIS

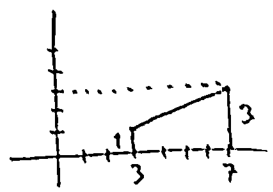
A PÁGINA DO CURSO É:
http://angg.twu.net/ (ALGUMA COISA).
O TRUQUE PRA CHEGAR LÁ É:
PROCURE POR "EDUARDO OCHS"
NO GOOGLE, VÁ PRA QUALQUER
SUBPÁGINA DO angg.twu.net
E CLIQUE EM "C2" NA BARRA
DE NAVEGAÇÃO.

TRUQUE:
ÁREA DE TRAPÉZIOS

h = ALTURA MENOR

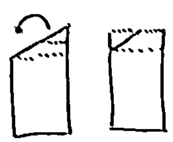
H = ALTURA MAIOR

LARGURA DA BASE: $b-a$



ÁREA: MÉDIA DAS ALTURAS · LARGURA DA BASE

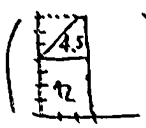
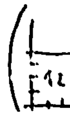
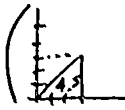
$= \left(\frac{1+3}{2}\right)\cdot(7-3)$

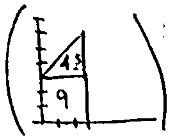


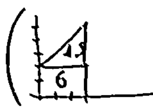
← ESSA ALTURA É A MÉDIA ENTRE h E H!

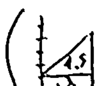
$\frac{h+H}{2}$

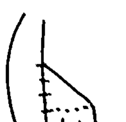
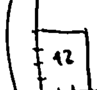
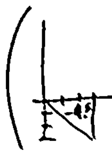
TEM UM PADRÃO
NAS RESPOSTAS DOS
EXERCÍCIOS f' ATÉ i'...

f': ÁREA () = ÁREA () + ÁREA () $= \int_{x=0}^{x=3} 4\,dx + \int_{x=0}^{x=3} x\,dx$

g': ÁREA ()

h': ÁREA ()

i': ÁREA ()

F: ÁREA () = ÁREA () + ÁREA ()

$\int_{x=0}^{x=3} 4-x\,dx = \int_{x=0}^{x=3} 4\,dx + \int_{x=0}^{x=3} -x\,dx$

OBS: $\int_{x=0}^{x=3} -x\,dx = -\int_{x=0}^{x=3} x\,dx$

ISTO SUGERE QUE:

$\int_{x=a}^{x=b} f(x)+g(x)\,dx$

$\overset{(*)}{=} \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx + \int_{x=a}^{x=b} g(x)\,dx$

OBS: A "ÁREA ENTRE A CURVA E O EIXO HORIZONTAL" NÃO TEM ESSA PROPRIEDADE!

C2 15/ago/2019

TURMA GRANDE

HOJE: INTRODUÇÃO
- AO CURSO ← PÁGINA: http://angg.twu.net/2019.2.html
- A EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
- A INTEGRAIS
- MUDAR O HORÁRIO DE TERÇA

OU: GOOGLEM POR EDUARDO OCHS, ENTRE EM QUALQUER SUBPÁGINA DO http://angg.twu.net/, CLIQUE EM "C2" NA BARRA DE NAVEGAÇÃO.

AVISO: A GENTE VAI USAR DERIVADA À BEÇA!

O CURSO TEM DUAS PARTES (E ALGUNS TÓPICOS EXTRAS):

1. INTEGRAÇÃO
2. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ("EDO"s)

	~~2ª~~	~~3ª~~	4ª	5ª	6ª
7					PODE PÉSSIMO
9		!!			PODE
11			C2 OUTRA	C2	C2 OUTRA
13				C3	C3
14					
16					
18					

EDO: EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORDINÁRIA –
O "ORDINÁRIA" DIFERENCIA EDOs DE EDPs – ~~EQUAÇÕES DIFERENCIAIS~~ PARCIAIS, QUE SÃO BEM MAIS COMPLICADAS...

LEMBRE QUE EM "EQUAÇÕES DE 2º GRAU" O "DE 2º GRAU" INDICA QUAL É A OPERAÇÃO "NOVA" QUE TORNA A EQUAÇÃO MAIS DIFÍCIL...

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS (EDOs):

$$f'(x) = 4x^3$$

QUAL É, ALIÁS, QUAIS SÃO OS $f(x)$ QUE OBEDECEM ISSO?

PRIMEIRO MÉTODO: CHUTAR E TESTAR.

TRUQUE: USEM UMA TABELA!

$f(x)$	$f'(x)$	$f'(x)=4x^3$
x	1	F
e^x	e^x	F

EXERCÍCIOS

a) $f'(x) = x^5$
b) $f'(x) = 3x$
c) $f'(x) = 2$
d) $f'(x) = 3x+2$
e) $f'(x) = e^{4x}$
f) $f'(x) = \operatorname{sen} x$
g) $f'(x) = \operatorname{sen} 4x$

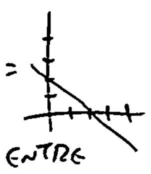
C2 15/AGO/2019

TURMA GRANDE

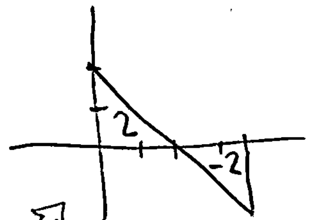
HOJE: INTRODUÇÃO
- AO CURSO
- A EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
- A INTEGRAIS
- MUDAR O HORÁRIO DE TERÇA

E QUANDO A $f(x)$ FICA NEGATIVA?...

A INTEGRAL MEDE A "ÁREA SOB A CURVA" E NÃO A "ÁREA ENTRE A CURVA E O EIXO HORIZONTAL"

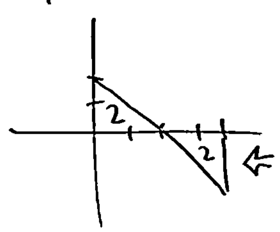
EXEMPLO: SE $f(x) = 2-x =$ 

A ÁREA SOB ESSA CURVA ENTRE $x=0$ E $x=4$ É ZERO,



PORQUE A PARTE ABAIXO DO EIXO HORIZONTAL CONTA NEGATIVAMENTE.

A ÁREA ENTRE A CURVA $y=2-x$ E O EIXO HORIZONTAL ENTRE $x=0$ E $x=4$ É 4:



A "ÁREA SOB A CURVA" (A INTEGRAL) TEM PROPRIEDADES MATEMÁTICAS BEM MELHORES... QUAIS?

EXERCÍCIO: CALCULE:

a) $\int_{x=1}^{x=4} 4-x \, dx$

b) $\int_{x=1}^{x=4} 3-x \, dx$

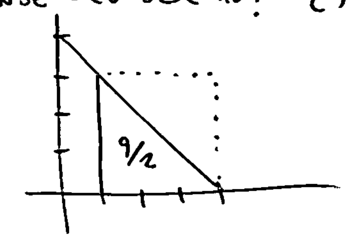
c) $\int_{x=1}^{x=4} 2-x \, dx$

d) $\int_{x=1}^{x=4} 1-x \, dx$

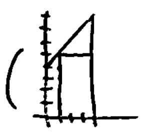
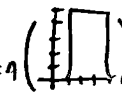
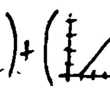
e) $\int_{x=1}^{x=4} 0-x \, dx$

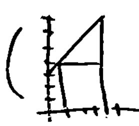
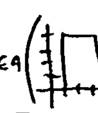
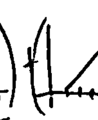
DICA:

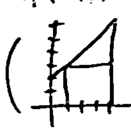
REPRESENTE GRAFICAMENTE CADA UMA DAS INTEGRAIS DO EXERCÍCIO E INDIQUE NO DESENHO A ÁREA DE CADA PEDAÇO. E VEJA SE O SEU VIZINHO ENTENDE SEU DESENHO!



VARIAÇÃO:

a') $\int_{x=1}^{x=4} 4+x \, dx$ = ÁREA() = ÁREA() + ()

b') $\int_{x=1}^{x=4} 3+x \, dx$ = ÁREA() = $\underbrace{\text{ÁREA}(\;) + (\;)}_{\int_{x=1}^{x=4} 4 \, dx + \int_{x=1}^{x=4} -1+x \, dx}$  

c') $\int_{x=1}^{x=4} 2+x \, dx$ = ÁREA()

d') $\int_{x=1}^{x=4} 1+x \, dx$

e') $\int_{x=1}^{x=4} 0+x \, dx$

$$\int_{x=1}^{x=4} 3+x \, dx = \int_{x=1}^{x=4} 4 \, dx + \int_{x=1}^{x=4} -1+x \, dx$$

DÁ PRA GENERALIZAR ISSO?

C2 15/AGO/2019

TURMA GRANDE

HOJE: INTRODUÇÃO
- AO CURSO
- À EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
- À INTEGRAIS
- MUDAR O HORÁRIO DE TERÇA

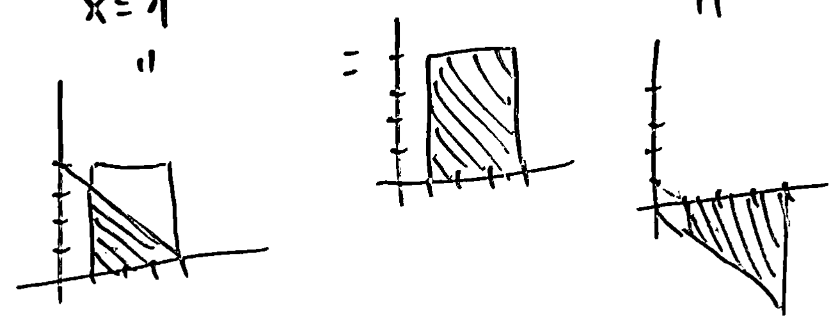
ISTO É VERDADE:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)+g(x)\,dx = \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx + \int_{x=a}^{x=b} g(x)\,dx$$

A GENTE VIU UM CASO EM QUE ISSO É FÁCIL DE VISUALIZAR...

NOS ITENS a, b, c, d, e, TEMOS:

$$\int_{x=1}^{x=4} 4-x\,dx = \int_{x=1}^{x=4} 4\,dx + \int_{x=1}^{x=4} -x\,dx$$



A "ÁREA SOB A CURVA" (A INTEGRAL) TEM PROPRIEDADES MATEMÁTICAS BEM MELHORES...

QUAIS?

EXERCÍCIO: CALCULE:

a) $\int_{x=1}^{x=4} 4-x\,dx$

b) $\int_{x=1}^{x=4} 3-x\,dx$

c) $\int_{x=1}^{x=4} 2-x\,dx$

d) $\int_{x=1}^{x=4} 1-x\,dx$

e) $\int_{x=1}^{x=4} 0-x\,dx$

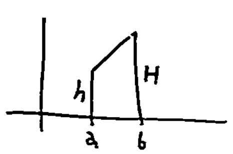
DICA:
O ~~...~~
GRAFI
CADA
DAS
DO E
E IN
DESE
ÁREA
CADA
E VE
SEU
ENTE

C2 16/Ago/2019

TURMA PEQUENA

HOJE: ÁREAS COMO SOMATÓRIOS! OU MELHOR: COMO VISUALIZAR CERTOS SOMATÓRIOS!

NO FINAL DA AULA PASSADA VIMOS QUE DÁ PRA CALCULAR A ÁREA DE UM TRAPÉZIO ASSIM:



h: ALTURA MENOR

H: ALTURA MAIOR

b-a: LARGURA DA BASE

$\frac{h+H}{2}$: MÉDIA DAS ALTURAS

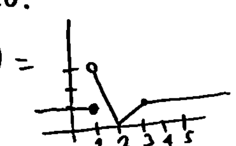
ÁREA: $\frac{h+H}{2}(b-a)$

$\leftarrow \frac{h+H}{2}$

COM ISSO A GENTE SABE CALCULAR INTEGRAIS DE VÁRIAS FUNÇÕES... DE TODAS AS FUNÇÕES CUJOS GRÁFICOS SÃO FORMADOS POR SEGMENTOS DE RETAS...

EXEMPLO:

$f(x) =$



$$= \begin{cases} 1 & \text{QUANDO } x \leq 1 \\ 6-3x & \text{QUANDO } 1 < x \leq 2 \\ -2+x & \text{QUANDO } 2 < x \leq 3 \\ 1 & \text{QUANDO } 3 < x \end{cases}$$

EXERCÍCIOS: QUANTO É:

a) $f(5)$
b) $f(3)$
c) $f(1.5)$
d) $f(1.1)$
e) $f(2.5)$
f) $f(2)$
g) $\displaystyle\int_{x=1.1}^{x=4} f(x)\,dx$

$$= \frac{f(1.1)+f(2)}{2}(2-1.1) + \frac{f(2)+f(3)}{2}(3-2) + 1(4-3)$$

OBS: NO FINAL DA AULA PASSADA VIMOS QUE:

$$\int_{x=1}^{x=4} 3-x\,dx = \int_{x=1}^{x=4} 3\,dx + \int_{x=1}^{x=4} -x\,dx$$

AGORA TEMOS:

$$\int_{x=1.1}^{x=4} f(x)dx = \int_{x=1.1}^{x=2} f(x)dx + \int_{x=2}^{x=3} f(x)\,dx + \int_{x=3}^{x=4} f(x)\,dx$$

VERSÃO GERAL:

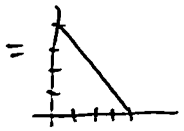
$$\int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx = \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx + \int_{x=b}^{x=c} f(x)\,dx$$

O QUE ACONTECE QUANDO O INTERVALO ESTÁ "NA ORDEM ERRADA"? ATÉ AGORA SEMPRE TIVEMOS $\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx$ COM $a \leq b$...

"ÁREA SOB CURVA" É MELHOR QUE "ÁREA ENTRE CURVA E EIXO HORIZONTAL" PORQUE "ÁREA SOB CURVA" OBEDECE ESSA PROPRIEDADE.

EXEMPLO:

$f(x) = 4-x =$



$\int_{x=0}^{x=3} f(x)\,dx =$

$$\int_{x=0}^{x=3} f(x)\,dx + \underbrace{\int_{x=3}^{x=4} f(x)\,dx}_{\text{FÁCIL } (=0.5)} = \underbrace{\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx}_{\text{FÁCIL } (=8)}$$

$$\underbrace{\int_{x=0}^{x=3} f(x)\,dx}_{7.5} = \underbrace{\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx}_{8} - \underbrace{\int_{x=3}^{x=4} f(x)\,dx}_{0.5}$$

$$= \underbrace{\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx}_{8} + \underbrace{\int_{x=4}^{x=3} f(x)\,dx}_{-0.5}$$

TEMOS QUE TER

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = -\int_{x=b}^{x=a} f(x)\,dx \quad !$$

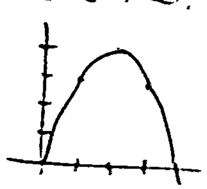
C2 16/ago/2019

Turma pequena

Hoje: áreas como somatórios! Ou melhor: como visualizar certos somatórios!

Como é que a gente calcula integrais de "f"s mais complicadas?

Exemplo:



$f(x) = 4-(x-2)^2$ minha parábola preferida para exemplos de C2!

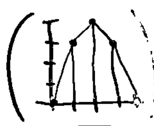
A partir de agora $f(x) = 4-(x-2)^2$ (até o final da aula)

Como calcular $\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx$?

Com o que a gente sabe até agora não dá!!!

Mas a gente pode calcular aproximações...

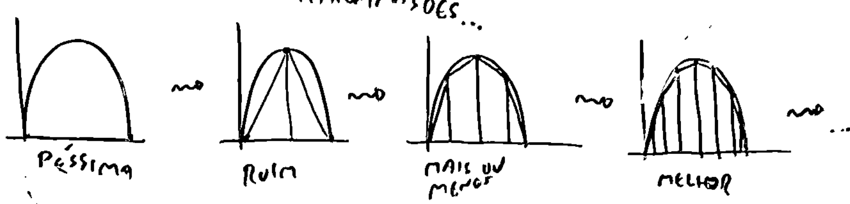
Por exemplo:

Área ()

$$= \boxed{\frac{f(0)+f(1)}{2}(1-0) + \frac{f(1)+f(2)}{2}(2-1) + \frac{f(3)+f(2)}{2}(3-2) + \frac{f(4)+f(3)}{2}(4-3)} \quad (★)$$

$$= 1.5 + 3.5 + 3.5 + 1.5$$

A gente vai definir a integral como o limite dessas aproximações...



Agora a gente vai ter que aprender a visualizar somatórios...

Obs: isso aqui pode ser escrito como:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{4} \frac{f(i-1)+f(i)}{2}(i-(i-1))} \quad (★★)$$

Repare que dá pra 'expandir' a (★)... vira:

$$\boxed{\frac{0+3}{2}(1-0) + \frac{3+4}{2}(2-1) + \frac{4+3}{2}(3-2) + \frac{3+0}{2}(4-3)} \quad (★★★)$$

E isso pode virar:

$$\boxed{1.5\cdot 1 + 3.5\cdot 1 + 3.5\cdot 1 + 1.5\cdot 1} \quad (★★★★)$$

Só que a (★★★★) não tem uma interpretação gráfica fácil... A (★★★) tem, desde que eu estabeleça que cada $\frac{\alpha+\beta}{2}(\gamma-\delta)$ vai ser interpretada como trapézio,

E cada $\alpha(\beta-\gamma)$ vai ser interpretada como retângulo.

altura esq

altura dir

$$\frac{\alpha+\beta}{2}(\gamma-\delta)$$

extremidade direita do intervalo

extremidade esquerda

altura do retângulo

$$\alpha(\beta-\gamma)$$

extr dir

extr esq

Exercício:
Represente graficamente:

(a) $\frac{2+5}{2}(3-1)$

(b) $4(3-1)$

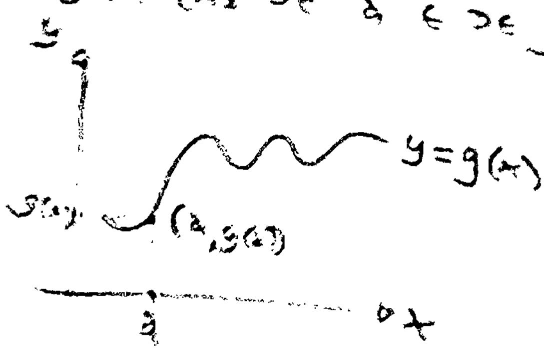
(c) $4(3-1)+\frac{4+1}{2}(6-3)$

C2 16/ago/2019

Turma pequena

Hoje: áreas como somatórios! Ou melhor: como visualizar certos somatórios!

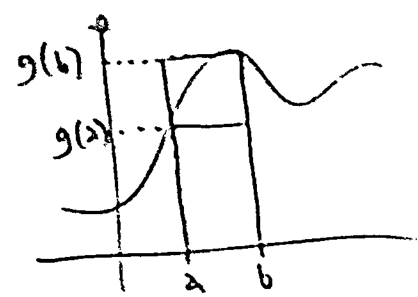
Lembrem que a gente sabe representar graficamente $g(a)$ mesmo quando a gente só tem as representações gráficas de a e de g...



Então a gente sabe representar graficamente coisas como

$g(a)(b-a)$ e

$g(b)(b-a)$...



Exercício: Represente graficamente:

(a) $f(0.5)(1-0.5)$

(b) $f(1.5)(1.5-1)$

(c) $\frac{f(2.5)+f(3.5)}{2}(3.5-2.5)$

Agora sejam

$a_0 = 0.5$,

$a_1 = 1.0$,

$a_2 = 2.5$,

$a_3 = 3.5$.

[illegible] nte graficamente:

(a) $f(a_0)(a_1-a_0)$
$+f(a_1)(a_2-a_1)$
$+f(a_2)(a_3-a_2)$

(b) $f(a_1)(a_2-a_1)$
$+f(a_2)(a_3-a_2)$
$+f(a_3)(a_3-a_2)$

(c) $\sum_{i=1}^{3} f(a_i)(a_i-a_{i-1})$

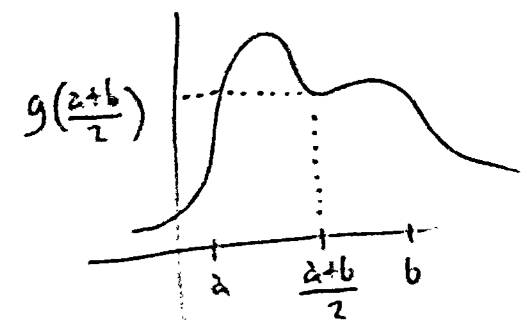
(d) $\sum_{i=1}^{2} f(a_{i-1})(a_i-a_{i-1})$

Aqui é 2 mesmo.

(e) $f\left(\frac{a_0+a_1}{2}\right)(a_1-a_0)$

(f) $\sum_{i=1}^{3} f\left(\frac{a_i+a_{i-1}}{2}\right)(a_i-a_{i-1})$

...e a gente também consegue representar graficamente $\frac{a+b}{2}$ e $g\left(\frac{a+b}{2}\right)$...

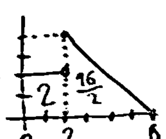


C2 22/AGO/2019
TURMA GRANDE (E1)

NA AULA PASSADA NÓS VIMOS:

- QUE $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ É A ÁREA SOB A CURVA DE $f(x)$ ENTRE $x=a$ E $x=b$
- COMO CALCULAR INTEGRAIS DEFINIDAS — I.E., $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ — DE FUNÇÕES CUJOS GRÁFICOS ERAM FORMADOS POR SEGMENTOS DE RETAS

EX ⇒ $f(x) =$



$$\int_{x=0}^{x=6} f(x)\,dx = 10$$

- ALGUMAS PROPRIEDADES:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)+g(x)\,dx = \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx + \int_{x=a}^{x=b} g(x)\,dx$$

$$\int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx = \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx + \int_{x=b}^{x=c} f(x)\,dx$$

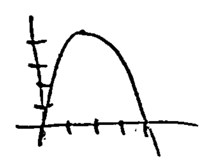
$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = -\int_{x=b}^{x=a} f(x)\,dx$$

HOJE NÓS VAMOS COMEÇAR A VER COMO INTEGRAR (ISTO É, CALCULAR ÁREAS DE) FIGURAS MAIS COMPLICADAS...

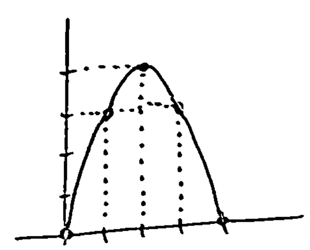
A DEFINIÇÃO "CERTA" É COMPLICADA — E ENVOLVE UM LIMITE COMPLICADO.

MINHA FUNÇÃO-EXEMPLO PREFERIDA PRA ESTA PARTE DO CURSO É:

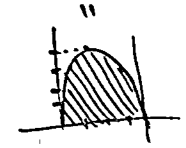
$$f(x) = 4 - (x-2)^2$$



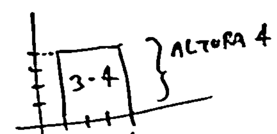
$f(2) = 4$
$f(1) = 3$
$f(3) = 3$
$f(0) = 0$
$f(4) = 0$

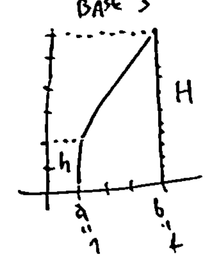


VAMOS TENTAR CONSEGUIR APROXIMAÇÕES PRA $\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx$...



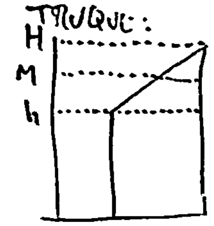
LEMBREM QUE A GENTE SABE CALCULAR ÁREAS DE RETÂNGULOS E TRAPÉZIOS...

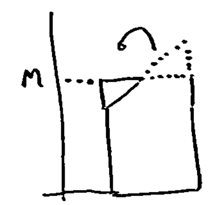




A BASE DELE É O INTERVALO ENTRE 1 E 4,
A ALTURA MENOR DELE É $h=2$
A ALTURA MAIOR É $H=7$.

TRUQUE:

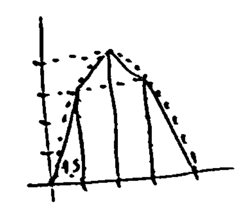




$M = \frac{h+H}{2}$ (MÉDIA)

A ÁREA DO TRAPÉZIO COM BASE $(b-a)$ E ALTURAS h E H É $\frac{h+H}{2}\cdot(b-a)$

VAMOS TENTAR CALCULAR UMA PRIMEIRA APROXIMAÇÃO PRA $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$:



AS NOSSAS APROXIMAÇÕES PRA $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ VÃO SER SOMAS DE RETÂNGULOS OU SOMAS DE TRAPÉZIOS...

A GENTE PRECISA SER CAPAZ DE VISUALIZAR ESSAS SOMAS — ISTO É, A PRECISA SER CAPAZ DE INTERPRETAR COISAS COMO

$$\sum_{i=1}^{N} f(a_i)(a_i - a_{i-1})$$

COMO FIGURAS.

TRUQUE (GAMBIARRA!)
A GENTE VAI INTERPRETAR EXPRESSÕES COMO

$\alpha(\beta - \gamma)$

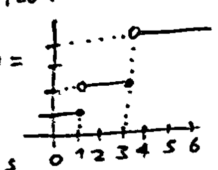
γ — EXTREMIDADE ESQUERDA DA BASE
β — EXTREMIDADE DIREITA
α — ALTURA

COMO RETÂNGULOS...

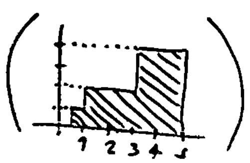
C2 22/AGO/2019
TURMA GRANDE (E1)

EXEMPLO:

$g(x) =$



$$\int_{x=0.5}^{x=5} g(x)\,dx =$$

ÁREA () =

$1\cdot(1-0.5)+2(3-1)+4(5-3) =$ ⇐ ESSA EXPRESSÃO TEM UMA INTERPRETAÇÃO GRÁFICA CLARA

$1\cdot 0.5 + 2\cdot 2 + 4\cdot 2 =$ ⇐ MAS ESSAS NÃO!

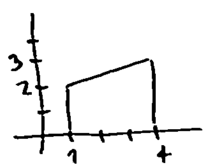
$0.5 + 4 + 8 =$

12.5

E PRA TRAPÉZIOS:

$$\frac{\alpha+\beta}{2}(\gamma-\delta)$$

- δ — EXTR. ESQ.
- γ — EXTR. DIR.
- β — ALTURA DIREITA
- α — ALTURA ESQUERDA



$$= \frac{2+3}{2}(4-1)$$

EXERCÍCIOS:

1) REPRESENTE GRAFICAMENTE:

a) $2\cdot(4-1)$

b) $3\cdot(5-4)$

c) $2\cdot(4-1)+3\cdot(5-4)$

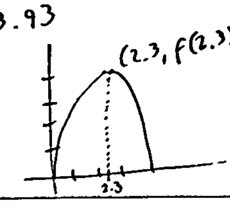
d) $\frac{5+2}{2}(4-1)+3\cdot(5-4)$

LEMBRE QUE:
$f(x) = 4-(x-2)^2$

TEM DOIS JEITOS DA GENTE DESENHAR O PONTO $(2.3, f(2.3))$...

JEITO BURRO:
$$f(2.3) = 4-(2.3-2)^2 = 4-(0.3)^2 = 4-0.09 = 3.93$$

JEITO RÁPIDO:



2) REPRESENTE GRAFICAMENTE
$f(a_1)\cdot(a_1-a_0)+f(a_2)\cdot(a_2-a_1)$
EM CADA UM DOS CASOS ABAIXO:

a) $a_0=0,\ a_1=1,\ a_2=2$

b) $a_0=0.5,\ a_1=1,\ a_2=2.5$

3) REPRESENTE GRAFICAMENTE
$f(a_0)\cdot(a_1-a_0)+f(a_1)\cdot(a_2-a_1)$
EM CADA UM DOS CASOS ABAIXO:

a) $a_0=0,\ a_1=1,\ a_2=2$

b) $a_0=0.5,\ a_1=1,\ a_2=2.5$

4) REPRESENTE GRAFICAMENTE
$\sum_{i=1}^{N} f(a_i)\cdot(a_i-a_{i-1})$
EM CADA UM DOS CASOS ABAIXO:

a) $N=3,\ a_0=0,\ a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=2.5$

b) $N=4,\ a_0=0,\ a_1=0.5,\ a_2=1.0,\ a_3=1.5,\ a_4=2.0$

5) REPRESENTE GRAFICAMENTE
$\sum_{i=1}^{N} f(a_{i-1})\cdot(a_i-a_{i-1})$
EM CADA UM DOS CASOS ABAIXO:

a) (IGUAL AO ITEM a DA 4)

b) (IGUAL AO ITEM b DA 4)

PRÓXIMA IDÉIA:
PARTIÇÕES (DE INTERVALOS).

EXEMPLO: $P = \{0.5, 2, 2.5, 3\}$

UMA PARTIÇÃO P É UM SUBCONJUNTO FINITO DE $\mathbb{R}$ COM PELO MENOS UM ELEMENTO.

A PARTIÇÃO P ACIMA — REPARE QUE ELA TEM 4 PONTOS — VAI SER INTERPRETADA COMO UMA DIVISÃO DO INTERVALO $[0.5, 3]$ EM 3 SUBINTERVALOS: $[0.5, 2]$, (1º), $[2, 2.5]$, (2º), $[2.5, 3]$ (3º)

$4-1$

C2 22/AGO/2019
TURMA GRANDE (E1)

Um pouco mais formalmente,
a partição $P = \{0.5, 2, 2.5, 3\}$
é um conjunto de 4 pontos
que vai ser interpretado
como um modo de dividir o
intervalo $I = [0.5, 3]$
em 3 subintervalos:

$$I_1 = [0.5, 2],$$
$$I_2 = [2, 2.5],$$
$$I_3 = [2.5, 3]\ldots$$

Note que cada subintervalo
tem um ponto em comum
com o seguinte.

(6) Exercício:
Para cada uma das partições
abaixo diga o "N" dela —
que é o número de subintervalos
dela, que vai ser o número
de pontos dela menos 1 — e
diga quem são I e $I_1, I_2, \ldots, I_N$.

(a) $P = \{2, 2.5, 4, 6\}$

$\Rightarrow N = 3,$

$I = [2, 6],$

$I_1 = [2, 2.5],$

$I_2 = [2.5, 4],$

$I_3 = [4, 6].$

(b) $P = \{1.5, 2, 2.5, 5, 6\}$

C2 23/AGO/2019
TURMA GRANDE

A AULA DE HOJE VAI SER SOBRE:

- O FINAL DA DEFINIÇÃO DE PARTIÇÕES
- UM EXERCÍCIO MUITO GRANDE — QUE VAI ENSINAR VOCÊS A VISUALIZAREM VÁRIOS DOS MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO QUE VÃO APARECER NUMA MATÉRIA CHAMADA MÉTODOS-ALGUMA-COISA, E VÃO PREPARAR VOCÊS PRA ENTENDEREM O "MÉTODO DO INF" E O "MÉTODO DO SUP"...

AVISO: DAQUI A ALGUMAS AULAS — MAS NUMA QUINTA — VOCÊS VÃO FAZER UM MINI-TESTE SOBRE ISSO NOS ÚLTIMOS 15 MINUTOS DA AULA.

PARTIÇÕES

EXEMPLO:

SE $P = \{0.5, 1.5, 2.5, 6\}$
ENTÃO P TEM 4 PONTOS
E 3 SUBINTERVALOS,
E P DIVIDE O INTERVALO
$I = [0.5, 6]$
EM SUBINTERVALOS
$I_1 = [0.5, 1.5]$,
$I_2 = [1.5, 2.5]$,
$I_3 = [2.5, 6]$.

ALÉM DISSO ESSA P DEFINE OS VALORES DE $a, b, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$:

$[a,b] = I \Rightarrow a = 0.5,\ b = 6$
$[a_1,b_1] = I_1 \Rightarrow a_1 = 0.5,\ b_1 = 1.5,$
$[a_2,b_2] = I_2 \Rightarrow a_2 = 1.5,\ b_2 = 2.5,$
$[a_3,b_3] = I_3 \Rightarrow a_3 = 2.5,\ b_3 = 6$

A GENTE VAI ORGANIZAR ESSES VALORES NUMA TABELA.

SE $P = \{0.5, 1.5, 2.5, 6\}$
ENTÃO $N = 3$, $a = 0.5$, $b = 6$, E:

i	I_i	a_i	b_i
1	[0.5, 1.5]	0.5	1.5
2	[1.5, 2.5]	1.5	2.5
3	[2.5, 6]	2.5	6

REPARE QUE ASSIM QUE DIZEMOS "$P = \{0.5, 1.5, 2.5, 6\}$" UM MONTE DE COISAS FICAM AUTOMATICAMENTE DEFINIDAS:
$N, a, b, I_1, \ldots, I_N, a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N$.

(1) EXERCÍCIO:
PARA CADA UMA DAS PARTIÇÕES ABAIXO DIGA QUEM SÃO O "N", O "a" E O "b" DELA E MONTE A TABELA.

(a) $P = \{2, 3, 4\}$
(b) $P = \{2, 2.5, 3, 3.5, 4\}$
(b) $\{0, 1, 2, 3, 4\}$
(c) $\{0, 2, 4\}$
(d) $\{0, 1, 3, 4\}$
(e) $\{0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4\}$

VOLTANDO AOS "MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO"...

CADA UM VAI TER UM NOME E UMA FÓRMULA (COMO SOMATÓRIO).

$$[L] = \sum_{i=1}^{N} f(a_i)(b_i - a_i)$$

$$[R] = \sum_{i=1}^{N} f(b_i)(b_i - a_i)$$

$$[\min] = \sum_{i=1}^{N} \min(f(a_i), f(b_i))(b_i - a_i)$$

$$[\max] = \sum_{i=1}^{N} \max(f(a_i), f(b_i))(b_i - a_i)$$

$$[M] = \sum_{i=1}^{N} f\left(\frac{a_i + b_i}{2}\right)(b_i - a_i)$$

$$[TRAP] = \sum_{i=1}^{N} \frac{f(a_i) + f(b_i)}{2}(b_i - a_i)$$

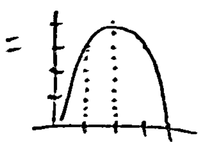
(2) EXERCÍCIO:
REPRESENTE GRAFICAMENTE $[L], [R], [\min], [\max], [M], [TRAP]$ PARA CADA UMA DAS PARTIÇÕES ABAIXO:

(a) $P = \{2, 3\}$

$$\underbrace{\max(f(\underbrace{a_1}_{2}), f(\underbrace{b_1}_{3}))}_{4}$$

$\min(3, 1) = 1$
$\min(1, 3) = 1$
$\max(2, 8) = 8$

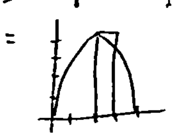
LEMBREM QUE

$f(x) =$ 

DIGAMOS QUE $P = \{2, 3\}$
ELA TEM $N = 1$
E "DIVIDE" $I = [2, 3]$
EM UM SUBINTERVALO SÓ:
$I_1 = [2, 3]$

OBS: $a = 2$, $b = 3$
$a_1 = 2$, $b_1 = 3$

i	I_i	a_i	b_i
1	[2,3]	2	3

ENTÃO $[L] = \sum_{i=1}^{N} f(a_i)(b_i - a_i)$
$= f(a_1)(b_1 - a_1)$
$= f(2)(3-2)$
$=$ 

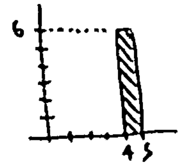
C2 23/AGO/2019
TURMA PEQUENA

Hoje:
- PARTIÇÕES
- COMO VISUALIZAR CERTOS SOMATÓRIOS (EXERCÍCIO MUITO GRANDE!!!)

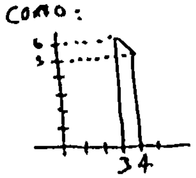
PRA GENTE CONSEGUIR ENTENDER A DEFINIÇÃO "CERTA" DA INTEGRAL A GENTE VAI PRECISAR ENTENDER O QUE QUEREM DIZER CERTOS SOMATÓRIOS... GRAFICAMENTE!

OS QUE A GENTE VAI VER HOJE VOCÊ VAI VER DE NOVO DEPOIS NUMA OUTRA MATÉRIA - UMA QUE ANTIGAMENTE SE CHAMAVA "MÉTODOS NUMÉRICOS" E ACHO QUE AGORA SE CHAMA "MÉTODOS COMPUTACIONAIS".

LEMBRE QUE
$6\cdot(5-4)$
VAI SER INTERPRETADO COMO:



E $\frac{6+5}{2}\cdot(4-3)$
VAI SER INTERPRETADO COMO:



MÉTODOS

$$[L] = \sum_{i=1}^{N} f(a_i)(b_i-a_i)$$
$$[R] = \sum_{i=1}^{N} f(b_i)(b_i-a_i)$$
$$[min] = \sum_{i=1}^{N} \min(f(a_i),f(b_i))(b_i-a_i)$$
$$[max] = \sum_{i=1}^{N} \max(f(a_i),f(b_i))(b_i-a_i)$$
$$[M] = \sum_{i=1}^{N} f\left(\frac{a_i+b_i}{2}\right)(b_i-a_i)$$
$$[TRAP] = \sum_{i=1}^{N} \frac{f(a_i)+f(b_i)}{2}(b_i-a_i)$$

PARTIÇÕES

DEF: UMA PARTIÇÃO É UM SUBCONJUNTO FINITO DE $\mathbb{R}$ COM PELO MENOS UM ELEMENTO.

EXEMPLO:
$P=\{4,5,7,9,10\}$
REPARE QUE ELA TEM 5 PONTOS (A GENTE VAI ESCREVÊ-LOS EM ORDEM).
ELA "É" UM JEITO DA GENTE DIVIDIR O INTERVALO $[4,10]=[a,b]=I$
EM 4 SUBINTERVALOS:

$[4,5]=[a_1,b_1]=I_1$
$[5,7]=[a_2,b_2]=I_2$
$[7,9]=[a_3,b_3]=I_3$
$[9,10]=[a_4,b_4]=I_4$

N É O NÚMERO DE SUBINTERVALOS - O NÚMERO DE PONTOS EM P MENOS 1.

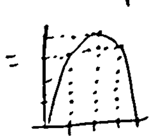
DÁ PRA ARRUMAR ESSES DADOS NUMA TABELA...
$P=\{4,5,7,9,10\}$
$\Rightarrow N=4,\ I=[a,b]=[4,10]$

i	I_i	a_i	b_i
1	[4,5]	4	5
2	[5,7]	5	7
3	[7,9]	7	9
4	[9,10]	9	10

1 Exercício:
PARA CADA UMA DAS PARTIÇÕES ABAIXO DIGA QUEM SÃO O "N", O "I", O "a" E O "b" DELA E MONTE A TABELA.
a) $P=\{0.5, 1.5, 4\}$
b) $P=\{1.2, 1.3, 1.4, 5, 6\}$

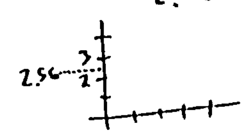
LEMBRE QUE ESTAMOS USANDO ESTA f: $f(x)=4-(x-2)^2$

$f(x)=$

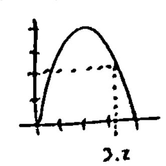


LEMBRE QUE EXISTE UM JEITO BURRO E UM JEITO RÁPIDO DE REPRESENTAR GRAFICAMENTE
$f(3.2)$...

JEITO BURRO:
$$\begin{aligned} f(3.2) &= 4-(2-3.2)^2 \\ &= 4-(-1.2)^2 \\ &= 4-1.44 \\ &= 2.56 \end{aligned}$$



JEITO RÁPIDO:



DICA: $\min(f(\underbrace{a_1}_{2}), f(\underbrace{a_2}_{3}))$

2 Exercício:
(VAI TER UM MINI-TESTE SOBRE ISSO!)
REPRESENTE GRAFICAMENTE [L], [R], [min], [max], [M] E [TRAP] PARA CADA UMA DAS PARTIÇÕES ABAIXO.
a) $P=\{2,3\}$
b) $P=\{0,1,2,3,4\}$
c) $P=\{0,2,4\}$
d) $P=\{0,1,3,4\}$
e) $P=\{0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4\}$

← DICA: FAÇAM GRANDE NO PAPEL SEM PAUTA!

DICA:
CONFIRA 2c[min] E 2c[max] COM SEUS VIZINHOS.

C2 28/AGO/2019

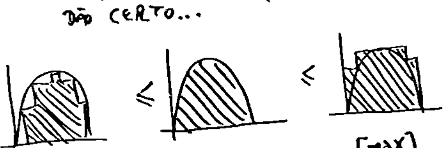
TURMA PEQUENA

Hoje:
- Dois métodos novos: [INF] e [SUP]
- $\underline{\int}_P$, $\overline{\int}_P$, $\underline{\int}$, $\overline{\int}$
- Funções integráveis
- Integral
- TFC1 e TFC2
- Exercícios do APEX Calculus (que faz essa parte do curso numa ordem totalmente diferente da nossa)

Nossa função preferida (por enquanto):

$$f(x) = 4-(x-2)^2 = \cancel{4}-(x^2-4x+\cancel{4}) = -x^2+4x$$

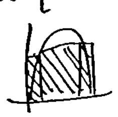
Lembrem que na aula passada a gente tentou calcular uma "aproximação por cima" e uma "aproximação por baixo" da área de $\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx$ e a gente viu que os métodos [max] e [min] nem sempre dão certo...



[min] pra alguma partição ‖? [max] pra alguma partição.

O que deu errado?
Se $P=\{0,1,3,4\}$
então a representação gráfica de $[\max] = \sum_{i=1}^{N} \max(f(a_i), f(b_i))(b_i - a_i)$

Era:



⇐ No intervalo do meio temos $\max(f(a_2), f(b_2)) = 3$, que está abaixo da parábola!

Como consertar isso?

max e min só se aplicam a conjuntos finitos...

$\max(3,20) = 20$

$\max(3,20,4,42) = 42$

Vamos definir uma função "sup" que recebe um conjunto de números e retorna o "máximo" dele...

↑ entre aspas! Versão melhorada!

$\sup(\{3,20,4,42\}) = 42$

Obs: o "inf" vai ser o correspondente pro mínimo.

$\inf(\{3,20,4,42\}) = 3$

Só que inf e sup aceitam conjuntos infinitos...

$$\min\left(1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, \ldots\right) \overset{??}{=} 0$$

Idéia: o maior número que está "abaixo" de todos esses é o 0... só que

$$0 \notin \left\{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, \ldots\right\}$$

O inf tem uma definição formal complicada, mas (em português)

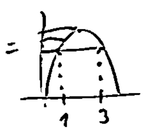
Se $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$
$\inf(A)$ é o maior número que é "≤" a todos os elementos de A...

$\inf(A) = 0 \notin A$

Sup é a mesma coisa, mas "pra cima".

Exemplo:
$\mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$
$\sup(\mathbb{N}) = +\infty$

Voltando pra algo mais gráfico...

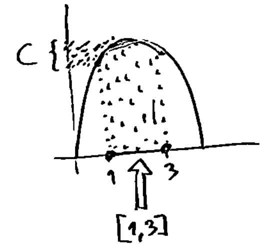
$f(x) =$ 

Sejam:
$I_2 = [1,3]$
$C = \{f(x) \mid x \in [1,3]\}$

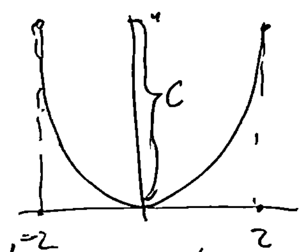
Repare que $f(1) \in C$, $f(2) \in C$, $f(3) \in C$, $f(1.1) \in C, \ldots$

Graficamente o C é a imagem do imagem do intervalo [1,3]...

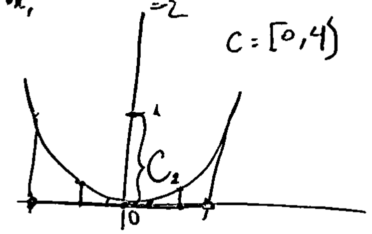
Pensem que o [1,3] está no eixo horizontal, e que C está no eixo vertical.

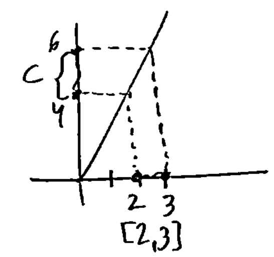


Exercício:
1. O que é $\{2x \mid x \in [2,3]\}$?
2. O que é $\{x^2 \mid x \in [-1,1]\}$?
3. O que é $\{x^2 \mid x \in (-2,2)\}$?



$C = [0,4)$





$\boxed{\text{C2 28/AGO/2019}}$

$\boxed{\text{TURMA PEQUENA}}$

Hoje:
- Dois métodos novos: [INF] e [SUP]
- $\int_P$, $\overline{\int}_P$, $\underline{\int}$, $\overline{\int}$
- Funções integráveis
- Integral
- TFC1 e TFC2
- Exercício do Apex Calculus (que faz essa parte do curso numa ordem totalmente diferente da nossa)

Nossa função preferida (por enquanto):

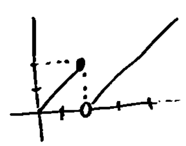
$f(x) = 4-(x-2)^2$
$= \cancel{4}-(x^2-4x+\cancel{4})$
$= -x^2+4x$

$[SUP] = \sum_{i=1}^{N} \sup\{f(x) \mid x\in[a_i,b_i]\}(b_i-a_i)$
$= \sum_{i=1}^{N}\left(\sup_{x\in[a_i,b_i]} f(x)\right)(b_i-a_i)$

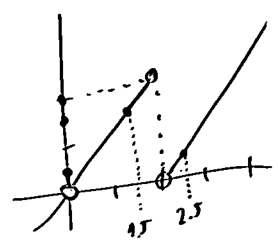
$[INF] = \sum_{i=1}^{N} \inf\{f(x) \mid x\in[a_i,b_i]\}(b_i-a_i)$
$= \sum_{i=1}^{N}\left(\inf_{x\in[a_i,b_i]} f(x)\right)(b_i-a_i)$

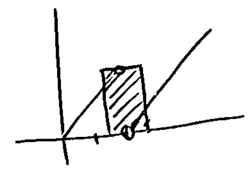
Esses métodos vão nos dar as aproximações por retângulos por cima e por baixo — mesmo em funções estranhas...

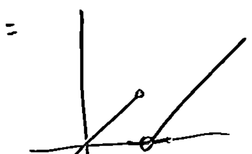
Exemplo: se $f(x) = \begin{cases} x & \text{quando } x\le 2 \\ x-2 & \text{quando } 2<x \end{cases}$

$f(x) =$ 

$I = [1.5, 2.5]$
$\{f(x) \mid x\in[1.5,2.5]\}$
$= (0, 0.5] \cup [1.5, 2]$



Nessa função ()
se $P=\{1.5, 2.5\}$
então $[SUP] =$ 

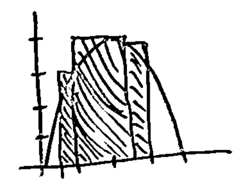
e $[INF] =$ 

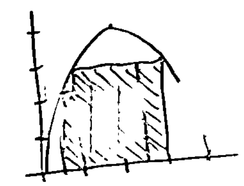
(um retângulo de altura zero).

Moral: [SUP] e [INF] são bem complicados formalmente mas bem simples graficamente...

Exercício:
Seja $f(x) =$ 

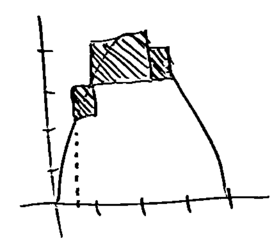
Represente graficamente:
(a) [SUP] para $P=\{0.5, 1, 2.5, 3\}$,
(b) [INF] para $P=\{0.5, 1, 2.5, 3\}$.

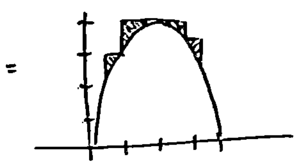
$[SUP] =$ 

$[INF] =$ 

...e agora a gente consegue fazer bons desenhos pra diferença entre duas áreas!

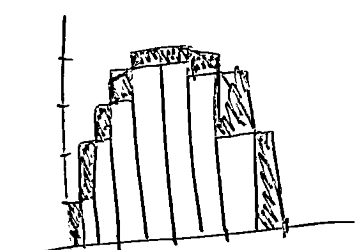
$[SUP]-[INF] =$



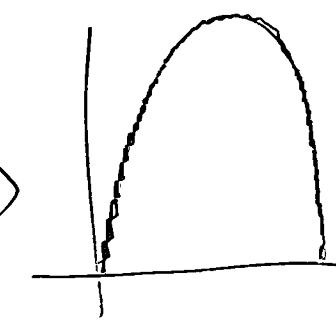
$[SUP] - \int_{x=0.5}^{x=3} f(x)\,dx =$ 

E também dá pra gente comparar duas partições...

$P_1 = \{0, 4\}$
$P_2 = \{0, 1, 3, 4\}$
$P_3 = \{0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4\}$



O que acontece se a gente vai passando pra partições cada vez mais finas?



A área da diferença fica cada vez mais próxima de zero!

C2 28/AGO/2019

TURMA PEQUENA

Hoje:
- Dois métodos novos: [INF] e [SUP]
- $\underline{\int}_P$, $\overline{\int}_P$, $\underline{\int}$, $\overline{\int}$
- Funções integráveis
- Integral
- TFC1 e TFC2
- Exercícios do Apex Calculus (que faz essa parte do curso numa ordem totalmente diferente da nossa)

Nossa função preferida (por enquanto):

$f(x) = 4-(x-2)^2$
$= \cancel{4}-(x^2-4x+\cancel{4})$
$= -x^2+4x$

$P_1 = \{0,4\}$
$P_2 = \{0,1,3,4\}$
$P_3 = \{0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4\}$

São partições cada vez mais "finas" do intervalo $[0,4]$...

DEF: Digamos que P seja uma partição do intervalo $[a,b]$ e que $P_1, P_2, P_3, \ldots$ sejam partições cada vez mais finas do intervalo $[a,b]$. Então:

$\overline{\int}_P f(x)\,dx$ é a "aproximação por cima" usando a partição P

$\underline{\int}_P f(x)\,dx$ é a "aproximação por baixo" (idem).

OBS: $\overline{\int}_P f(x)\,dx = [SUP]$
$\underline{\int}_P f(x)\,dx = [INF]$

E se $P_1, P_2, P_3, \ldots$ são partições cada vez mais finas de $[a,b]$ então

$$\overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \lim_{i=1}^{\infty} \overline{\int}_{P_i} f(x)\,dx,$$

$$\underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \lim_{i=1}^{\infty} \underline{\int}_{P_i} f(x)\,dx$$

Porque tudo isso?

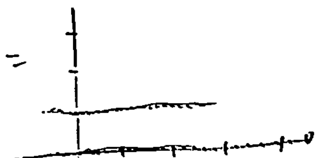
Da mesma forma que existem funções não-deriváveis existem funções não integráveis — as funções em que as aproximações da área delas por cima não ficam próximas das aproximações por baixo...

Exemplo:

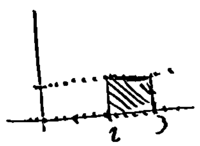
Seja $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

$g(1) = 0$
$g(0.01) = 0$
$g(-\frac{1}{123}) = 0$
$g(\pi) = 1$
$g(\sqrt{2}) = 1$
$g(3+\sqrt{2}) = 1$

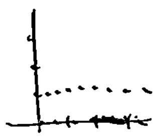
$g(x) =$



$\overline{\int}_{x=2}^{x=3} g(x)\,dx =$



$\underline{\int}_{x=2}^{x=3} g(x)\,dx =$



DEF: $f(x)$ é integrável no intervalo $[a,b]$ (ou: "$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ existe") quando $\overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$

Exemplo:
Toda função $f(x)$ contínua em $[a,b]$ é integrável! (porquê? Pensem em casa!)

Reparem que essa definição de integral nos diz como calcular uma integral fazendo infinitos passos!

Precisamos de truques melhores!

C2 28/ago/2019

TURMA PEQUENA

Hoje:

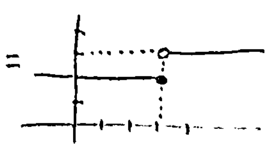
- Dois métodos novos: [INF] e [SUP]
- $\int_{-P}$, $\overline{\int_P}$, $\underline{\int}$, $\overline{\int}$
- Funções integráveis
- Integral
- TFC1 e TFC2
- Exercícios do Apex Calculus (que faz essa parte do curso numa ordem totalmente diferente da nossa)

Nossa função preferida (por enquanto):

$f(x) = 4-(x-2)^2$
$= \cancel{4}-(x^2-4x+\cancel{4})$
$= -x^2+4x$

Exemplo (que vai motivar alguns dos truques):

Se $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \leq 3, \\ 3 & \text{se } 3 < x. \end{cases}$

$f(x) =$ 

Exercício:

(a) $\int_{x=1}^{x=4} f(x)\,dx \Longrightarrow 2(3-1)+3(4-3)$

(b) $\int_{x=2}^{x=4} f(x)\,dx$

(c) $\int_{x=2}^{x=5} f(x)\,dx$

Digamos que ε seja maior que zero mas muito pequeno.

Represente graficamente e calcule:

(d) $\int_{x=1}^{x=5+\varepsilon} f(x)\,dx - \int_{x=1}^{x=5} f(x)\,dx$

(e) $\int_{x=1+\varepsilon}^{x=5} f(x)\,dx - \int_{x=1}^{x=5} f(x)\,dx$

Def: $F(a,b) = \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$

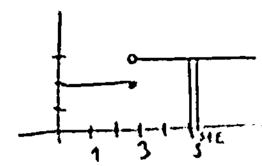
- Digamos que a está fixo... Por exemplo, a=1. Como é a função $F(1,b)$?

b	$F(1,b)$
2	2
3	4
4	7
5	10

A gente sabe calcular $F(1,b)$ pra cada b...

O que é $\frac{d}{db}F(1,b)$?

Aliás, o que é $\frac{F(1,5+\varepsilon)-F(1,5)}{\varepsilon}$?

$F(1,5+\varepsilon)-F(1,5) =$  $= 3\varepsilon$

$\frac{F(1,5+\varepsilon)-F(1,5)}{\varepsilon} = 3$

Como visualizar isso?

$\frac{3\cdot\varepsilon}{\varepsilon} = 3$, ou:

$\frac{\text{altura}\cdot\text{base}}{\text{base}} = \text{altura}$

Calcule:

(f) $\frac{F(1,4+\varepsilon)-F(1,4)}{\varepsilon} = 3$

(g) $\frac{F(1,2+\varepsilon)-F(1,2)}{\varepsilon} = 2$

Repare que se sabemos $F(1,b)$ pra todo valor de b a gente consegue calcular todas as expressões da forma $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$...

Exemplo: $\int_{x=5}^{x=6} f(x)\,dx = \int_{x=1}^{x=6} f(x)\,dx - \int_{x=1}^{x=5} f(x)\,dx$

C2 28/AGO/2019

TURMA PEQUENA

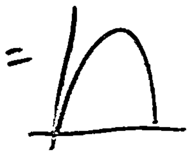
Hoje:

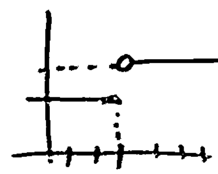
- Dois métodos novos: [INF] e [SUP]
- $\underline{\int}_P$, $\overline{\int}_P$, $\underline{\int}$, $\overline{\int}$
- Funções integráveis
- Integral
- TFC1 e TFC2
- Exercícios do Apex Calculus (que faz essa parte do curso numa ordem totalmente diferente da nossa)

Nossa função preferida (por enquanto):

$$f(x) = 4-(x-2)^2$$
$$= \cancel{4}-(x^2-4x+\cancel{4})$$
$$= -x^2+4x$$

Rearrumando:

$f(x) =$ 

$g(x) =$ 

$$\frac{\displaystyle\int_{x=1}^{x=b+\varepsilon} g(x)\,dx - \int_{x=1}^{x=b} g(x)\,dx}{\varepsilon} = g(b)$$

Def: $G(b) = \displaystyle\int_{x=1}^{x=b} g(x)\,dx$

Exemplos:
$$G(1)=0$$
$$G(2)=2$$
$$G(3)=4$$
$$G(5)=7$$

E essa função G pode ser usada pra calcular integrais...

Por exemplo, $\displaystyle\int_{x=5}^{x=6} g(x)\,dx = G(6)-G(5)$

Que propriedades essa G tem?

- $\dfrac{d}{db}G(b) = g(b)$

ou renomeando:

$$\frac{d}{dx}G(x) = g(x)$$

Chute:

Podemos obter $G(x)$ descobrindo uma função $G(x)$ que obedeça isto...

(isto funciona <u>quase</u> sempre!)

Idem pra $f(x)$...

Se encontrarmos $F(x)$ que obedece $F'(x) = f(x) = 4-(x-2)^2$

podemos calcular $\displaystyle\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\ \ \ \parallel$

desse jeito: $F(4)-F(0)$

C2 29/AGO/2019

TURMA GRANDE

HOJE:

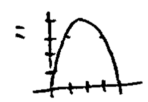
- AS COISAS QUE FALTAM PRA GENTE ENTENDER DIREITO COMO APROXIMAR ÁREAS POR RETÂNGULOS POR CIMA E POR BAIXO
- $\overline{\int}_P f(x)\,dx$, $\underline{\int}_P f(x)\,dx$, $\overline{\int} f(x)\,dx$, $\underline{\int} f(x)\,dx$
- FUNÇÕES INTEGRÁVEIS E NÃO-INTEGRÁVEIS
- PRIMEIROS TRUQUES PRA GENTE CALCULAR $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ SEM PRECISAR FAZER UM NÚMERO INFINITO DE OPERAÇÕES
- EXERCÍCIOS DO APEX CALCULUS

NA AULA PASSADA NÓS VIMOS QUE O MÉTODO [MAX] NEM SEMPRE FUNCIONA PRA ENCONTRAR UMA "APROXIMASÃO POR CIMA"...

QUANDO $f(x) = 4-(x-2)^2$ ⇐ NOSSO EXEMPLO PREFERIDO

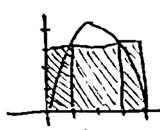
$= \cancel{4}-(x^2-4x+\cancel{4})$

$= -x^2+4x$

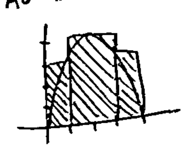
$=$ 

E $P=\{0,1,3,4\}$

A FÓRMULA DO [MAX] DÁ ESTES RETÂNGULOS AQUI:



AO INVÉS DISTO:



POR ISTO AQUI

$$[\max] = \sum_{i=1}^{N} \max(f(a_i), f(b_i))\,(b_i - a_i)$$

"NÃO ENXERGA" OS PONTOS EM $(1,3)$...

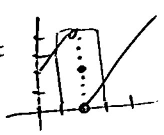
O JEITO DE CONSERTAR ISSO TEM UMA INTERPRETASÃO VISUAL FÁCIL, MAS TECNICAMENTE ELE É COMPLICADO...

OPERASÕES NOVAS:

"Inf" E "Sup"

"SUPREMO": GENERALIZA A IDÉIA DE "MÁXIMO"

"ÍNFIMO": GENERALIZA A IDÉIA DE MÍNIMO.

SEJA $g(x)=$ 

$P=\{0,1,3,4\}$

REPARE QUE NÃO EXISTE $x\in[1,3]$ COM $g(x)=4$!

UMA APROXIMASÃO POR RETÂNGULOS POR CIMA DARIA UM RETÂNGULO DE ALTURA 4 NO INTERVALO DO MEIO... E ESSE RETÂNGULO NÃO TOCARIA O GRÁFICO DA $g(x)$!

A ALTURA DESSE RETÂNGULO SERIA UMA ESPÉCIE DE MÁXIMO DAS ALTURAS EM $x\in[1,3]$... O "CONJUNTO DAS ALTURAS" NESSE INTERVALO É A IMAGEM DO INTERVALO...

$\{f(x) \mid x\in[1,3]\}$

QUE VAI DAR $(0,1]\cup\{2\}\cup[3,4)$

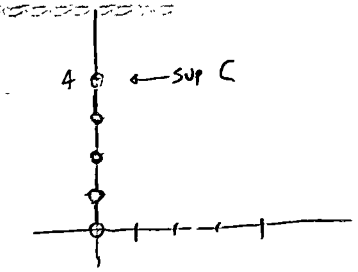
(ÉÉÉÉ! CONFIRA EM CASA!)

SEJA $C=(0,1]\cup\{2\}\cup[3,4)$

$$\left(C = f([1,3]) = \{f(x) \mid x\in[1,3]\}\right)$$

$\sup(C)=4$

VISUALMENTE:



FORMALMENTE (CURIOSIDADE!)

SE $A\subset\mathbb{R}$ (OU $A\subset\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$) O $\sup A$ É CALCULADO EM DOIS PASSOS: O CONJUNTO DOS "PONTOS À DIREITA" DE A É:

$D=\{x\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\} \mid \forall a\in A.\ a\le x\}$

E $\sup A$ É O MENOR ELEMENTO DE D — FORMALMENTE: $s=\sup A$ SE E SÓ SE $s\in D$ E $\forall d\in D.\ s\le d$.

...OU SEJA, A DEFINISÃO FORMAL É HORRÍVEL - MAS A GENTE SÓ QUER TRABALHAR COM A INTERPRETASÃO VISUAL DELA!

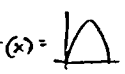
MÉTODOS NOVOS:

(LEMBREM QUE OS QUE A GENTE JÁ VIU SE CHAMAVAM [L], [R], [MIN], [MAX], [M], [TRAP])

$$[\inf] = \sum_{i=1}^{N} \inf(\{f(x) \mid x\in[a_i,b_i]\})\,(b_i-a_i)$$

$$[\sup] = \sum_{i=1}^{N} \sup(\{f(x) \mid x\in[a_i,b_i]\})\,(b_i-a_i)$$

EXERCÍCIO

USANDO A $f(x)=$ 

REPRESENTE GRAFICAMENTE [SUP] E [INF] PARA:

a) $P=\{1, 1.5, 3\}$

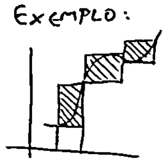
b) $P=\{1, 1.5, 3, 4\}$.

C2 29/AGO/2019
TURMA GRANDE

HOJE:

- AS COISAS QUE FALTAM PRA GENTE ENTENDER DIREITO COMO APROXIMAR ÁREAS POR RETÂNGULOS POR CIMA E POR BAIXO
- $\overline{\int_P} f(x)\,dx$, $\underline{\int_P} f(x)\,dx$, $\overline{\int} f(x)\,dx$, $\underline{\int} f(x)\,dx$
- FUNÇÕES INTEGRÁVEIS E NÃO-INTEGRÁVEIS
- PRIMEIROS TRUQUES PRA GENTE CALCULAR $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ SEM PRECISAR FAZER UM NÚMERO INFINITO DE OPERAÇÕES
- EXERCÍCIOS DO APEX CALCULUS

REPARE QUE É BEM FÁCIL REPRESENTAR GRAFICAMENTE A DIFERENÇA ENTRE DUAS ÁREAS SE UMA ESTÁ SEMPRE ACIMA DA OUTRA...
EXEMPLO:



CONTINUAÇÃO DO EXERCÍCIO ANTERIOR

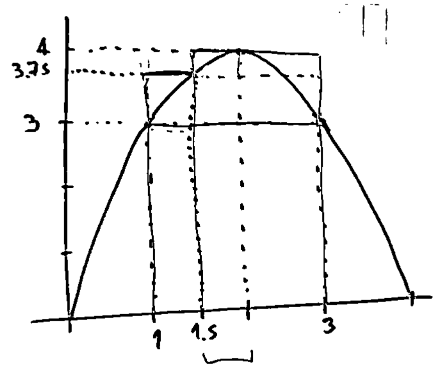
ⓒ PARA $f(x) = x-2$ DESENHE NUM GRÁFICO SÓ $f(x)$, [INF] E [SUP] PARA $P=\{3,4,6\}$.

ⓓ IDEM, MAS PARA $P=\{3,3.5,4,4.5,5,5.5,6\}$.

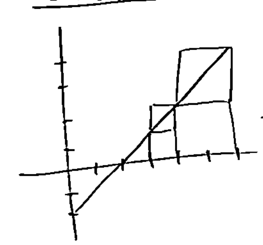
ⓔ IDEM, MAS PARA $P=\{0,1,2,3,4\}$

ⓐ $[SUP] = \sum_{i=1}^{N} \left(\sup(\{f(x) \mid x\in[a_i,b_i]\})\right)(b_i-a_i)$

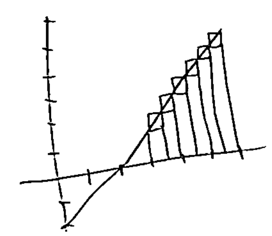
$= \underbrace{\sup(\{f(x) \mid x\in[1,1.5]\})}_{\underbrace{[3,3.75]}_{3.75}}(1.5-1) + \underbrace{\sup(\{f(x) \mid x\in[1.5,3]\})}_{\underbrace{[3,4]}_{4}}(3-1.5)$



NO EXERCÍCIO ⓒ VOCÊS VIRAM DUAS APROXIMAÇÕES POR RETÂNGULOS (POR CIMA E POR BAIXO) E NO EXERCÍCIO ⓓ VOCÊS VIRAM APROXIMAÇÕES MELHORES...



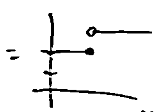
$\Rightarrow$



A GENTE VAI DEFINIR (AMANHÃ!) A INTEGRAL COMO O LIMITE DESSAS APROXIMAÇÕES...

COM ESSA DEFINIÇÃO VAI DAR PRA "CALCULAR" $\leftarrow$ EM INFINITOS PASSOS !!

$\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx \Leftarrow$ 

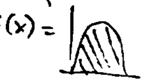
TRUQUE:
SEJA $g(x) =$ 

E SEJA $G(b) = \int_{x=1}^{x=b} g(x)\,dx$

$\left(\text{DAÍ } \int_{x=0.5}^{x=10} g(x)\,dx = G(10) - G(0.5)\right)$

E A GENTE VAI VER QUE $G'(b) = g(b)$

... E A GENTE VAI USAR ISSO E ALGUMAS PROPRIEDADES EXTRAS PRA ENCONTRAR G...

ISSO VAI FUNCIONAR TAMBÉM PRA $f(x) =$ 

$F(x) =$ (SE GREGO!)

$\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx = F(4) - F(0)$

$= \frac{32}{3}$

C2 30/ago/2019

TURMA GRANDE

Hoje:

- $\overline{\int_{P}}$, $\underline{\int_{P}}$, $\overline{\int_{x=a}^{x=b}}$, $\underline{\int_{x=a}^{x=b}}$
- Funções integráveis e não-integráveis
- Propriedades da função $F(b)=\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx$
- Como calcular integrais (TFC1 e TFC2)

No final da aula passada nós vimos um exemplo simples em que tínhamos duas partições, P_1 e P_2, que eram divisões do mesmo intervalo... Algo como:

$P_1=\{3,4,6\}$,

$P_2=\{3,3.5,4,4.5,5,5.5,6\}$

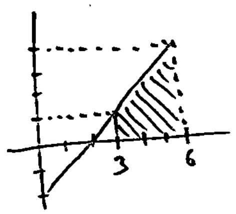
e a P_2 dava uma aproximação melhor.

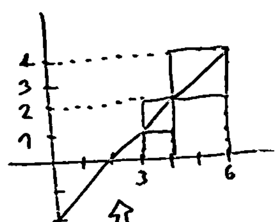
Refazendo:

$f(x)=x-2$

Queremos calcular

$$\int_{x=3}^{x=6} f(x)\,dx$$





Essa figura mostra ao mesmo tempo

$\int_{x=a}^{x=6} f(x)dx$ (no meio),

[sup] (por cima)

[inf] (por baixo).

Defs:

$\overline{\int_{P}} f(x)dx$ é a aproximação por retângulos de $f(x)$ por cima usando a partição P;

$\underline{\int_{P}} f(x)dx$ é a aproximação por baixo.

Exercício:

Calcule:

$$\overline{\int_{\{3,4,6\}}} x-2\,dx,$$

$$\overline{\int_{x=3}^{x=6}} x-2\,dx,$$

$$\underline{\int_{\{3,4,6\}}} x-2\,dx.$$

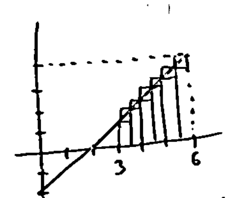
Se P_1 e P_2 são partições do mesmo intervalo e $P_1 \subset P_2$ então dizemos que P_2 é mais fina do que P_1.

Exemplo:

$P_1=\{3,4,6\}$,

$P_2=\{3,3.5,4,4.5,5,5.5,6\}$

P_2 é mais fina que P_1



$$\underline{\int_{P_1}} f(x)dx \le \int_{x=a}^{x=6} f(x)dx \le \overline{\int_{P_1}} f(x)dx$$

$$\mathbin{\rotatebox{90}{$\ge$}} \qquad\qquad \| \qquad\qquad \mathbin{\rotatebox{90}{$\le$}}$$

$$\underline{\int_{P_2}} f(x)dx \le \int_{x=a}^{x=b} f(x)dx \le \overline{\int_{P_2}} f(x)dx$$

Def:

Sejam $P_1, P_2, P_3, \ldots$ partições cada vez mais finas do intervalo $[a,b]$, tais que o "diâmetro" delas tende a zero.

(O "diâmetro" de uma partição P é a largura do maior intervalo dela. Exemplo: $\operatorname{diam}(\{3,4,6\})=2$)

OBS: Por um teorema complicado qualquer sequência $P_1, P_2, \ldots$ obedecendo isso aí serve e dá os mesmos resultados no final!

Def:

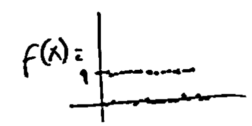
$$\overline{\int_{x=a}^{x=b}} f(x)dx = \lim_{i\to\infty} \overline{\int_{P_i}} f(x)dx$$

$$\underline{\int_{x=a}^{x=b}} f(x)dx = \lim_{i\to\infty} \underline{\int_{P_i}} f(x)dx$$

Às vezes $\overline{\int_{x=a}^{x=b}}$ e $\underline{\int_{x=a}^{x=b}}$ não coincidem!!

Exemplo:

Seja $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{quando } x\in\mathbb{Q} \\ 1 & \text{quando } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$



$$\overline{\int_{x=3}^{x=6}} f(x)dx = \text{Área}(\ldots)=3$$

$$\underline{\int_{x=3}^{x=6}} f(x)dx = \text{Área}(\ldots)=0$$

Def: Quando $\overline{\int_{x=a}^{x=b}} f(x)dx = \underline{\int_{x=a}^{x=b}} f(x)dx$

nós dizemos que:

- $f(x)$ é integrável no intervalo $[a,b]$
- $\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx$ existe
- $\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx = \overline{\int_{x=a}^{x=b}} f(x)dx = \underline{\int_{x=a}^{x=b}} f(x)dx$

C2 30/AGO/2019

TURMA GRANDE

Hoje:

- $\int_{P_1}$, $\underline{\int}_{P_1}$, $\int_{x=a}^{x=b}$, $\underline{\int}_{x=a}^{x=b}$
- Funções integráveis e não-integráveis
- Propriedades da função $F(b)=\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx$
- Como calcular integrais (TFC1 e TFC2)

No final da aula passada nós vimos um exemplo simples em que tínhamos duas partições, P_1 e P_2, que eram divisões do mesmo intervalo...

Algo como:

$P_1=\{3,4,6\}$,

$P_2=\{3,3.5,4,4.5,5,5.5,6\}$

e a P_2 dava uma aproximação melhor.

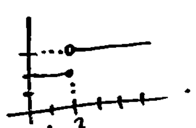
Fato:

(Teorema que a gente não vai demonstrar)

Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é contínua então $\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx$ existe.

[a,b]: intervalo fechado!

Além disso funções cujos gráficos são feitos de segmentos de retas são integráveis.

Seja $g(x)=$ 

Seja $G(b)=\int_{x=1}^{x=b} g(x)dx$.

Exercício:

Calculem:

ⓐ $G(2)=\int_{x=1}^{x=2} g(x)dx =$

ⓑ $G(3) =$

ⓒ $G(4) =$

Repare que sabendo a função G a gente sabe calcular $\int_{x=a}^{x=b} g(x)dx$ pra quaisquer a e b!

Exemplos:

$$\int_{x=5}^{x=6} g(x)dx = \underbrace{\int_{x=1}^{x=6} g(b)}_{G(6)} - \underbrace{\int_{x=1}^{x=5} g(b)dx}_{G(5)}$$

$$\int_{x=-2}^{x=-1} g(x) = G(-1)-G(-2)$$

(Pensem em casa!)

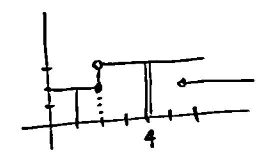
Se a gente sabe calcular $G(b)$ num número finito de passos então a gente sabe calcular qualquer $\int_{x=a}^{x=b} g(x)dx$ num número finito de passos!

Quais são as propriedades dessa $G(b)$?

① Derivada

$$G'(b)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{G(b+\varepsilon)-G(b)}{\varepsilon}$$

O que é, por exemplo, $G(4+\frac{1}{10})-G(4)$?



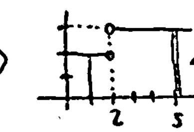
$$\frac{G(4+\frac{1}{10})-G(4)}{1/10}=3$$

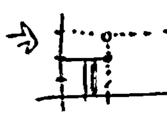
Base — Altura

Área do retângulo: base · altura

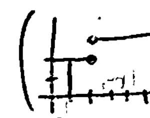
Exercícios:

Calculem:

ⓐ $\dfrac{G(5+\frac{1}{100})-G(5)}{1/100}$ $\Rightarrow$ 

ⓑ $\dfrac{G(1.23+\frac{1}{1000})-G(1.23)}{1/1000}$ $\Rightarrow$ 

Mais propriedades:

② $G(1) = $ Área () $= 0$

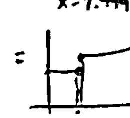
③ G não é derivável em $b=2$, mas é <u>contínua</u>!

Porque?

Digamos que seja descontínua.

Digamos que $G(1.999)=\alpha$ e $G(2.001)=\alpha+1$

mas $G(2.001)-G(1.999)=\int_{x=1.999}^{x=2.001} g(x)dx = 1$

$=$ 

Pensem em casa!

C2 30/AGO/2019

TURMA GRANDE

HOJE:

- $\overline{\int}_P, \underline{\int}_P, \overline{\int}_{x=a}^{x=b}, \underline{\int}_{x=a}^{x=b}$
- FUNÇÕES INTEGRÁVEIS E NÃO-INTEGRÁVEIS
- PROPRIEDADES DA FUNÇÃO $F(b)=\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$
- COMO CALCULAR INTEGRAIS (TFC1 E TFC2)

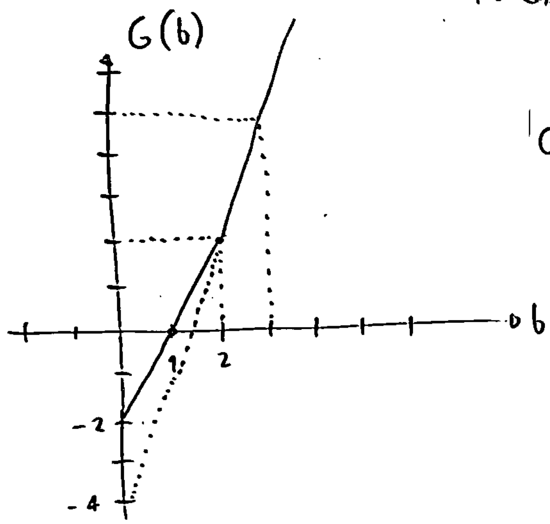
EXERCÍCIO:

(a) REPRESENTE GRAFICAMENTE UMA FUNÇÃO CONTÍNUA $G(x)$ QUE OBEDECE:

- $G'(x)=2$ PARA $x<2$,
- $G'(x)=3$ PARA $x>2$,
- $G(1)=0$

(b) DÊ UMA DEFINIÇÃO FORMAL PRA ELA (POR CASOS).

$$G(x)=\begin{cases} 2x-2 & \text{QUANDO } x\leq 2 \\ 3x-4 & \text{QUANDO } 2<x \end{cases}$$



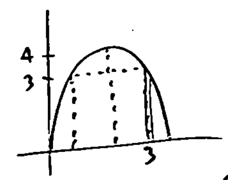
COMO CALCULAR

$$F(b)=\int_{x=0}^{x=b} f(x)\,dx$$

NO CASO EM QUE $f(x)=4-(x-2)^2$
$=4-(x^2-4x+4)$
$=-x^2+4x$?

O QUE É $F'(3)$?

VAMOS VISUALIZAR $\dfrac{F(3+\frac{1}{10})-F(3)}{1/10}$.



$F(3+\frac{1}{10})-F(3)$ NÃO É UM RETÂNGULO...

MAS $F(3+\frac{1}{1000000})-F(3)$ É QUASE UM RETÂNGULO,

E $\dfrac{F(3+\frac{1}{1000000})-F(3)}{1/1000000}\approx f(3)$

QUE PROPRIEDADES ESSA $F(b)$ TEM?

- DERIVADA: $F'(x)=f(x)$ PARA TODO x
- $F(0)=0$

... SÓ EXISTE UMA $F(x)$ QUE OBEDECE ESSAS DUAS PROPRIEDADES:

$F(x)=-\frac{x^3}{3}+2x^2$

$F(b)=\int_{x=0}^{x=b} -\frac{x^3}{3}+2x^2$

EXERCÍCIO:

(a) ENCONTRE UMA FUNÇÃO $g(x)$ TAL QUE $g'(x)=-x^2+4x$. $\Rightarrow g(x)=-\frac{x^3}{3}+2x^2$

(b) ENCONTRE UMA $h(x)$ TAL QUE $h'(x)=-x^2+4x$ E $h\neq g$ $\Rightarrow h(x)=-\frac{x^3}{3}+2x^2+99$

(c) ENCONTRE UMA $m(x)$ TAL QUE $m'(x)=-x^2+4x$ E $m(0)=0$. $\Rightarrow m(x)=-\frac{x^3}{3}+2x^2$

ENTÃO $\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx = F(4)-F(0)=\left(-\frac{4^3}{3}+2\cdot 4^2\right)-(0)$
$=-\frac{64}{3}+32$
$=\frac{96}{3}-\frac{64}{3}=\frac{32}{3}=10{,}6666\ldots$

C2 [illegible]/2019

TURMA PEQUENA

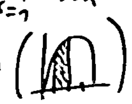
NA AULA PASSADA NÓS VIMOS UM MONTE DE DETALHES TÉCNICOS DA INTEGRAL — VISTA COMO LIMITE DE SOMAS DE RETÂNGULOS...

HOJE VAMOS VER COMO USAR AS IDÉIAS DA AULA PRA CALCULAR $\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx$ (A PARÁBOLA) E UM MONTE DE OUTRAS INTEGRAIS.

VOLTANDO AO NOSSO EXEMPLO PREFERIDO...

$$f(x) = 4-(x-2)^2 = 4-(x^2-4x+4) = -x^2+4x$$

DEF: $F(b) = \int_{x=1}^{x=b} f(x)\,dx$

$F(2) = \text{ÁREA}\Big($  $\Big)$

$F(3) = \text{ÁREA}\Big($  $\Big)$

REPARE QUE SE TIVERMOS UMA FÓRMULA RÁPIDA — QUE NÃO PRECISA DE INFINITOS PASSOS — PRA CALCULAR $F(b)$ PRA QUALQUER b A GENTE VAI SABER CALCULAR $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ PRA QUAISQUER a E b.

EXEMPLO MUITO FÁCIL DE VISUALIZAR:

$$\int_{x=2}^{x=3} f(x)\,dx = \int_{x=1}^{x=3} f(x)\,dx - \int_{x=1}^{x=2} f(x)\,dx$$

(ISSO TAMBÉM FUNCIONA PRA a E b FORA DO INTERVALO $[1,4]$ — VISUALIZEM EM CASA!)

QUAIS SÃO AS PROPRIEDADES DA F?

- $F(1) = \int_{x=1}^{x=1} f(x)\,dx = 0$

  (PORQUE É UM RETÂNGULO DE LARGURA ZERO)

- $F'(b) = f(b)$

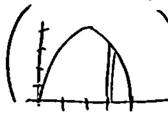
  PORQUE?

  TEM UM ARGUMENTO VISUAL BEM LEGAL PRA ISSO!

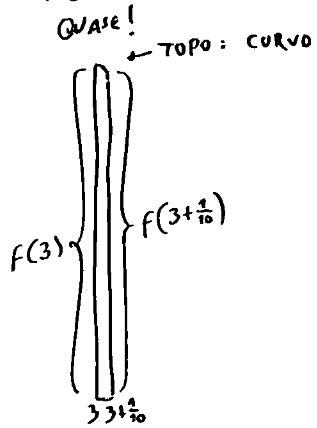
$$F'(b) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{F(b+\varepsilon)-F(b)}{\varepsilon}$$

VAMOS TENTAR VISUALIZAR ISSO PRA ε PEQUENO E MAIOR QUE 0 — O ARGUMENTO TAMBÉM FUNCIONA PRA $\varepsilon<0$, MAS É MAIS DIFÍCIL DE VER.

EXEMPLO:

$F(3+\frac{1}{10}) - F(3) = \text{ÁREA}\Big($  $\Big)$

ESSA ÁREA NÃO É UM RETÂNGULO, NEM É UM TRAPÉZIO — MAS QUASE!



... MAS $F(3+\frac{1}{1000000}) - F(3)$ É BEM MAIS PARECIDO COM UM RETÂNGULO — DE BASE $\frac{1}{1000000}$ E ALTURA $f(3)$!...

E ESSAS FIGURAS FICAM CADA VEZ MAIS PARECIDAS COM RETÂNGULOS QUANDO $\varepsilon\to 0$.

SE $\varepsilon>0$ É BEM PEQUENO $F(3+\varepsilon)-F(3)$ VAI SER PRATICAMENTE $\underbrace{\varepsilon}_{\text{BASE}} \cdot \underbrace{f(3)}_{\text{ALTURA}}$

E $\frac{F(3+\varepsilon)-F(3)}{\varepsilon} \approx f(3)$

... ISSO É UM ARGUMENTO INFORMAL/VISUAL QUE MOSTRA QUE

$$F'(3) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{F(3+\varepsilon)-F(3)}{\varepsilon} = f(3)$$

E ISSO PODE SER GENERALIZADO —

SE $F(b) = \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$

ENTÃO $F'(b) = f(b)$

PRA QUALQUER f CONTÍNUA, E $a, b \in \mathbb{R}$.

EXERCÍCIOS:

1. ENCONTRE $g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ QUE OBEDEÇA $g'(x) = f(x) = -x^2+4x$
2. ENCONTRE TODAS AS SOLUÇÕES PARA $F'(x) = -x^2+4x$
3. ENCONTRE A SOLUÇÃO DESSA EDO QUE OBEDECE $F(1)=0$.

C2 [illegible]/AGO/2019

TURMA PEQUENA

NA AULA PASSADA NÓS VIMOS UM MONTE DE DETALHES TÉCNICOS DA INTEGRAL — VISTA COMO LIMITE DE SOMAS DE RETÂNGULOS...

HOJE VAMOS VER COMO USAR AS IDÉIAS DA AULA PRA CALCULAR $\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx$ (A PARÁBOLA) E UM MONTE DE OUTRAS INTEGRAIS.

VOLTANDO AO NOSSO EXEMPLO PREFERIDO...

$$f(x) = 4-(x-2)^2 = 4-(x^2-4x+4) = -x^2+4x$$

DEF: $F(b) = \int_{x=1}^{x=b} f(x)\,dx$

$F(2) =$ ÁREA ()

$F(3) =$ ÁREA ()

REVENDO:

DEFINIMOS $F(b) = \int_{x=1}^{x=b} f(x)\,dx$

DESCOBRIMOS QUE

$$\left.\begin{aligned} F(1) &= 0, \\ F'(b) &= f(b) \\ F'(x) &= -x^2+4x \end{aligned}\right\} (\star)$$

ISSO É UMA EDO SIMPLES!

VAMOS ESQUECER AS ÁREAS TEMPORARIAMENTE E RESOLVÊ-LA...

$$F'(x) = -x^2+4x$$

$$\Rightarrow F(x) = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 + C$$

PRA ALGUMA CONSTANTE C.

QUAL É O C QUE FAZ COM QUE $F(1)=0$?

$$F(1) = -\frac{1^3}{3} + 2\cdot 1^2 + C$$

$$\Rightarrow C = -\frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow F(x) = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 - \frac{5}{3}$$

É A SOLUÇÃO DA EDO $(\star)$.

EXERCÍCIOS:

CALCULE:

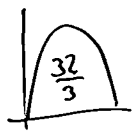
a) $F(2)$

b) $F(3)$

c) $\int_{x=1}^{x=2} f(x)\,dx$

d) $\int_{x=1}^{x=3} f(x)\,dx$

e) $\int_{x=2}^{x=3} f(x)\,dx$

f) $\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx = \frac{32}{3} =$ 

CASA !!

COMO É QUE A GENTE OTIMIZA ISSO? DICA: DÁ PRA GENTE SE LIVRAR DO PASSO DE CALCULAR A CONSTANTE C...

SE:

$$F_1(b) = \int_{x=1}^{x=b} f(x)\,dx$$

$$F_{0.5}(b) = \int_{x=0.5}^{x=b} f(x)\,dx$$

$$F_a(b) = \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$$

DIGAMOS QUE A GENTE RESOLVEU A EDO $F'(x) = -x^2+4x$

E A GENTE ENCONTROU UMA SOLUÇÃO DELA...

EXEMPLO: $F(x) = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 42$

E AÍ A GENTE ENCONTROU C_1, E

$$F_1(x) = F(x) + C_1$$

$$F_{0.5}(x) = F(x) + C_{0.5}$$

MAS:

$$\int_{x=2}^{x=3} f(x)\,dx = F_1(3) - F_1(2) = (F(3)+C_1) - (F(2)+C_1) = F(3) + \cancel{C_1} - F(2) - \cancel{C_1} = F(3) - F(2)$$

$$\int_{x=2}^{x=3} f(x)\,dx = F_{0.5}(3) - F_{0.5}(2) = (F(3)+\cancel{C_{0.5}}) - (F(2)+\cancel{C_{0.5}}) = F(3) - F(2)$$

MÉTODO:

(TFC2!)

SE f É CONTÍNUA PODEMOS CALCULAR $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ ENCONTRANDO ALGUMA SOLUÇÃO DA EDO

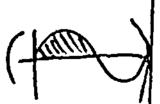
$$F'(x) = f(x)$$

E AÍ:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

EXERCÍCIO:

SEJA $g(x) = \operatorname{sen} x$.

CALCULE $\int_{x=0}^{x=\pi} g(x)\,dx =$ ÁREA ()

DICA: RESOLVA ESTA EDO:

$$G'(x) = \operatorname{sen} x$$

OBS: A PAPELARIA TNT ESTÁ FAZENDO IMPRESSÕES A 10 CENTAVOS POR PÁGINA SE FOR FRENTE E VERSO E FOR MATERIAL DA UFF! VOU MANDAR O CAPÍTULO SOBRE INTEGRAÇÃO DO APEX CALCULUS PRA LÁ!

[illegible] 30/AGO/2019

TURMA PEQUENA

NOTAÇÃO NOVA:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = F(b)-F(a) = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

A DIFERENÇA DE $F(x)$ ENTRE $x=a$ E $x=b$

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

LIMITES DE INTEGRAÇÃO (EXTREMIDADES DO INTERVALO)

PONTOS EM QUE TEMOS QUE CALCULAR $F(x)$

O QUE ACONTECE SE A GENTE APAGA AS EXTREMIDADES / OS LIMITES DE INTEGRAÇÃO?

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

$\int f(x)\,dx$ É A "INTEGRAL INDEFINIDA" DE $f(x)$

$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ É A "INTEGRAL DEFINIDA" (PORQUE OS LIMITES ESTÃO EXPLÍCITOS).

EU PREFIRO TRATAR

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

COMO ABREVIAÇÃO DE

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

NO SENTIDO DE QUE É O RESULTADO DA GENTE OMITIR OS LIMITES DE INTEGRAÇÃO.

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

TEM VÁRIAS INTERPRETAÇÕES POSSÍVEIS...

UMA [illegible]S É:

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

QUER DIZER

$$f(x) = F'(x)$$

OUTRA É:

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C$$

QUER DIZER QUE TODAS AS SOLUÇÕES DA EDO $F'(x)=f(x)$ SÃO DA FORMA $F(x)+C$...

EXEMPLO CONCRETO:

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}+C$$

QUER DIZER QUE TODAS AS SOLUÇÕES DE $F'(x)=x^2$ SÃO DA FORMA $F(x)=\frac{x^3}{3}$.

OU: "PRIMITIVAS"

NAS SEÇÕES SOBRE INTEGRAIS INDEFINIDAS OS LIVROS TÊM MONTES DE EXERCÍCIOS COMO:

$$\int \sqrt{2x+3}\,dx = \ ?$$

E AQUI NO CURSO VOCÊS VÃO PODER USAR TANTO A FORMA COM "+C" QUANTO A FORMA SEM.

EXERCÍCIO (SEÇÃO 5.1 DO APEX):

a) $\int 3x^3\,dx = \ ?$

b) $\int x^8\,dx = \ ?$

c) $\int 10x^2-2\,dx = ?$

d) $\int 1\,dx = ?$

e) $\int 42\,dx = ?$

f) $\int x^{1/2}\,dx = ?$

g) $\int 4e^{5x}\,dx = ?$

C2 4/set/2019

TURMA PEQUENA

Na última aula nós vimos um truque pra calcular expressões como
$$\int_{x=a}^{x=b} x^2\,dx \ldots$$
Nós encontrávamos alguma função $F(x)$ cuja derivada fosse x^2 e aí usávamos isto ("TFC2"):
$$\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

A partir de hoje nós vamos começar a usar o livro - o APEX Calculus - um bocado.

Hoje: Atividades! Exercícios! Folhas sobre substituição e integração sobre substituição!

Estão no PDF do "material para exercícios" no site.

Exemplo 6.1.1 do livro:

Se $u = x^2+5$,
$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2+5) = 2x,$$
$$\int \operatorname{sen}(\underbrace{x^2+5}_{u}) \cdot \underbrace{\underbrace{2x}_{\frac{du}{dx}}\,dx}_{du} = \int \operatorname{sen} u\,du$$
$$\frac{du}{dx}\,dx = du \Leftarrow !!$$

Porque? Como assim??? Dá pra fazer mesmo esse cancelamento ou é gambiarra?

Exercício (a) da folha:

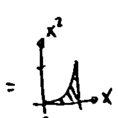
$$(\text{TFC2})\begin{bmatrix} F(x) := -\cos x \\ a := 0 \\ b := \pi \end{bmatrix} =$$
$$\left(\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}\right)\begin{bmatrix} F(x) := -\cos x \\ a := 0 \\ b := \pi \end{bmatrix} =$$
$$\left(\int_{x=0}^{x=\pi} \operatorname{sen} x\,dx = (-\cos x)\Big|_{x=0}^{x=\pi}\right)$$

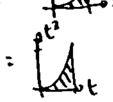
Obs: A (S2) tem um detalhe implícito:

Se $F'(u) = f(u)$ então $\Leftarrow$ esta condição aqui!
$$\left(\begin{array}{c} F(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} = \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))\,g'(x)\,dx \\ \| \\ F(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} = \int_{x=a}^{x=b} f(u)\,du \end{array}\right)$$

A (S2) é útil quando a gente sabe $f(u)$ mas ainda não sabe uma antiderivada pra ela.

Novidade: (S2+) é isto aqui:
$$(\text{S2+}) = \left(\begin{array}{c} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então} \\ F(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} = \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))\,g'(x)\,dx \\ \| \\ F(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array}\right)$$

$$\int_{x=0}^{x=1} x^2\,dx =$$


$$\int_{t=0}^{t=1} t^2\,dx =$$


Exemplo:

$$(\text{S2+})\begin{bmatrix} f(u) := \tan u \\ g(x) := 3x+4 \end{bmatrix} =$$
$$\left(\begin{array}{c} \text{Se } F'(u) = \tan u \text{ então:} \\ F(3x+4)\Big|_{x=a}^{x=b} = \int_{x=a}^{x=b} \tan(3x+4)\cdot 3\,dx \\ \| \\ F(u)\Big|_{u=3a+4}^{u=3b+4} = \int_{u=3a+4}^{u=3b+4} \tan(u)\,du \end{array}\right)$$

Obs: A gente às vezes vai usar substituição pra testar fórmulas.

Digamos que um colega nosso, Paulo Guedes, demonstrou isso aqui e publicou num artigo.

O Teorema de Guedes é:
$$(\text{TG}) = \left(\int_{x=a}^{x=b} 4\,dx = 4\right).$$

Teste 1:
$$(\text{TG})\begin{bmatrix} b := 3 \\ a := 2 \end{bmatrix} = \left(\int_{x=2}^{x=3} 4\,dx = 4\right) \Leftarrow \text{ok!}$$

Teste 2:
$$(\text{TG})\begin{bmatrix} b := 0 \\ a := 0 \end{bmatrix} = \left(\int_{x=0}^{x=0} 4\,dx = 4\right) \Leftarrow \text{errado!}$$

C2 4/set/2019

TURMA PEQUENA

Na última aula nós vimos um truque pra calcular expressões como $\int_{x=a}^{x=b} x^2\,dx$...

Nós encontrávamos alguma função $F(x)$ cuja derivada fosse x^2 e aí usávamos isto ("TFC2"):

$$\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

A partir de hoje nós vamos começar a usar o livro - o APEX Calculus - um bocado.

Hoje: atividades! Exercícios! Folhas sobre substituição e integração sobre substituição!

Estão no PDF do "Material para exercícios" no site.

Algumas observações (vou alterar o PDF mais tarde pra acrescentá-las!):

① A notação de substituição quer dizer substitua <u>todas</u> as ocorrências daquelas variáveis, <u>uma vez só</u>.

Exemplo:

$$\big((\underset{\substack{\uparrow\\ \text{vira}\\ y+z}}{x}+\underset{\substack{\uparrow\\ \text{vira}\\ x+z}}{y})\cdot \underset{\substack{\uparrow\\ \text{vira}\\ x+y}}{z}\big)\begin{bmatrix}x:=y+z\\ y:=x+z\\ z:=x+y\end{bmatrix} = \big(((y+z)+(x+z))\cdot(x+y)\big)$$

② Os sinais dentro do "[ ]" são ":=", não "=" !!!

③ Tem coisas que vão fazer mais sentido em português - e lembrem que nós estamos aprendendo uma notação <u>extra</u> que pode ser traduzida pra português!

Exemplo (exerc. (m) com cos ao invés de √):

$$(S3)\begin{bmatrix}f(u):=\cos u\\ g(x):=3x+4\\ a:=1\\ b:=2\end{bmatrix} =$$

$$\left(\int_{x=1}^{x=2}\cos(3x+4)\,3\,dx = \int_{u=3\cdot1+4}^{u=3\cdot2+4}\cos u\,du\right)$$

Em português isto viraria: substituindo $f(u)$ por $\cos u$, $g(x)$ por $3x+4$, a por 1 e b por 2 em (S3),

temos:

$$\int_{x=1}^{x=2}\cos(3x+4)\cdot3\,dx = \int_{u=3\cdot1+4}^{u=3\cdot2+4}\cos u\,du$$

Além disso,

$$\int_{u=3\cdot1+4}^{u=3\cdot2+4}\cos u\,du = \int_{u=7}^{u=10}\operatorname{sen}'u\,du = \operatorname{sen}10-\operatorname{sen}7,$$

Portanto

$$\int_{x=1}^{x=2}\cos(3x+4)\cdot3\,dx = \operatorname{sen}10-\operatorname{sen}7.$$

Em português: o TFC2 diz:

$$\int_{x=a}^{x=b}F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}.$$

Renomeando a variável x para u, temos:

$$\int_{u=a}^{u=b}F'(u)\,du = F(u)\Big|_{u=a}^{u=b}$$

Substituindo a por 7, b por 10 e $F(u)$ por $\operatorname{sen} u$ acima, obtemos:

$$\int_{u=7}^{u=10}\cos u\,du = \operatorname{sen} u\Big|_{u=7}^{u=10} = \operatorname{sen}10-\operatorname{sen}7$$

Revisão de √...

$$(DP) = \left(\frac{d}{dx}x^k = k\,x^{k-1}\right)$$

$$(DP)\left[k:=\tfrac12\right] = \left(\frac{d}{dx}x^{1/2} = \frac12 x^{\frac12-1}\right)$$

Podemos reescrever isto como:

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac12 x^{-1/2} = \frac12\,\frac{1}{x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Exercício (pra quem não souber):

$$\int\sqrt{x}\,dx = ?$$

Dica:

$$(IP) = \left(\int x^k\,dx = \frac{1}{k+1}x^{k+1}\right)$$

$$(IP)\left[k:=\tfrac12\right] = ?$$

C2 5/SET/2019

NA AULA PASSADA NÓS COMEÇAMOS A VER UMA TÉCNICA QUE NOS PERMITE RESOLVER UM MONTE DE INTEGRAIS... POR EXEMPLO, PARA RESOLVER

$$\int_{x=0}^{x=4} 4-(x-2)^2\,dx$$

NÓS ENCONTRAMOS UMA FUNÇÃO $F(x)$ TAL QUE $F'(x)=4-(x-2)^2$, E USAMOS:

$$\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

$\Uparrow$

TFC2.

HOJE VAMOS COMEÇAR A VER COMO O TFC GERA UM MONTE DE OUTRAS TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO, INCLUSIVE UMA IMPORTANTÍSSIMA — INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO — QUE COSTUMA SER APRESENTADA DE UM JEITO QUE METADE DAS PESSOAS ACHA ÓBVIO E A OUTRA METADE ACHA ROUPALHEIRA.

UM EXEMPLO DO LIVRO (SEÇÃO 6.1):

$$\int \cos(\underbrace{x^2+5}_{u})\cdot \underbrace{2x}_{\frac{du}{dx}}\,dx = \int \cos u\,du$$

PORQUE $\frac{du}{\cancel{dx}}\cancel{dx} = du$.

OBS: A PARTIR DE HOJE EU VOU COMEÇAR A FAZER MUITAS REFERÊNCIAS AO LIVRO — E ALGUMAS A UMAS LISTAS DE EXERCÍCIOS DE NITERÓI QUE EU PUS NO SITE.

A INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO ELA É UM PASSO PRA RESOLVER INTEGRAIS... ELE TRANSFORMA INTEGRAIS MAIS COMPLICADAS — OU MAIS ESTRANHAS — EM INTEGRAIS MAIS SIMPLES E MAIS FAMILIARES.

EXEMPLO DE COMO FAZER OS EXERCÍCIOS:

$$(\mathrm{TFC2})\begin{bmatrix} F(x) := -\cos x \\ a := 0 \\ b := \pi \end{bmatrix} =$$

$$\left(\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}\right)\begin{bmatrix} F(x) := -\cos x \\ a := 0 \\ b := \pi \end{bmatrix} =$$

$$\left(\int_{x=0}^{x=\pi} \mathrm{sen}\,x\,dx = (-\cos x)\Big|_{x=0}^{x=\pi}\right)$$

EM PORTUGUÊS:

O TFC2 NOS DIZ QUE:

$$\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

PARA QUAISQUER $a,b\in\mathbb{R}$ E QUALQUER $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ DERIVÁVEL.

SUBSTITUINDO a POR 0, b POR π, $F(x)$ POR $\mathrm{sen}\,x$ ACIMA, OBTEMOS:

$$\int_{x=0}^{x=\pi} \mathrm{sen}'x\,dx = \mathrm{sen}\,x\Big|_{x=0}^{x=\pi}$$

$$= \mathrm{sen}\,\pi - \mathrm{sen}\,0 \quad \Leftarrow \text{PASSOS EXTRAS!}$$

$$= 0-0 = 0$$

EXERCÍCIO (i):

$$(S1)\begin{bmatrix} f(u) := \mathrm{sen}\,u \\ g(x) := 3x+4 \\ a := 1 \\ b := 2 \end{bmatrix} =$$

$$\left(\begin{array}{c} f(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} = \int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx \\ \| \\ f(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \end{array}\right)\begin{bmatrix} f(u) := \mathrm{sen}\,u \\ g(x) := 3x+4 \\ a := 1 \\ b := 2 \end{bmatrix} =$$

$$\left(\begin{array}{c} \mathrm{sen}(3x+4)\Big|_{x=1}^{x=2} = \int_{x=1}^{x=2} \mathrm{sen}'(3x+4)\,3\,dx \\ \| \\ \mathrm{sen}(u)\Big|_{u=3\cdot1+4}^{u=3\cdot2+4} = \int_{u=3\cdot1+4}^{u=3\cdot2+4} \mathrm{sen}'(u)\,du \end{array}\right)$$

$$\left(\underbrace{\underbrace{f'(\underbrace{g(x)})}\,\underbrace{g'(x)}}\right)\begin{bmatrix} f(u) := \ldots \\ g(x) := \ldots \end{bmatrix}$$

$$f(g(x))\begin{bmatrix} f(u) := \mathrm{sen} \\ g(x) := 4x \end{bmatrix}$$

$f(u) = \mathrm{sen}(u)$

$f(42) = \mathrm{sen}\,42$

$f(a+b+x+y) = \mathrm{sen}(a+b+x+y)$

$f(g(x)) = \mathrm{sen}(g(x))$

$$\mathrm{sen}(4x)$$

$$\left(f'(g(x))\,g'(x)\right)\begin{bmatrix} f(u) := \mathrm{sen}\,u \\ g(x) := 4x \end{bmatrix} = \cos(4x)\cdot 4$$

$f'(u) = \cos u$

$g'(x) = 4$

C2 5/set/2019

Na aula passada nós começamos a ver uma técnica que nos permite resolver um monte de integrais... Por exemplo, pra resolver

$$\int_{x=0}^{x=4} 4-(x-2)^2\,dx$$

nós encontramos uma função $F(x)$ tal que $F'(x)=4-(x-2)^2$, e usamos:

$$\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

⇑

TFC2.

Hoje vamos começar a ver como o TFC gera um monte de outras técnicas de integração, inclusive uma importantíssima — integração por substituição — que costuma ser apresentada de um jeito que metade das pessoas acha óbvio e a outra metade acha roubalheira.

Um exemplo do livro (seção 6.1):

$$\int \cos(\underbrace{x^2+5}_{u})\cdot \underbrace{2x}_{\frac{du}{dx}}\,dx = \int \cos u\,du$$

porque $\frac{du}{\cancel{dx}}\cancel{dx} = du$.

Obs: A partir de hoje eu vou começar a fazer muitas referências ao livro — e algumas a umas listas de exercícios de Niterói que eu pus no site.

A integração por substituição é um passo pra resolver integrais... ele transforma integrais mais complicadas — ou mais estranhas — em integrais mais simples e mais familiares.

Exemplo de como fazer os exercícios:

$$(\text{TFC2})\left[\begin{array}{l} F(x) := -\cos x \\ a := 0 \\ b := \pi\end{array}\right] =$$

$$\left(\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}\right)\left[\begin{array}{l} F(x) := -\cos x \\ a := 0 \\ b := \pi\end{array}\right] =$$

$$\left(\int_{x=0}^{x=\pi} \operatorname{sen} x\,dx = (-\cos x)\Big|_{x=0}^{x=\pi}\right)$$

Em português:

O TFC2 nos diz que:

$$\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

para quaisquer $a,b\in\mathbb{R}$ e qualquer $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivável. Substituindo a por 0, b por π, $F(x)$ por $\operatorname{sen} x$ acima, obtemos:

$$\int_{x=0}^{x=\pi} \operatorname{sen}' x\,dx = \operatorname{sen} x\Big|_{x=0}^{x=\pi} = \operatorname{sen}\pi - \operatorname{sen} 0 = 0-0=0$$

⇐ passos extras!

Exercício (l):

$$\left(\begin{array}{l}\text{Se } F'(x)=f(x) \text{ então:}\\ F(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} = \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \quad\| \\ F(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du\end{array}\right)\left[\begin{array}{l} f(u):=\sqrt{u}\\ g(x):=3x+4\\ a:=1\\ b:=2\end{array}\right] =$$

$$= \left(\begin{array}{l}\text{Se } F'(x)=\sqrt{x} \text{ então:}\\ F(3x+4)\Big|_{x=1}^{x=2} = \int_{x=1}^{x=2}\sqrt{3x+4}\cdot 3\,dx\\ \quad\| \\ F(u)\Big|_{u=3\cdot1+4}^{u=3\cdot2+4} = \int_{u=3\cdot1+4}^{u=3\cdot2+4}\sqrt{u}\,du\end{array}\right)$$

Mais exercícios (extras):

n) $(\text{TFC2})\,[F(x) := f(g(x))]$

o) $\left(\frac{d}{dx}x^k = kx^{k-1}\right)\left[k:=\frac12\right] =$

p) $\left(\frac{d}{dx}\left(\frac1k x^k\right) = x^{k-1}\right)\left[k:=\frac32\right]$

C2 6/SET/2019

HOJE:
CONTINUAÇÃO DOS EXERCÍCIOS DE ONTEM (E DÚVIDAS)
E ALGUMAS APLICAÇÕES:
- INTEGRAÇÃO POR PARTES
- INTEGRAÇÃO DE CERTAS POTÊNCIAS DE SENOS E COSSENOS.

h) $(TFC2)\left[F(x) := f(g(x))\right]$

EM PORTUGUÊS:
O TFC2 DIZ QUE:
$$\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$$
SUBSTITUINDO $F(x)$ POR $f(g(x))$ ACIMA OBTEMOS:
$$\int_{x=a}^{x=b} \frac{d}{dx}\big(f(g(x))\big)\,dx = f(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b}$$
OU:
$$\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx = f(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b}$$

OBS: SUBSTITUIÇÃO MUITAS VEZES VAI SER USADA PRA TRANSFORMAR ALGO QUE A GENTE AINDA NÃO ENTENDE PORQUE ESTÁ MUITO ABSTRATO EM ALGO MAIS FAMILIAR E MAIS CONCRETO...

POR EXEMPLO, ALGUMAS PESSOAS NÃO CONSEGUEM PENSAR EM TERMOS DE "F É UMA FUNÇÃO QUALQUER".

ÀS VEZES A SUBSTITUIÇÃO VAI SER USADA PRA TRANSFORMAR UMA EXPRESSÃO QUE A GENTE (AINDA) NÃO ENTENDE EM OUTRA EXPRESSÃO QUE A GENTE (AINDA) NÃO ENTENDE.

UM EXEMPLO QUE EU COSTUMAVA DAR QUANDO EU COMECEI A ENSINAR SUBSTITUIÇÃO NOS MEUS CURSOS ERA ESSE AQUI:

$$\begin{pmatrix}\text{Vanessão}\\ \text{20 reais}\end{pmatrix}\left[a := \begin{pmatrix}\star\ 0\\ \square\end{pmatrix}\right] =$$
$$\begin{pmatrix}\text{V}\begin{pmatrix}\star 0\\ \square\end{pmatrix}\text{ness}\widetilde{\begin{pmatrix}\star 0\\ \square\end{pmatrix}}\text{o}\\ \text{20 re}\begin{pmatrix}\star 0\\ \square\end{pmatrix}\text{is}\end{pmatrix}$$

AS PESSOAS QUE ACHAVAM QUE TODA EXPRESSÃO TINHA QUE PODER SER CALCULADA ATÉ O RESULTADO DAR UM NÚMERO FICAVAM MEIO DESESPERADAS — MAS NO FIM ENTENDIAM.

INTEGRAÇÃO POR PARTES

g) $(TFC2)\left[F(x) := g(x)h(x)\right]$
$$= \left(\int_{x=a}^{x=b} \frac{d}{dx}\big(g(x)h(x)\big)\,dx = \big(g(x)h(x)\big)\Big|_{x=a}^{x=b}\right)$$

EM PORTUGUÊS:
SE SUBSTITUIRMOS $F(x)$ POR $g(x)h(x)$ NA FÓRMULA DO TFC2 OBTEMOS:
$$\int_{x=a}^{x=b} g'(x)h(x) + g(x)h'(x)\,dx = \big(g(x)h(x)\big)\Big|_{x=a}^{x=b}$$
E AÍ:
$$\int_{x=a}^{x=b} g'(x)h(x)\,dx + \int_{x=a}^{x=b} g(x)h'(x)\,dx = \big(g(x)h(x)\big)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

(IP1): $$\boxed{\int_{x=a}^{x=b} g'(x)h(x)\,dx = \big(g(x)h(x)\big)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_{x=a}^{x=b} g(x)h'(x)\,dx}$$

(IP2): $$\boxed{\int_{x=a}^{x=b} g(x)h'(x)\,dx = \big(g(x)h(x)\big)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_{x=a}^{x=b} g'(x)h(x)\,dx}$$

EXERCÍCIO:
INTEGRAÇÃO POR PARTES PODE SER USADA PRA CALCULAR $\int_{x=a}^{x=b} x e^x\,dx$...
MAS VOCÊS VÃO TER QUE DESCOBRIR SE A FÓRMULA QUE FUNCIONA É A (IP1) OU A (IP2).

$$(IP1)\begin{bmatrix} g(x) := x \\ h(x) := e^x \end{bmatrix} = ?$$
$$(IP2)\begin{bmatrix} g(x) := x \\ h(x) := e^x \end{bmatrix} = ?$$

...AGORA QUE VOCÊ JÁ SABE CALCULAR $\int_{x=a}^{x=b} x e^x\,dx$
CALCULE $\int_{x=a}^{x=b} x^2 e^x\,dx$.

C2 6/set/2019

Hoje:
Continuação dos exercícios de ontem (e dúvidas) e algumas aplicações:
- Integração por partes
- Integração de certas potências de senos e cossenos.

Nas nossas contas pra resolver $\int_{x=a}^{x=b} xe^x dx$ nós tínhamos "$\int_{x=a}^{x=b}$" e "$\Big|_{x=a}^{x=b}$" em todo lugar... o que acontece se a gente apaga esses limites de integração?

$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx$
$= xe^x - e^x$

Exercício:
$\int x^2 e^x dx = ?$

sem os limites de integração!
Dica: (IP2)
pra transformar isso em algo que sabemos calcular...
Obs: estou pedindo pra vocês fazerem algo desta forma:
$(IP2)[\ldots]$
mas eu não vou dizer qual é a substituição - vocês vão descobrir sozinhos.

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2xe^x dx$$
$$= x^2e^x - 2\int xe^x dx$$
$$= x^2e^x - 2(xe^x - e^x)$$

$$(TFC2)[F(x):=e^x] = \int_{x=a}^{x=b} e^x dx = e^x \Big|_{x=a}^{x=b}$$

Integração de certas potências de senos e cossenos

Obs: vamos trabalhar sem os limites de integração no início!

$\int (\text{sen } x)^5 (\cos x)^3 dx$?

Ao invés de usar a letra u pra variável nova vou usar s...

$s = \text{sen } x$

$\frac{ds}{\cancel{dx}} \cancel{dx} = ds$ ⇐ gambiarra

o que é $\frac{ds}{dx}$ se $s = \text{sen } x$?

$\frac{ds}{dx} = \frac{d}{dx} s = \frac{d}{dx} \text{sen } x = \cos x$

$$\boxed{\begin{array}{l}\frac{ds}{dx} dx = ds \\ \shortparallel \\ \cos x \, dx\end{array}}$$

$$\int (\text{sen } x)^5 (\cos x)^3 dx$$
$$= \int (\text{sen } x)^5 (\cos x)^2 \cos x \, dx$$
$$= \int (\text{sen } x)^5 (1 - (\text{sen } x)^2) \cos x \, dx$$
$$= \int s^5 \quad (1 - s^2) \quad \frac{ds}{\cancel{dx}} \cancel{dx}$$
$$= \int s^5 (1 - s^2) ds$$
$$= \int s^5 - s^7 ds$$

Exerc:
$\int x^5 - x^7 dx = ?$
$\int_{x=a}^{x=b} x^5 - x^7 dx = ?$
$\int_{x=a}^{x=b} x^7 dx = ?$
$(TFC2)[F(x) := x^8] = ?$
$(TFC2)[F(x) := \frac{1}{8}x^8] = ?$
$(TFC2I)[F(x) := \frac{?}{8}x^7] = ?$

... e aí $\int s^5 - s^7 ds$
$= \frac{1}{6}s^6 - \frac{1}{8}s^8$
$= \frac{1}{6}(\text{sen } x)^6 - \frac{1}{8}(\text{sen } x)^8$

Obs: dá pra verificar que isto é verdade
$$\int_{x=a}^{x=b} (\text{sen } x)^5 (\cos x)^3 dx = \left(\frac{1}{6}(\text{sen } x)^6 - \frac{1}{8}(\text{sen } x)^8\right)\Big|_{x=a}^{x=b}$$
Fazendo:
$[TFC2]\left[F(x) := \frac{1}{6}(\text{sen } x)^6 - \frac{1}{8}(\text{sen } x)^8\right]$

C2 6/SET/2019

TURMA PEQUENA

Hoje:

- Dúvidas sobre substituição (eu trouxe uma versão revisada dos exercícios)
- Integração por partes
- Como integrar algumas potências de senos e cossenos

o) $(\text{TFC2})\left[F(x):=g(h(x))\right]$

p) $(\text{TFC2})\left[F(x):=g(x)h(x)\right]$

q) $\left(\frac{d}{dx}x^k=kx^{k-1}\right)\left[k:=\frac{1}{2}\right]$

r) $\left(\frac{d}{dx}\frac{1}{k}x^k=x^{k-1}\right)\left[k:=\frac{3}{2}\right]$

s) $(\text{TFC2})\left[F(x):=\frac{1}{k}x^k\right]$

GRUPO NO TELEGRAM: @calculoII20192

Lembre que você não pode usar os "[:=]"s fora deste curso - e todo uso de um "[:=]" pode ser traduzido para português.

INTEGRAÇÃO POR PARTES

O TFC2 nos diz que:

$$\int_{x=a}^{x=b}F'(x)\,dx=F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

Substituindo $F(x)$ por $g(x)h(x)$ acima obtemos:

$$\int_{x=a}^{x=b}\frac{d}{dx}\big(g(x)h(x)\big)\,dx=\big(g(x)h(x)\big)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

$$\int_{x=a}^{x=b}g'(x)h(x)+g(x)h'(x)\,dx=\big(g(x)h(x)\big)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

$$\int_{x=a}^{x=b}g'(x)h(x)\,dx+\int_{x=a}^{x=b}g(x)h'(x)\,dx=\big(g(x)h(x)\big)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

Passando um termo para a direita obtemos:

$$(\text{IP1})=\boxed{\int_{x=a}^{x=b}g'(x)h(x)\,dx=\big(g(x)h(x)\big)\Big|_{x=a}^{x=b}-\int_{x=a}^{x=b}g(x)h'(x)\,dx}$$

$$\boxed{\int_{x=a}^{x=b}g(x)h'(x)\,dx=\big(g(x)h(x)\big)\Big|_{x=a}^{x=b}-\int_{x=a}^{x=b}g'(x)h(x)\,dx}$$

$(\text{IP2})=$

EXERCÍCIO:

Dá pra usar uma dessas fórmulas pra integrar $\int_{x=a}^{x=b}xe^x\,dx$. Qual delas? E qual é o resultado?

OBS: (IP1) ou (IP2)!

DICA: $\int_{x=a}^{x=b}e^x\,dx=e^x\Big|_{x=a}^{x=b}$

OBS: NOVIDADE: Eu estou pedindo pra vocês usarem alguma substituição na (IP1) ou na (IP2), mas não estou dizendo qual substituição!

$(\text{IP1})\left[\ldots:=\ldots\right]$

$(\text{IP2})\left[\ldots:=\ldots\right]$

Depois que você resolver este exercício tente integrar $\int_{x=a}^{x=b}x^2e^x\,dx$.

$(\text{IP1})\begin{bmatrix}g(x):=x\\h(x):=e^x\end{bmatrix}=\ ?$

$(\text{IP1})\begin{bmatrix}g(x):=\frac{x^2}{2}\\h(x):=e^x\end{bmatrix}=\ ?$

$$\left(\int_{x=a}^{x=b}F'(x)\,dx=F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}\right)\left[F(x):=g(h(x))\right]$$

$$=\left(\int_{x=a}^{x=b}g'(h(x))\cdot h'(x)\,dx=g(h(x))\Big|_{x=a}^{x=b}\right)$$

C2 6/set/2019

Turma pequena

Hoje:

- Dúvidas sobre substituição (eu trouxe uma versão revisada dos exercícios)
- Integração por partes
- Como integrar algumas potências de senos e cossenos

o) $(\text{TFC2})\,[F(x) := g(h(x))]$

p) $(\text{TFC2})\,[F(x) := g(x)h(x)]$

q) $\left(\frac{d}{dx}x^k = kx^{k-1}\right)\left[k := \frac{1}{2}\right]$

r) $\left(\frac{d}{dx}\frac{1}{k}x^k = x^{k-1}\right)\left[k := \frac{3}{2}\right]$

s) $(\text{TFC2})\left[F(x) := \frac{1}{k}x^k\right]$

Grupo no Telegram:
@calculoII20192

Lembre que você não pode usar os "[:=]"s fora deste curso - e todo uso de um "[:=]" pode ser traduzido para português.

Integração por partes

O TFC2 nos diz que:

$$\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

Substituindo $F(x)$ por $g(x)h(x)$ acima obtemos:

$$\int_{x=a}^{x=b} \frac{d}{dx}(g(x)h(x))\,dx = (g(x)h(x))\Big|_{x=a}^{x=b}$$

$$\int_{x=a}^{x=b} g'(x)h(x) + g(x)h'(x)\,dx = (g(x)h(x))\Big|_{x=a}^{x=b}$$

$$\int_{x=a}^{x=b} g'(x)h(x)\,dx + \int_{x=a}^{x=b} g(x)h'(x)\,dx = (g(x)h(x))\Big|_{x=a}^{x=b}$$

Passando um termo para a direita obtemos:

$$(\text{IP1}) = \boxed{\int_{x=a}^{x=b} g'(x)h(x)\,dx = (g(x)h(x))\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_{x=a}^{x=b} g(x)h'(x)\,dx}$$

$$\boxed{\int_{x=a}^{x=b} g(x)h'(x)\,dx = (g(x)h(x))\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_{x=a}^{x=b} g'(x)h(x)\,dx}$$

$(\text{IP2}) =$

Exercício:

Dá pra usar uma dessas fórmulas pra integrar $\int_{x=a}^{x=b} xe^x\,dx$.

Obs: (IP1) ou (IP2)!

(1) Qual delas? E qual é o resultado?

Dica: $\int_{x=a}^{x=b} e^x\,dx = e^x\Big|_{x=a}^{x=b}$

Obs: Novidade: Eu estou pedindo pra vocês usarem alguma substituição na (IP1) ou na (IP2), mas não estou dizendo qual substituição!

$(\text{IP1})[\ldots := \ldots]$

$(\text{IP2})[\ldots := \ldots]$

Depois que você resolver este exercício tente integrar

(2) $\int_{x=a}^{x=b} x^2e^x\,dx$.

Repare que você usou um monte de "$\substack{x=b\\x=a}$" e "$\Big|_{x=a}^{x=b}$"...

Dá pra abreviar isso, omitindo os limites de integração.

Fórmulas novas:

$$(\text{IP1I}) = \left(\int g'(x)h(x)\,dx = g(x)h(x) - \int g(x)h'(x)\,dx\right)$$

$$(\text{IP2I}) = \left(\int g(x)h'(x)\,dx = g(x)h(x) - \int g'(x)h(x)\,dx\right)$$

$$\begin{aligned}\int xe^x\,dx &= xe^x - \int 1\cdot e^x\,dx\\ &= xe^x - \int e^x\,dx\\ &= xe^x - e^x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int x^2e^x\,dx &= x^2e^x - \int 2xe^x\,dx\\ &= x^2e^x - 2\int xe^x\,dx\\ &= x^2e^x - 2(xe^x - e^x)\end{aligned}$$

Versão curta!

Como integrar algumas potências de senos e cossenos

Exemplo:

$$\int (\operatorname{sen} x)^5(\cos x)^3\,dx = ?$$

Vamos começar usando a notação abreviada - sem limites de integração - e vamos "completar" as contas depois.

Normalmente a gente usa "u" pra variável nova na substituição, mas eu vou preferir usar s: $s = \operatorname{sen} x$

Lembrem que na versão Gambiarra da integração por substituição aparecia isso: $\frac{du}{\cancel{dx}}\cancel{dx} = du$

No nosso caso,

$\frac{ds}{dx}dx = ds$

$\frac{ds}{dx} = \frac{d}{dx}s = \frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x$

C2 6/set/2019

TURMA PEQUENA

Hoje:
- Dúvidas sobre substituição (eu trouxe uma versão revisada dos exercícios)
- Integração por partes
- Como integrar algumas potências de senos e cossenos

o) $(TFC2)\left[F(x) := g(h(x))\right]$

p) $(TFC2)\left[F(x) := g(x)h(x)\right]$

q) $\left(\frac{d}{dx} x^k = k x^{k-1}\right)\left[k := \frac{1}{2}\right]$

r) $\left(\frac{d}{dx} \frac{1}{k} x^k = x^{k-1}\right)\left[k := \frac{3}{2}\right]$

s) $(TFC2)\left[F(x) := \frac{1}{k} x^k\right]$

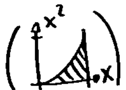
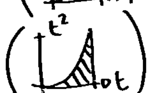
GRUPO NO TELEGRAM:
@calculoII20192

$$\int (\operatorname{sen} x)^5 (\cos x)^3 \, dx =$$
$$\int (\operatorname{sen} x)^5 (\cos x)^2 \cos x \, dx =$$
$$\int \underbrace{(\operatorname{sen} x)}_{s}{}^5 \left(1 - (\underbrace{\operatorname{sen} x}_{s})^2\right) \underbrace{\cos x}_{\frac{ds}{dx}} \, dx =$$

$\boxed{s = \operatorname{sen} x}$

$$\int s^5 \; (1 - s^2) \; ds =$$
$$\int s^5 - s^7 \, ds = \frac{1}{6} s^6 - \frac{1}{8} s^8$$
$$= \frac{1}{6} (\operatorname{sen} x)^6 - \frac{1}{8} (\operatorname{sen} x)^8$$

Exercício:
$$\int_{x=a}^{x=6} x^5 - x^7 \, dx = ?$$

OBS:
$$\int_{x=0}^{x=1} x^2 \, dx = \text{Área}\Big($$  $$\Big)$$
$$\int_{t=0}^{t=1} t^2 \, dt = \text{Área}\Big($$  $$\Big)$$

OBS: $\int_{x=a}^{x=6} x^5 \, dx = \frac{1}{6} x^6 \Big|_{x=a}^{x=6}$

Esta é a versão abreviada...
Como "desabreviá-la"?

$$\int (\operatorname{sen} x)^5 (\cos x)^3 \, dx = \frac{1}{6} (\operatorname{sen} x)^6 - \frac{1}{8} (\operatorname{sen} x)^8$$
$$\int_{x=a}^{x=6} (\operatorname{sen} x)^5 (\cos x)^3 \, dx = \left(\frac{1}{6} (\operatorname{sen} x)^6 - \frac{1}{8} (\operatorname{sen} x)^8\right)\Big|_{x=a}^{x=6}$$

Só que a gente usou vários passos difíceis de acreditar... Como a gente confere se o nosso resultado é verdade?

$$(TFC2)\left[F(x) := \frac{1}{6} (\operatorname{sen} x)^6 - \frac{1}{8} (\operatorname{sen} x)^8\right]$$

OBS: Funciona sim - a verificação é trabalhosa mas ok.

Os passos do meio usam outra variável - s ao invés de x...
Como desabreviá-los?

Encontre as substituições que:

$$(S3I)\left[\;\ldots\;\right] = \left(\int (\operatorname{sen} x)^5 \left(1 - (\operatorname{sen} x)^2\right) \cos x \, dx = \int u^5 (1 - u^2) \, du\right)$$

Hipótese:
$$(S3I)\begin{bmatrix} g(x) := 42x \\ f(x) := e^x \end{bmatrix} =$$

Hipótese 2:
...

(Chutem e testem!)

Próximo passo: (casa!)

$$(S3)\left[\;\ldots\;\right] = \left(\int_{x=a}^{x=6} (\operatorname{sen} x)^5 \left(1 - (\operatorname{sen} x)^2\right) \cos x \, dx = \int_{u=?}^{u=?} u^5 (1 - u^2) \, du\right)$$

O que a gente põe no lugar dos "?"s?

C2 11/SET/2019
TURMA PEQUENA

HOJE: TÉCNICAS PRA INTEGRAR "FUNÇÕES RACIONAIS", ISTO É, QUOCIENTES DE UM POLINÔMIO POR OUTRO.

RELEMBRANDO ALGUMAS COISAS DE CÁLCULO 1...

EXERCÍCIOS:

① LEMBRE QUE SE f E g SÃO INVERSAS, ISTO É, SE $f(g(x))=x$, ENTÃO

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = \frac{d}{dx}x = 1$$
$$\overset{\shortparallel}{f'(g(x))g'(x)},$$

E PORTANTO $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$.

SUBSTITUA $f(u) := \exp u = e^u$ E $g(x) := \ln x$ NA DEMONSTRAÇÃO ACIMA PRA DESCOBRIR $\frac{d}{dx}\ln x$

② AGORA QUE VOCÊ SABE $\ln' x$ CALCULE $\frac{d}{dx}\ln(-x)$.

DICA: $\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$;
ENCONTRE UMA SUBSTITUIÇÃO QUE FAZ COM QUE $f(g(x)) = \ln(-x)$.

REVEJAM ISSO EM CASA!

RESPOSTAS:

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$
$$\frac{d}{dx}\ln(-x) = \frac{1}{x}$$

COM ISSO

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}$$

(PORQUÊ? PENSEM NOS CASOS $x>0$ E $x<0$!)

E JÁ QUE $\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}$

ENTÃO SUBSTITUINDO $F(x) := \ln|x|$ EM

$$\int F'(x)\,dx = F(x)$$

TEMOS:

$$\int \frac{d}{dx}\ln|x|\,dx = \ln|x|$$
$$\overset{\shortparallel}{\int \frac{1}{x}\,dx}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|} \quad (\star)$$

ISTO TEM ALGUMAS SUTILEZAS... LEMBREM QUE PRA GENTE A INTEGRAL INDEFINIDA É UMA ABREVIAÇÃO DA INTEGRAL DEFINIDA...

OU SEJA, A FÓRMULA $(\star)$ É O RESULTADO DA GENTE PEGAR

$$\boxed{\int_{x=a}^{x=b} \frac{1}{x}\,dx = (\ln|x|)\Big|_{x=a}^{x=b}} \quad (\star\star)$$

E APAGAR OS LIMITES DE INTEGRAÇÃO...

SERÁ QUE $(\star\star)$ VALE PRA TODOS OS VALORES DE a E b?

SERÁ QUE ELA VALE PRA $a=-1$ E $b=?$

$$\int_{x=-1}^{x=1} \frac{1}{x}\,dx = \text{ÁREA}\left(\qquad \right)$$

FAÇAM O DESENHO EM CASA!

$$(\ln|x|)\Big|_{x=-1}^{x=1} = \ln|1| - \ln|-1|$$
$$= \ln 1 - \ln 1$$
$$= 0 - 0$$
$$= 0$$

AVISO: A LISTA DE EXERCÍCIOS SOBRE ÁREAS VIA RETÂNGULOS TÁ QUASE PRONTA! VOU MANDAR ELA PRA VOCÊS DE NOITE (E COLOCÁ-LA NA PÁGINA DO CURSO) – E O MINI-TESTE SOBRE ELA VAI SER NA QUARTA QUE VEM E A GENTE PODE TIRAR DÚVIDAS SOBRE ELA NA SEXTA.

O EXERCÍCIO MAIS DIFÍCIL E IMPORTANTE DA LISTA É ESSE AQUI:

CALCULE $\overline{\int_P} \frac{1}{x}\,dx$ E $\underline{\int_P} \frac{1}{x}\,dx$,

ONDE P É A SEGUINTE PARTIÇÃO DE $[-1,1]$:

ⓐ $P = \{-1, -0.5, 0.5, 1\}$,
ⓑ $P = \{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{2}, 1\}$.

C2 11/SET/2019
TURMA PEQUENA

HOJE: TÉCNICAS PRA INTEGRAR "FUNÇÕES RACIONAIS", ISTO É, QUOCIENTES DE UM POLINÔMIO POR OUTRO.

FATO: $\displaystyle\int_{x=-1}^{x=1} \frac{1}{x}\,dx$

NÃO EXISTE! $\frac{1}{x}$ NÃO É INTEGRÁVEL NESSE INTERVALO!

... MAS A GENTE MESMO ASSIM VAI DIZER

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|,$$

PORQUE A VERSÃO "INTEGRAL DEFINIDA" DISTO VALE PARA INTERVALOS QUE NÃO INCLUAM O PONTO RUIM.

POR INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO (CASA!) TEMOS:

$$\int \frac{1}{x-42}\,dx = \ln|x-42|$$

$$\int \frac{1}{x-a}\,dx = \ln|x-a|$$

PARA QUALQUER $a \in \mathbb{R}$.

PORTANTO:

$$\int \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-3}\,dx =$$

$$\int \frac{1}{x+2}\,dx + \int \frac{1}{x-3}\,dx =$$

$$\ln|x+2| + \ln|x-3|$$

EXERCÍCIO:

$$\int \frac{3}{4x+5}\,dx = ?$$

DICA: $u = 4x+5$

OBS: A SEGUNDA LISTA DE EXERCÍCIOS QUE VAI VIRAR UM MINI-TESTE TAMBÉM ESTÁ QUASE PRONTA! ELA É SOBRE INTEGRAR COISAS COMO $\int (\operatorname{sen} x)^3 (\cos x)^5\,dx$ USANDO A NOTAÇÃO CERTA E TODOS OS SINAIS DE "=".

$$\int \frac{3}{4x+5}\,dx = \qquad \left[\begin{aligned} u &= 4x+5 \\ \frac{du}{dx} &= 4 \\ du &= 4\,dx \\ dx &= \tfrac{1}{4}\,du \end{aligned}\right]$$

$$\int \frac{3}{u}\,\frac{1}{4}\,du =$$

$$\int \frac{3}{4}\,\frac{1}{u}\,du =$$

$$\frac{3}{4}\int \frac{1}{u}\,du =$$

$$\frac{3}{4}\ln|u| =$$

$$\frac{3}{4}\ln|4x+5|$$

$$\int \frac{x+2}{x}\,dx =$$

$$\int \frac{x}{x} + \frac{2}{x}\,dx =$$

$$\int 1 + \frac{2}{x}\,dx =$$

$$\int 1\,dx + 2\int \frac{1}{x}\,dx =$$

$$x + 2\ln|x|$$

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = ?$$

$$\int x^{-2}\,dx = ?$$

$$\frac{d}{dx}\,x^K = K x^{K-1}$$

$$\frac{d}{dx}\,\frac{1}{K}x^K = x^{K-1}$$

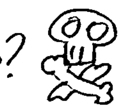
$$\left(\int F'(x)\,dx = F(x)\right)\left[F(x) := \tfrac{1}{K}x^K\right]$$

$$= \left(\int x^{K-1}\,dx = \frac{1}{K}x^K\right)$$

$$\left(\int x^{K-1}\,dx = \frac{1}{K}x^K\right)\left[K := -1\right] = \left(\int x^{-2}\,dx = \left(\frac{1}{-1}\right)x^{-1}\right)$$

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}$$

DÁ PRA INTEGRAR COISAS COMO $\int \frac{1}{x^2}\,dx$ USANDO A FÓRMULA DA INTEGRAL DE UMA POTÊNCIA DE X...

MAS E NESTE CASO?  !!

$$\left(\int x^{K-1}\,dx = \frac{1}{K}x^K\right)\left[K := 0\right] =$$

$$\left(\int x^{-1}\,dx = \frac{1}{0}x^0\right) \quad !!$$

ISTO PRATICAMENTE NOS DIZ QUE

$$\int x^{-1}\,dx = \infty$$

E SE A GENTE PUSER LIMITES DE INTEGRAÇÃO?

$$\int_{x=2}^{x=3} x^{-1}\,dx = \infty\Big|_{x=2}^{x=3}$$

$$= \infty - \infty$$

$$= \text{INDEFINIDO} \quad !!$$

C2 11/SET/2019
TURMA PEQUENA

HOJE: TÉCNICAS PRA INTEGRAR "FUNÇÕES RACIONAIS", ISTO É, QUOCIENTES DE UM POLINÔMIO POR OUTRO.

$$\int \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-3}\,dx =$$
$$\ln|x+2| + \ln|x-3|$$

$$\int \frac{4}{x+2} + \frac{5}{x-3}\,dx = (\text{ok})$$

$$\int \frac{4x^2+5x+6}{x+2} + \frac{7x^2+8x+9}{x-3}\,dx = (\text{ok})$$

AGORA VAMOS TRABALHAR UM POUCO FORA DO SINAL DE INTEGRAL...

$$\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-3} = \frac{x-3}{(x+2)(x-3)} + \frac{x+2}{(x+2)(x-3)}$$
$$= \frac{(x-3)+(x+2)}{(x+2)(x-3)}$$
$$= \frac{2x-1}{x^2-x-6}$$

$$\int \frac{2x-1}{x^2-x-6}\,dx = \Leftarrow$$

x^2-x-6 É UM POLINÔMIO DE GRAU 2 COM DUAS RAIZES DIFERENTES!

$$\int \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-3}\,dx =$$
$$\ln|x+2| + \ln|x-3|$$

OBS: $\boxed{\dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{x-3}} = \boxed{\dfrac{2x-1}{x^2-x+6}}$

$\xrightarrow{\text{FÁCIL}}$
$\xleftarrow[\text{DIFÍCIL}]{}$

EM PROGRAMAS QUE SABEM FAZER COMPUTAÇÃO SIMBÓLICA ("CONTAS COM LETRAS") ESSAS DUAS OPERAÇÕES TÊM NOMES:
$\xrightarrow{\text{TOGETHER}}$
$\xleftarrow[\text{APART}]{}$.

EXERCÍCIOS:

(a) TOGETHER $\left(\dfrac{2}{x+3} + \dfrac{4}{x+5}\right) = ?$

(b) TOGETHER $\left(\dfrac{A}{x-a} + \dfrac{B}{x-b}\right) = ? = \dfrac{A(x-b)+B(x-a)}{(x-a)(x-b)} = \dfrac{(A+B)x+(-Ab-aB)}{(x-a)(x-b)}$

PRA FAZER O "APART" A GENTE TEM QUE RESOLVER UM SISTEMA — A MENOS QUE A GENTE SAIBA O TRUQUE QUE EU VOU ENSINAR DEPOIS !!.

EXERCÍCIOS:

(c) APART $\left(\dfrac{1}{(x-2)(x+5)}\right) = ?$

(d) APART $\left(\dfrac{x}{(x-2)(x+5)}\right) = ?$

DICA: $\left(\dfrac{A}{x-a} + \dfrac{B}{x-b} = \dfrac{(A+B)x+(-Ab-aB)}{(x-a)(x-b)}\right)\left[\begin{matrix} a := 2 \\ b := -5\end{matrix}\right]$

$= \left(\dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x+5} = \dfrac{(A+B)x+(5A-2B)}{(x-2)(x+5)}\right)$ (★★★)

PRA RESOLVER O (c) PRECISAMOS DE: $(A+B)x + (5A-2B) = 1$

$\Rightarrow A+B=0, \quad 5A-2B=1$

$B=-A, \quad 5A+2A=1 \Rightarrow A=\frac{1}{7}$
$B=-\frac{1}{7}$

(e) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-2)(x+5)}\,dx = ?$

(f) $\displaystyle\int \frac{x}{(x-2)(x+5)}\,dx = ?$

RESP. (c): $\dfrac{1}{(x-2)(x+5)} = \dfrac{1/7}{x-2} + \dfrac{-1/7}{x+5}$

(e): $\displaystyle\int \frac{1}{(x-2)(x+5)}\,dx = \int \frac{1/7}{x-2}\,dx + \int \frac{-1/7}{x+5}\,dx$
$\displaystyle= \frac{1}{7}\int \frac{1}{x-2}\,dx - \frac{1}{7}\int \frac{1}{x+5}\,dx$
$\displaystyle= \frac{1}{7}\ln|x-2| - \frac{1}{7}\ln|x+5|$

E DEPOIS?

(g) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x-2)(x+5)}\,dx = ?$

NESSE CASO TEMOS UM POLINÔMIO DE GRAU 2 NO NUMERADOR E UM DE GRAU 2 NO DENOMINADOR...

$$\frac{x^2}{(x-2)(x+5)} = \frac{x^2}{x^2+3x-10}$$
$$= \frac{(x^2+3x-10)-3x+10}{x^2+3x-10}$$
$$= 1 + \frac{-3x+10}{x^2+3x-10}$$

C2 12/set/2019

TURMA GRANDE

Hoje: Como integrar funções racionais - isto é, quocientes de um polinômio por outro!

Caso mais simples:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = ?$$

Vamos começar revendo algumas coisas de Cálculo 1...

Lembre que se f e g são inversas, então $f(g(x)) = x$

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{d}{dx} x = 1$$

$$\overset{\shortparallel}{f'(g(x))\,g'(x)}$$

e portanto $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$.

Lembre que "$\exp x$" é uma outra notação para e^x.

(1) Exercício:

Substitua $f(u) := \exp u$ e $g(x) := \ln x$ em

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

e descubra $\ln' x$.

$$\left(g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}\right)\left[\begin{array}{l} f(u) := \exp u \\ g(x) := \ln x \end{array}\right]$$

$$= \left(\ln' x = \frac{1}{\exp'(\ln x)}\right)$$

$$\ln' x = \frac{1}{\exp'(\ln x)} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}}$$

(2) Descubra

$$\frac{d}{dx}\ln -x.$$

Dica: $\frac{d}{dx} f(g(x))$, com $f = \ln$ e $g(x) := -x$.

... Então:

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x},$$

$$\frac{d}{dx}\ln -x = \frac{1}{x},$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}}.$$

Agora pegue

$$\int F'(x)\,dx = F(x)$$

e substitua $F(x) := \ln|x|$ nisto... "$[:=]$":

Usando

$$\left(\int F'(x)\,dx = F(x)\right)\left[F(x) := \ln|x|\right]$$

$$= \left(\int \frac{d}{dx}\ln|x|\,dx = \ln|x|\right)$$

Em português:

O TFC2 nos diz que:

$$\int F'(x)\,dx = F(x)$$

Substituindo $F(x)$ por $\ln|x|$ na fórmula acima obtemos:

$$\int \frac{d}{dx}\ln|x|\,dx = \ln|x|$$

$$\overset{\shortparallel}{\int \frac{1}{x}\,dx}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|}$$

Lembrem que estamos usando a integral indefinida - sem limites de integração - como abreviação pra integral definida...

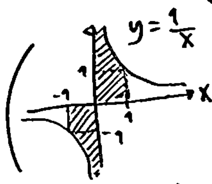
Então devemos ter:

$$\int_{x=a}^{x=b} \frac{1}{x}\,dx = \left(\ln|x|\right)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

e se $a=-1$ e $b=1$,

$$\int_{x=-1}^{x=1} \frac{1}{x}\,dx = \left(\ln|x|\right)_{x=-1}^{x=1} = \ln|1| - \ln|-1| = \ln 1 - \ln 1 = 0 - 0 = 0$$

$$\int_{x=-1}^{x=1} \frac{1}{x}\,dx = \text{Área}\Big($$



$\Big)$

Será que isso aí é integrável? Lembrem que inf e sup têm definições formais bem complicadas mas têm interpretações gráficas simples...

$$\sum_{i=1}^{N} \sup\left(\{f(x) \mid x \in [a_i, b_i]\}\right)(b_i - a_i) = \overline{\int_P} f(x)\,dx$$

é a "melhor aproximação por retângulos por cima".

Exercícios:

(3) Represente graficamente e calcule:

(a) $\overline{\int_P} \frac{1}{x}\,dx$ no caso $P = \{-1, -0.5, 0.5, 1\}$

(b) $\underline{\int_P} \frac{1}{x}\,dx$, P igual ao acima.

(c) $\overline{\int_P} \frac{1}{x}\,dx$, $P = \{-1, -0.5, -0.1, 0.1, 0.5, 1\}$.

Esses exercícios podem cair no mini-teste!

C2 12/set/2019

Turma grande

Hoje: Como integrar funções racionais - isto é, quocientes de um polinômio por outro!

$\int_{x=-1}^{x=1} \frac{1}{x}\,dx$ não existe!

A função $\frac{1}{x}$ não é integrável neste intervalo - aliás,

$$\int_{x=a}^{x=b} \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| \Big|_{x=a}^{x=b}$$

Não vale quando $0 \in [a,b]$...

Mas mesmo assim vamos continuar dizendo que:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| \ldots$$

Sabemos integrar polinômios - $\int 4x^3+5x^2+6x+7\,dx$,

e sabemos integrar $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$.

$$\int \frac{1}{2x+3}\,dx =$$

$$\begin{bmatrix} u = 2x+3 \\ \frac{du}{dx} = 2 \\ du = 2\,dx \\ dx = \frac{1}{2}du \end{bmatrix}$$

$$\int \frac{1}{u}\,\frac{1}{2}\,du =$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du =$$

$$\frac{1}{2}\ln|u| =$$

$$\frac{1}{2}\ln|2x+3|$$

$$\int \frac{4}{2x+3}\,dx =$$

$$4\int \frac{1}{2x+3}\,dx =$$

$$4\cdot\frac{1}{2}\ln|2x+3|$$

$$\int \frac{2x}{2x+3}\,dx = \int \frac{(2x+3)-3}{2x+3}\,dx$$

$$= \int \frac{2x+3}{2x+3} + \frac{-3}{2x+3}\,dx$$

$$= \int 1 + \frac{-3}{2x+3}\,dx$$

(Sabemos integrar isso!)

Próximo passo: denominador sendo um polinômio com grau maior que 1.

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = ?$$

$$\frac{1}{x^2} = x^{-2}$$

$$\int x^{-2}\,dx = ?$$

$$\boxed{\int x^k\,dx = \frac{1}{k+1}x^{k+1}} \quad (☆)$$

4 Exercício: use (☆) pra calcular $\int \frac{1}{x^2}\,dx$.

$$(☆)[k:=-2] = \left(\int x^{-2}\,dx = \frac{1}{-2+1}x^{-2+1}\right)$$

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{-1}x^{-1} = -\frac{1}{x}$$

Será que essa fórmula serve pra calcular $\int \frac{1}{x}\,dx$?

Vamos tentar!

$$(☆)[k:=-1] = \left(\int x^{-1}\,dx = \frac{1}{-1+1}x^{-1+1}\right)$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \underbrace{\frac{1}{0}}_{\infty}\underbrace{x^0}_{1}$$

??? !!

Vamos ver o que acontece no caso da integral definida...

$$\int_{x=a}^{x=b} x^k\,dx = \left(\frac{1}{k+1}x^{k+1}\right)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

$$\int_{x=2}^{x=3} x^k\,dx = \left(\frac{1}{k+1}x^{k+1}\right)\Big|_{x=2}^{x=3}$$

$$\int_{x=2}^{x=3} \frac{1}{x}\,dx = \left(\frac{1}{0}x^0\right)\Big|_{x=2}^{x=3} = \infty\cdot 3^0 - \infty\cdot 2^0 = \infty - \infty$$

= indefinido!

No caso $k=-1$ a fórmula (☆) é inútil!

Voltando...

$$\int \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-3}\,dx =$$

$$\int \frac{1}{x+2}\,dx + \int \frac{1}{x-3}\,dx =$$

$$\ln|x+2| + \ln|x-3|$$

Vamos trabalhar fora do sinal de integral um pouco...

$$\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-3} =$$

$$\frac{x-3}{(x+2)(x-3)} + \frac{x+2}{(x+2)(x-3)} =$$

$$\frac{(x-3)+(x+2)}{(x+2)(x-3)} =$$

$$\frac{2x-1}{x^2-x-6}$$

$$\int \frac{2x-1}{x^2-x-6}\,dx = \int \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-3}\,dx$$

$$= \ln|x+2| + \ln|x-3|$$

C2 12/set/2019
TURMA GRANDE

Hoje: Como integrar funções racionais - isto é, quocientes de um polinômio por outro!

CASO GERAL:

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} =$$
$$\frac{A(x-b)}{(x-a)(x-b)} + \frac{B(x-a)}{(x-a)(x-b)} =$$
$$\frac{A(x-b)+B(x-a)}{(x-a)(x-b)} =$$
$$\frac{(A+B)x+(-Ab-aB)}{(x-a)(x-b)}$$

$$\boxed{\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{(A+B)x+(-Ab-aB)}{(x-a)(x-b)}} \quad (AA)$$

Obs: $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-3} = \frac{2x-1}{x^2-x-6}$

fácil $\rightarrow$
$\leftarrow$ difícil

Em programas que sabem fazer computação simbólica ("contas com letras") essas operações têm nomes:

$$\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-3} \underset{\text{APART}}{\overset{\text{TOGETHER}}{\rightleftarrows}} \frac{2x-1}{x^2-x+6}$$

Exercício:

a) Calcule $\text{TOGETHER}\left(\frac{3}{x+2} + \frac{4}{x+5}\right)$,

b) $\text{TOGETHER}\left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}\right)$,

c) $\text{APART}\left(\frac{1}{(x+2)(x+5)}\right)$

d) $\int \frac{1}{(x+2)(x+5)}\,dx = ?$

Dica: use (AA) e encontre A e B resolvendo um sistema.

Grupo do Telegram:
calculo II 20192

$$(AA)\begin{bmatrix} a := -2 \\ b := -5 \end{bmatrix} = \left(\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+5} = \frac{(A+B)x+(-A(-5)-(-2)B)}{(x+2)(x+5)}\right)$$

Queremos:
$$\frac{1}{(x+2)(x+5)} = \frac{(A+B)x+(-A(-5)-(-2)B)}{(x+2)(x+5)} = \frac{(A+B)x+(5A+2B)}{(x+2)(x+5)}$$

$\Rightarrow$ $A+B=0$
$5A+2B=1$
$B=-A$
$5A+2(-A)=1$
$5A-2A=1$
$3A=1$
$A=\frac{1}{3}$
$B=-\frac{1}{3}$

$\Rightarrow \frac{1}{(x+2)(x+5)} = \frac{1/3}{x+2} + \frac{-1/3}{x+5}$

Isso está certo? É fácil conferir!

$$\text{TOGETHER}\left(\frac{1/3}{x+2} + \frac{-1/3}{x+5}\right)$$
$$= \frac{\frac{1}{3}(x+5) + -\frac{1}{3}(x+2)}{(x+2)(x-5)}$$
$$= \frac{\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}x + \frac{5}{3} - \frac{2}{3}}{(x+2)(x-5)}$$
$$= \frac{1}{(x+2)(x-5)}$$

Amanhã:
- Método de Heaviside - um método pra resolver isto sem sistemas
- Vários truques com polinômios, e como simplificar coisas como $\frac{4x^4+5x^3+6x^2+7x+8}{x^2+2x+3}$

C2 13/OUT/2019

TURMA GRANDE

Hoje:
Como simplificar funções racionais impróprias;
truques com polinômios...

No final da última aula vimos que o truque pra integrar algo como

$$\int \frac{x^2}{(x-2)(x+5)}\,dx$$

era transformar a função racional

$$\frac{x^2}{(x-2)(x+5)} \begin{array}{l} \Leftarrow \text{grau } 2 \\ \Leftarrow \text{grau } 2 \end{array}$$

em uma "própria", isto é, uma em que o grau do numerador é estritamente menor que o grau do denominador...

$$\frac{x^2}{(x-2)(x+5)} = \frac{x^2}{x^2+3x-10}$$
$$= \frac{(x^2+3x-10)-3x+10}{x^2+3x-10}$$
$$= 1 + \frac{-3x+10}{x^2+3x-10}$$
$$= 1 + \frac{-3x+10}{(x-2)(x+5)}$$

Vai ter três ponto do curso em que a gente vai ter que manipular polinômios grandes... Vamos ver um jeito visual de fazer isso, que em alguns casos vai nos permitir até fazer algumas contas de cabeça.

Idéia:
Soma e multiplicação de polinômios são praticamente iguais a soma e multiplicação de números, mas sem "vai um"!

Notação (informal):

Exemplo:

$$3x^4 + 5x^3 + 6x + 7$$

coef do x^4 — coef do x^3 — coef do x^1 — coef do x^0

e o coeficiente do x^2 é 0.

"A notação de caixinhas" vai nos permitir escrever só os coeficientes...
O exemplo acima vira:

[3|5|0|6|7]

coef do x^4 — coef do x^0

A última caixinha é sempre o coef. do x^0.

Soma de polinômios

Pra somar o polinômio anterior com

[9999|999|99|9],

isto é,

$9999x^3 + 999x^2 + 99x + 9$,

fazemos:

```
     [3|5   |0  |6  |7 ]
  +    [9999|999|99 |9 ]
  -----------------------
     [3|10004|999|105|16]
```

Multiplicação de polinômios

```
        [1|2|3|4]
      ·  [10|2|100]
  -----------------------
        [100|200|300|400]
       [2|4|6|8]
  +  [10|20|30|40]
  -----------------------
     [10|22|134|246|308|400]
```

Truque:
Toda vez que você não souber como fazer alguma operação com a notação de caixinhas converta tudo pra polinômios na notação usual e depois converta pra caixinhas cada passo e cada resultado intermediário.

Divisão de polinômios com resto

$$\frac{p(x)}{q(x)} = ?$$

Exemplo simples:

```
        [1|1|1|1|1]
      ×       [1|-1]
  ----------------------
        [-1|-1|-1|-1|-1]
  +  [1|1|1|1|1]
  ----------------------
     [1|0|0|0|0|-1]     ⇐ x^5 - 1
```

$$\frac{x^5}{x-1} = ?$$

Na verdade queremos divisão com resto...

$$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \gamma(x)$$

E quando tem resto?

$$\alpha(x) \underbrace{-\,r(x)}_{\text{novidade}} = \gamma(x)\beta(x)$$

O grau do resto $r(x)$ seja ≤ grau do polinômio do denominador...

```
α(x) ⇒ [1|0|0|0|0|0]  | [1|-1]        ⇐ β(x)
     - [1|-1]         |-------------
       ------------     [1|1|1|1|1]   ⇐ γ(x)
         [1|0|0|0|0]
       - [1|-1]
         ----------
           [1|0|0|0]
         - [1|-1]
           --------
             [1|0|0]
           - [1|1]
             ------
               [1|0]
             - [1|1]
               [1]      ⇐ r(x)
```

Exercício:

```
α(x) = [1|3|5|7]  | [1|0|2]   = β(x)
     - [1|0|2]    |---------
       --------     [1|3]     = γ(x)
         [3|3|7]
       - [3|0|6]
         -------
           [3|1]
           = r(x)
```

Como conferir?
Devemos ter:

$$\frac{\alpha(x)-r(x)}{\beta(x)} = \gamma(x)$$

$$\alpha(x) - r(x) = \gamma(x)\beta(x)$$

C2 13/out/2019
TURMA GRANDE

HOJE:
COMO SIMPLIFICAR FUNÇÕES RACIONAIS IMPRÓPRIAS;
TRUQUES COM POLINÔMIOS...

$\alpha(x) = \boxed{1|3|5|7} = x^3+3x^2+5x+7$

$\beta(x) = \boxed{1|0|2} = x^2+0x+2$

$q(x) = \boxed{1|3} = x+3$

$r(x) = \boxed{3|1} = 3x+1$

$q(x)\cdot\beta(x) = \boxed{1|3}\cdot\boxed{1|0|2} = x^2+0x+2$

$= \boxed{1|3|2|6} = x^3+3x^2+2x+6$

$q(x)\cdot\beta(x)+r(x) =$

$\boxed{1|3|2|6}$
$+\boxed{3|1}$
$= \boxed{1|3|5|7}$

VAMOS AGORA TENTAR ISSO NUM PROBLEMA MAIS "REALISTA"...

$$\begin{array}{l|l} x^3+3x^2+5x+7 & x^2+0x+2 \\ -(x^3+0x^2+2x) & x+3 \\ \hline 3x^2+3x+7 & \\ -(3x^2+0x+6) & \\ \hline 3x+1 & \end{array}$$

DIGAMOS QUE QUEREMOS RESOLVER

$$\int \frac{x^5}{(x-2)(x+5)(x+10)}\,dx = ?$$

$\underbrace{\underbrace{\boxed{1|-2}\cdot\boxed{1|5}}_{\boxed{1|3|-10}}\cdot\boxed{1|10}}_{\boxed{1|13|20|-100}} = \boxed{1|13|20|-100}$

$$\frac{x^5}{(x-2)(x+5)(x+10)} = x^2-13x+149+\frac{1777x^2-4280x-14900}{(x-2)(x+5)(x+10)} \quad (?)$$

NO FIM DA AULA PASSADA VIMOS UMA FÓRMULA PRA OBTER UM SISTEMA QUE NOS PERMITIA RESOLVER O "APART"...

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c} = \frac{\begin{pmatrix}A(x-b)(x-c)+\\(x-a)B(x-c)+\\(x-a)(x-b)C\end{pmatrix}}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

O MÉTODO DE HEAVISIDE VAI NOS PERMITIR RESOLVER O "APART" SEM RESOLVER SISTEMA.

AVISOS:
1) ELE SÓ FUNCIONA QUANDO a,b,c SÃO DIFERENTES,
2) ELE TAMBÉM FUNCIONA PARA 4 FRAÇÕES, 5, 6, ETC, E 2.

RECAPITULANDO:
QUEREMOS RESOLVER ISTO,

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c} = \frac{p(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)} \quad (\star)$$

ONDE a,b,c SÃO NÚMEROS QUE JÁ CONHECEMOS, $p(x)$ É UM POLINÔMIO DE GRAU ≤ 2 QUE JÁ CONHECEMOS, E QUEREMOS DESCOBRIR OS VALORES DE A,B,C QUE FAZEM $(\star)$ SER VERDADEIRA.

OBS: QUEREMOS A,B,C QUE FAZEM $(\star)$ SER VERDADEIRA PRA TODO x EXCETO $x=a$, $x=b$ OU $x=c$, PORQUE NESSES CASOS A GENTE TEM DIVISÃO POR 0.

C2 13/out/2019

TURMA GRANDE

HOJE:
COMO SIMPLIFICAR FUNÇÕES RACIONAIS INFINITAS;
TRUQUES COM POLINÔMIOS...

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}=\frac{p(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

$$\lim_{x\to a}(x-a)\left(\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}\right)=\lim_{x\to a}(x-a)\frac{p(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{\cancel{(x-a)}A}{\cancel{x-a}}+\frac{\cancel{(x-a)B}}{\cancel{x-b}}+\frac{\cancel{(x-a)C}}{\cancel{x-c}}\right) \quad \left(\lim_{x\to a}\frac{p(x)}{(x-b)(x-c)}\right)$$

$$\| \qquad\qquad = \frac{p(a)}{(a-b)(a-c)}$$

$$A$$

PORQUE

$$(=0)\Rightarrow\frac{(a-a)B}{(a-b)}\begin{matrix}\Leftarrow(\in\mathbb{R})\\ \Leftarrow(\neq 0)\end{matrix}$$

OU SEJA:

$$\lim_{x\to a}(x-a)\left(\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}\right)=\lim_{x\to a}(x-a)\frac{p(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

$$A \qquad\qquad \frac{p(a)}{(a-b)(a-c)}$$

$$A=\frac{p(a)}{(a-b)(a-c)}$$

E FAZENDO A MESMA COISA P/ b e c OBTEMOS:

$$B=\frac{p(b)}{(b-a)(b-c)}$$

$$C=\frac{p(c)}{(c-a)(c-b)}$$

EXERCÍCIO: DIGAMOS QUE

$$\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+5}+\frac{C}{x+10}=\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)(x+10)}.$$

ENCONTRE A, B, C.

AULA QUE VEM:

P/ INTEGRAR ALGO COMO

$$\int\frac{p(x)}{q(x)}dx$$

NÓS TEMOS QUE FATORAR $q(x)$...

HEAVISIDE SÓ FUNCIONA QUANDO TODAS AS RAÍZES DO $q(x)$ SÃO DIFERENTES E VIMOS POR ALTO COMO LIDAR COM ALGUNS CASOS COM RAÍZES REPETIDAS...

E OS CASOS COM RAÍZES COMPLEXAS?

$$(x-i)(x+i)=x^2+(i-i)x+(-i)i = x^2+1$$

$$\int\frac{1}{x^2+1}dx=?$$

$$\int\frac{x}{x^2+1}dx=?$$

IDEIA (RUIM): $\alpha\ln|x-i|+\beta\ln|x+i|$

IDEIA (BOA): $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx=?$

SE $x=\operatorname{sen}\theta$, $\int\operatorname{sen}\theta\underbrace{\sqrt{1-(\operatorname{sen}\theta)^2}}_{\cos\theta}\cos\theta\,d\theta$

C2 13/set/2019

TURMA PEQUENA

Hoje: últimos truques pra integrar funções racionais; truques com polinômios; método de Heaviside...

Na aula passada vimos que podíamos integrar algo como

$$\int \frac{x^2}{(x-2)(x+5)}\,dx$$

fazendo:

$$\frac{x^2}{(x-2)(x+5)} = \frac{x^2}{x^2+3x-10} = \frac{(x^2+3x-10)-3x+10}{x^2+3x-10} = \frac{x^2+3x-10}{x^2+3x-10} + \frac{-3x+10}{x^2+3x-10} = 1 + \frac{-3x+10}{(x-2)(x+5)}$$

E a gente viu que dava pra integrar algo como

$$\int \frac{-3x+10}{(x-2)(x+5)}\,dx$$

fazendo o "apart"...

Vamos rever algumas coisas sobre polinômios, e ver uma notação visual (não-padrão!) pra fazer contas com polinômios - a "notação de caixinhas".

No curso nós vamos ter três situações em que vamos precisar manipular polinômios grandes - hoje é a primeira delas.

Exemplo:

$$\underbrace{4x^5}_{\text{coef do } x^5} + \underbrace{6x^4}_{\text{coef do } x^4} + \underbrace{7x^2}_{\text{coef do } x^2} + \underbrace{8x}_{\text{coef do } x^1} + \underbrace{9}_{\text{coef do } x^0}$$

(o coef do x^3 é 0)

Na notação das caixinhas a gente escreve só os coeficientes - o polinômio acima vira:

$$\boxed{4}\boxed{6}\boxed{0}\boxed{7}\boxed{8}\boxed{9}$$

coef do x^5 coef do x^3 coef do x^0

Idéia:

Contas com polinômios são como contas com números, mas sem "vai um"...

$$\begin{array}{rrrr} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{4} \\ + & \boxed{9} & \boxed{99} & \boxed{990} \\ \hline \boxed{1} & \boxed{11} & \boxed{102} & \boxed{1003} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3+2x^2+3x+4 \\ +\quad 9x^2+99x+990 \\ \hline x^3+11x^2+102x+1003 \end{array}$$

Tradução pra notação usual!

Dá pra considerar que a notação das caixinhas vai ser só um jeito da gente se disciplinar pra fazer contas com polinômios alinhando os termos de mesmo grau.

Multiplicação de polinômios

$$\begin{array}{r} (2x^2+3x+4) \\ \cdot\,(2x^2+10x+100) \\ \hline 200x^2+300x+400 \\ 20x^3+30x^2+40x \quad \\ +\quad 4x^4+6x^3+8x^2 \quad\quad \\ \hline 4x^4+26x^3+238x^2+340x+400 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr} & & \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{4} \\ \cdot & & \boxed{2} & \boxed{10} & \boxed{100} \\ \hline & & \boxed{200} & \boxed{300} & \boxed{400} \\ & \boxed{20} & \boxed{30} & \boxed{40} & \\ + \boxed{4} & \boxed{6} & \boxed{8} & & \\ \hline \boxed{4} & \boxed{26} & \boxed{238} & \boxed{340} & \boxed{400} \end{array}$$

Terminologia:

Uma função racional é o quociente de dois polinômios: $\frac{p(x)}{q(x)}$

Se $\operatorname{grau}(p(x)) < \operatorname{grau}(q(x))$ então dizemos que $\frac{p(x)}{q(x)}$ é "própria"; senão dizemos que ela é imprópria.

$$\text{Together}\Big(\underbrace{\frac{A}{x-a}}_{\text{própria}} + \underbrace{\frac{B}{x-b}}_{\text{própria}}\Big) = \underbrace{\frac{(A+B)x+(-Ab-aB)}{(x-a)(x-b)}}_{\text{também é própria!}}$$

$$\text{Together}\left(\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}\right) = \frac{A(x-b)(x-c) + (x-a)B(x-c) + (x-a)(x-b)C}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

C2 13/SET/2019

TURMA PEQUENA

HOJE: ÚLTIMOS TRUQUES PRA INTEGRAR FUNÇÕES RACIONAIS; TRUQUES COM POLINÔMIOS; MÉTODO DE HEAVISIDE...

A GENTE CONSEGUE RESOLVER ALGO DESTE TIPO — ISTO É, ENCONTRAR OS VALORES DE A, B, C — SE E SÓ SE O POLINÔMIO $p(x)$ FOR DE GRAU 2 OU MENOR...

$$\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-5}+\frac{C}{x+10}=\frac{p(x)}{(x-2)(x-5)(x+10)}$$

EXEMPLOS: $p(x)=3x^2+4x+5$ ⇒ DÁ PRA RESOLVER

$p(x)=4x^3$ ⇒ NÃO DÁ PRA RESOLVER.

COMO INTEGRAR $\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$ QUANDO $\frac{p(x)}{q(x)}$ É IMPRÓPRIA?

TRUQUE: DIVISÃO DE POLINÔMIOS COM RESTO

EXEMPLO:

$\boxed{1|1|1|1|1} \cdot \boxed{1|-1}$

$\boxed{-1|-1|-1|-1|-1}$

$\boxed{1|1|1|1|1}$

$\boxed{1|0|0|0|0|-1}$ $=x^5-1$

$$\frac{x^5-1}{x-1}=x^4+x^3+x^2+x+1$$

$$\frac{x^5}{x-1}=?$$

RENOMEANDO:

$$\int\frac{p(x)}{q(x)}\,dx=\int\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\,dx$$

$$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\gamma(x)$$

VERSÃO COM RESTO: $\frac{\alpha(x)-r(x)}{\beta(x)}=\gamma(x)$

ONDE $\mathrm{GRAU}(r(x))<\mathrm{GRAU}(\beta(x))$

$$\alpha(x)-r(x)=\gamma(x)\beta(x)$$

"DIVIDIR $\alpha(x)$ POR $\beta(x)$ COM RESTO" VAI QUERER DIZER: ENCONTRAR $\gamma(x)$ E $r(x)$ OBEDECENDO:

$\alpha(x)-r(x)=\gamma(x)\beta(x)$,

$\mathrm{GRAU}(r(x))<\mathrm{GRAU}(\beta(x))$

DIVISÃO DE POLINÔMIOS COM RESTO, VERSÃO PARECIDA COM AS CONTAS COM NÚMEROS QUE A GENTE VIU QUANDO ERA CRIANÇA:

$\boxed{1|0|0|0|0|0}$ | $\boxed{1|-1}$

$-\boxed{1|-1}$ | $\boxed{1|1|1|1|1}$

$\boxed{1|0|0|0|0}$

$-\boxed{1|-1}$

$\boxed{1|0|0|0}$

$-\boxed{1|-1}$

$\boxed{1|0|0}$

$-\boxed{1|-1}$

$\boxed{1|0}$

$-\boxed{1|-1}$

$\boxed{1}$

EXERCÍCIO:

CALCULE: $\boxed{1|2|3|4|5}$ | $\boxed{1|0|10}$

$-\boxed{1|0|10}$ | $\boxed{1|2|-7}$

$\boxed{2|-7|4|5}$

$-\boxed{2|0|20}$

$\boxed{-7|-16|5}$

$-\boxed{-7|0|-70}$

$\boxed{-16|75}$

CONFIRA: $\boxed{1|2|3|4|5}-\boxed{-16|75}=\boxed{1|0|10}\cdot\boxed{1|2|-7}$

$x^5+0x^4+0x^3+0x^2+0x+0$ | $x-1$

$-(x^5-x^4)$ | $x^4+x^3+x^2+x+1$

$x^4+0x^3+0x^2+0x+0$

$-(x^4-x^3)$

x^3

⋮

1

O MINI-TESTE SOBRE A LISTA DE EXERCÍCIOS QUE EU DISTRIBUÍ HOJE VAI SER DAQUI A UMA SEMANA — 20/SET — NOS ÚLTIMOS 15 MINUTOS DA AULA!

C2 13/SET/2019

TURMA PEQUENA

HOJE: ÚLTIMOS TRUQUES PRA INTEGRAR FUNÇÕES RACIONAIS; TRUQUES COM POLINÔMIOS; MÉTODO DE HEAVISIDE...

MÉTODO DE HEAVISIDE

O MÉTODO DE HEAVISIDE VAI NOS PERMITIR RESOLVER COISAS COMO:

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}=\frac{p(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$ ⇐ TEM QUE SER PRÓPRIA!

SEM A GENTE PRECISAR RESOLVER SISTEMAS.

OBS: ELE SÓ FUNCIONA SE a,b,c FOREM DIFERENTES;
ELE TAMBÉM FUNCIONA PARA 4, 5, 6, ... FRAÇÕES E PRA 2 FRAÇÕES.
a,b,c SÃO NÚMEROS QUE A GENTE JÁ CONHECE, E CONHECEMOS O POLINÔMIO $p(x)$ (E $\mathrm{grau}(p(x)) < \mathrm{grau}((x-a)(x-b)(x-c))$)
QUEREMOS DESCOBRIR A, B, C.

EXEMPLO:

$$\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-5}+\frac{C}{x+10}=\frac{3x^2+4x+5}{(x-2)(x-5)(x+10)}$$

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}=\frac{p(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

$$\lim_{x\to a}(x-a)\left(\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}\right)=\lim_{x\to a}\cancel{(x-a)}\frac{p(x)}{\cancel{(x-a)}(x-b)(x-c)}$$

$$\underbrace{\lim_{x\to a}\left(\frac{\cancel{(x-a)}A}{\cancel{x-a}}+\frac{(x-a)B}{x-b}+\frac{(x-a)C}{x-c}\right)}_{\substack{\| \\ A+0+0 \\ \| \\ A}} \qquad \lim_{x\to a}\frac{p(x)}{(x-b)(x-c)} = \frac{p(a)}{(a-b)(a-c)}$$

TRUQUES PRO LADO ESQUERDO:

$$\lim_{x\to a}\frac{\overset{\to 0}{(x-a)}\,\overset{\in\mathbb{R}}{B}}{\underset{\neq 0}{(x-b)}}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{(x-a)B}{x-b}=\lim_{x\to a}\frac{(a-a)B}{a-b}=\frac{0\cdot B}{a-b}=0$$

$$\underbrace{\lim_{x\to a}(x-a)\left(\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}\right)}_{=A}=\underbrace{\lim_{x\to a}(x-a)\frac{p(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}}_{=\frac{p(a)}{(a-b)(a-c)}}$$

E SE FIZERMOS "$\lim_{x\to b}(x-b)$" VAMOS OBTER:

$$B=\frac{p(b)}{(b-a)(b-c)}$$

SIMILARMENTE,

$$C=\frac{p(c)}{(c-a)(c-b)}.$$

O MINI-TESTE SOBRE A LISTA DE EXERCÍCIOS QUE EU DISTRIBUÍ HOJE VAI SER DAQUI A UMA SEMANA -20/SET- NOS ÚLTIMOS 15 MINUTOS DA AULA!

EXERCÍCIO:
CALCULE:

$$\int\frac{x^4}{(x-2)(x+5)}\,dx$$

USANDO DIVISÃO COM RESTO E HEAVISIDE.

⇐ CASA: FAÇA ISSO E CONFIRA A SUA RESPOSTA USANDO TFC2!

C2 13/SET/2019

TURMA PEQUENA

HOJE: ÚLTIMOS TRUQUES PRA INTEGRAR FUNÇÕES RACIONAIS; TRUQUES COM POLINÔMIOS; MÉTODO DE HEAVISIDE...

PRÓXIMA AULA:

LEMBREM QUE A GENTE SABE INTEGRAR ISTO NUM MONTE DE CASOS...

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$$

A GENTE TEM QUE FATORAR $q(x)$ E O MÉTODO DE HEAVISIDE SÓ FUNCIONA SEM RAÍZES REPETIDAS...

$$(x+i)(x-i) = x^2 + \cancel{xi} - \cancel{ix} + i(-i)$$
$$= x^2 + 1$$

x^2+1 TEM RAÍZES COMPLEXAS!

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = ?$$

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = ?$$

IDÉIA (RUIM): $\alpha \ln|x-i| + \beta \ln|x+i|$!!

SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA:

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx \qquad \left[\begin{array}{l} x = \operatorname{sen}\theta \\ \frac{dx}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\operatorname{sen}\theta = \cos\theta \\ dx = \cos\theta\,d\theta \end{array}\right]$$

$$= \int \operatorname{sen}\theta \underbrace{\sqrt{\underbrace{1-(\operatorname{sen}\theta)^2}_{(\cos\theta)^2}}}_{\cos\theta} \cos\theta\,d\theta$$

C2 18/set/2019

Turma pequena

Hoje: substituição trigonométrica!

Idéia geral: é difícil integrar coisas como

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$$

por causa do

$$\sqrt{1-x^2},$$

mas dá pra converter a integral acima em algo em termos de senos e cossenos...

Obs: os livros costumam apresentar substituição trigonométrica usando um método que eu achava impossível de decorar e que a gente vai dividir em vários passos.

Substituição trigonométrica - passo principal - caso do seno - exemplo 1

Ah, tem um truque que eu vou usar algumas vezes durante o curso - certas letras vão ter significados default. As que vamos usar agora são:

$s = \operatorname{sen}\theta$ ⟸ mais fácil

$t = \tan\theta$

$z = \sec\theta$

Exemplo 1

$$\int s\sqrt{1-s^2}\,ds = ?$$

Se substituirmos s por sen θ vamos ter:

$$\int \underbrace{s}_{\operatorname{sen}\theta}\ \underbrace{\sqrt{\underbrace{1-\underbrace{s^2}_{\substack{\operatorname{sen}\theta\\(\operatorname{sen}\theta)^2}}}_{(\cos\theta)^2}}}_{\cos\theta}\ \underbrace{ds}_{\substack{?\\ \cos\theta\,d\theta}}$$

$$\frac{ds}{d\theta} = ?$$

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}s = \frac{d}{d\theta}\operatorname{sen}\theta = \cos\theta$$

$$\frac{ds}{d\theta} = \cos\theta$$

$$ds = \cos\theta\,d\theta$$

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = \quad \begin{bmatrix} s = x \\ ds = dx \end{bmatrix}$$

$$\int s\sqrt{1-s^2}\,ds = \quad \begin{bmatrix} s = \operatorname{sen}\theta \\ ds = \cos\theta\,d\theta \end{bmatrix}$$

$$\int \operatorname{sen}\theta\cos\theta\cos\theta\,d\theta =$$

$$\int \operatorname{sen}\theta\,(\cos\theta)^2\,d\theta =$$

$$\int (\cos\theta)^2\operatorname{sen}\theta\,d\theta = \quad \begin{bmatrix} c = \cos\theta \\ \frac{dc}{d\theta} = -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta\,d\theta = (-1)\,dc \end{bmatrix}$$

$$\int c^2\,(-1)\,dc =$$

$$-\int c^2\,dc =$$

$$-\frac{c^3}{3} =$$

$$-\frac{(\cos\theta)^3}{3} =$$

$$-\frac{(\cos\operatorname{arcsen} s)^3}{3} =$$

$$-\frac{(\cos\operatorname{arcsen} x)^3}{3}$$

⟸ Como é que a gente volta pra variável x?

Ou seja:

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{(\cos(\operatorname{arcsen} x))^3}{3}$$

Como é que a gente verifica isso?

$$\underbrace{\int x\sqrt{1-x^2}\,dx}_{\substack{\text{Será que}\\ \text{isto é}\\ F'(x)?}} = \underbrace{-\frac{(\cos\operatorname{arcsen} x)^3}{3}}_{F(x)}$$

Como é que a gente deriva esse $F(x)$? Regra da cadeia várias vezes, e temos que saber $\frac{d}{dx}\operatorname{arcsen} x$...

Dá pra descobrir $\frac{d}{dx}\operatorname{arcsen} x$ de um jeito parecido com o que a gente fez pra descobrir $\frac{d}{dx}\ln x$... Usamos isto: se $f(g(x)) = x$ então $\frac{d}{dx}f(g(x)) = \frac{d}{dx}x = 1$

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))\,g'(x),$$

e daí $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$

C2 18/set/2019

Turma pequena

Hoje: substituição trigonométrica!

Jeito mais fácil (depende da gente entender as relações entre as variáveis que usamos — x, s, θ, c ...

$x = s$

$s = \operatorname{sen}\theta$ $\quad \theta = \operatorname{arcsen} s$

$c = \cos\theta$ $\quad \theta = \operatorname{arccos} c$

$c = \sqrt{1-s^2}$

$= \sqrt{1-x^2}$

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = \quad [s=x]$$

$$\int s\sqrt{1-s^2}\,ds = \quad \begin{bmatrix} s=\operatorname{sen}\theta \\ ds=\cos\theta\,d\theta\end{bmatrix}$$

$$\int \operatorname{sen}\theta\cos\theta\cos\theta\,d\theta =$$

$$\int(\cos\theta)^2\operatorname{sen}\theta\,d\theta = \quad \begin{bmatrix} c=\cos\theta \\ \frac{dc}{d\theta}=-\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta\,d\theta=(-1)\,dc\end{bmatrix}$$

$$\int c^2(-1)\,dc =$$

$$-\int c^2\,dc =$$

$$-\frac{c^3}{3} =$$

$$-\frac{\sqrt{1-s^2}^3}{3} =$$

$$-\frac{\sqrt{1-x^2}^3}{3}$$

Como testar isso?

$$\int \underbrace{x\sqrt{1-x^2}}_{\substack{\text{será que} \\ \text{isto é} \\ F'(x)?}}\,dx = \underbrace{-\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}^3}_{F(x)}$$

Dica:
Comece fazendo uma tabela das derivadas das subexpressões de $F(x)$:

$$\frac{d}{dx}(1-x^2) = -2x$$

$$\frac{d}{dx}\sqrt{1-x^2} = \frac{d}{dx}(1-x^2)^{1/2} = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2}(-2x)$$

$$\frac{d}{dx}\sqrt{1-x^2}^3 = \frac{d}{dx}(1-x^2)^{3/2} = \frac{3}{2}(1-x^2)^{1/2}(-2x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}^3\right) = +\frac{1}{\cancel{3}}\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}(1-x^2)^{1/2}(+\cancel{2}x)$$

$$= (1-x^2)^{1/2}\cdot x$$

$$= x\sqrt{1-x^2}$$

Agora algo um pouquinho mais geral:

$$\int x^\alpha\sqrt{1-x^2}^\beta\,dx = ?$$

Converta isto em algo como

$$\int k(\operatorname{sen}\theta)^\gamma(\cos\theta)^\delta\,d\theta.$$

Refaçam em casa!

Até agora usamos $s = \operatorname{sen}\theta$ ...

Vamos ver os casos $z = \sec\theta$ e $t = \tan\theta$.

Importante:
z e t obedecem certas relações parecidas com $c^2+s^2=1$ ...

Lembre que:

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$t = \frac{s}{c}$$

$$z = \frac{1}{c}$$

$$t^2 = \frac{s^2}{c^2}$$

$$z^2 = \frac{1}{c^2} = \frac{c^2+s^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}+\frac{s^2}{c^2} = 1+t^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} z^2 &= 1+t^2 \\ z^2-t^2 &= 1 \\ t^2 &= z^2-1\end{aligned}} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} z &= \sqrt{1+t^2} \\ t &= \sqrt{z^2-1}\end{aligned}}$$

Essas relações —

$$z = \sqrt{1+t^2}$$

$$t = \sqrt{z^2-1}$$

quase são o suficiente pra gente aprender a resolver coisas como

$$\int \underbrace{t}_{\frac{s}{c}}\underbrace{\sqrt{1+t^2}}_{\underbrace{z}_{\frac{1}{c}}}\underbrace{dt}_{?}$$

mas ainda não sabemos expandir o dt — e nem o dz ...

Caso da secante:

$$\int \underbrace{z}_{1/c}\underbrace{\sqrt{z^2-1}}_{\underbrace{t}_{\frac{s}{c}}}\underbrace{dz}_{?}$$

C2 18/set/2019

Turma pequena

Hoje: substituição trigonométrica!

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\tan\theta = \frac{d}{d\theta}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\sec\theta = \frac{d}{d\theta}\frac{1}{\cos\theta}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

$$\frac{d}{d\theta}\frac{s}{c} = \frac{s'c - sc'}{c^2} = \frac{cc - s(-s)}{c^2} = \frac{c^2+s^2}{c^2} = \frac{1}{c^2} = z^2$$

$$\boxed{\frac{d}{d\theta}t = z^2}$$

$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\frac{1}{c} = \frac{1'c - 1c'}{c^2} = \frac{0\cdot c - 1(-s)}{c^2} = \frac{s}{c^2} = \frac{1}{c}\frac{s}{c} = zt$$

$$\boxed{\frac{dz}{d\theta} = zt}$$

Com estas duas fórmulas,

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{dt}{d\theta} &= z^2\\ \frac{dz}{d\theta} &= zt\end{aligned}} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned}dt &= z^2\,d\theta\\ dz &= zt\,d\theta\end{aligned}}$$

Exercícios:

1. Faça o primeiro passo da substituição trigonométrica aqui:

$$\int t\sqrt{1+t^2}\,dt = ?$$

Aliás, faça o passo seguinte também — transformem a integral acima numa dessa forma:

$$\int k\,(\cos\theta)^\gamma(\operatorname{sen}\theta)^\delta\,d\theta$$

2. Faça a mesma coisa para:

$$\int z\sqrt{z^2-1}\,dz = ?$$

3. Idem para:

$$\int t^\alpha\sqrt{1+t^2}^{\,\beta}\,dt$$

4. Idem para

$$\int z^\alpha\sqrt{z^2-1}^{\,\beta}\,dz.$$

Casa!!!

Muito importante!

Eu avisei que isso era um dos passos da substituição trigonométrica...

O que a gente viu serve pra gente lidar com integrais cujo "termo ruim" é da forma

$\sqrt{1-x^2}$, ⇐ use $s=x$

$\sqrt{1+x^2}$, ⇐ use $t=x$

$\sqrt{x^2+1}$ ... ⇐ use $z=x$

E se o termo ruim for algo como:

$$\sqrt{\underbrace{4}_{\text{não é 1!}} - \underbrace{9}_{\text{não é 1!}}x^2}\ ?$$

!!

$$\sqrt{4-9x^2} = \sqrt{4\left(1-\tfrac{9}{4}x^2\right)} = \sqrt{4}\sqrt{1-\tfrac{9}{4}x^2} = 2\sqrt{1-\tfrac{9}{4}x^2} = 2\sqrt{1-\left(\tfrac{3}{2}x\right)^2} = 2\sqrt{1-u^2} = 2\sqrt{1-s^2}$$

$\left[u = \frac{3}{2}x\right]$ $\quad [s = u]$

Exemplo:

$$\int x\sqrt{4-9x^2}\,dx = \int x\cdot 2\sqrt{1-\left(\tfrac{3}{2}x\right)^2}\,dx = \int\left(\tfrac{2}{3}u\right)\cdot 2\sqrt{1-u^2}\cdot\tfrac{2}{3}\,du = \int 2u\sqrt{1-u^2}\,du = 2\int u\sqrt{1-u^2}\,du$$

$$\left[\begin{aligned}u &= \tfrac{3}{2}x\\ \tfrac{du}{dx} &= \tfrac{3}{2}\\ du &= \tfrac{3}{2}dx\\ dx &= \tfrac{2}{3}du\end{aligned}\right]$$

C2 18/set/2019

TURMA PEQUENA

HOJE: SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA!

ÀS VEZES SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA VAI NOS SALVAR EM CASOS EM QUE A RAIZ QUADRADA NÃO ESTÁ EXPLÍCITA...

COISAS PENDENTES DO FINAL DA AULA PASSADA:

$$(x+i)(x-i) = x^2 + \cancel{ix} - \cancel{ix} + i(-i)$$
$$= x^2+1$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = ?$$
$$\int \frac{1}{(x-i)(x+i)}\,dx = ☹$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx =$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}^{\,2}}\,dx =$$
$$\int x^0 \sqrt{x^2+1}^{\,-2}\,dx = \quad [z=x]$$
$$\int z^0 \sqrt{z^2+1}^{\,-2}\,dz =$$

☺ (CASA!)

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \quad [z=x]$$
$$(\ldots) =$$
$$\int z^1 \sqrt{z^2+1}^{\,-2}\,dz$$

(CASA!)

AVISOS:

SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA:

- TEM VÁRIOS CASOS
- DÁ UM TRABALHÃO
- A GENTE ERRA MUITO...

ENTÃO:

$\boxed{\text{TREINEM!}}$

A PÁGINA DO CURSO TEM LINKS PRA VÁRIAS LISTAS DE EXERCÍCIOS ANTIGAS DE NITERÓI... ALGUNS DOS EXERCÍCIOS DIZEM EXPLICITAMENTE "RESOLVA POR SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA". TENTE FAZÊ-LOS!

C2 19/SET/2019
TURMA GRANDE

- AVISO SOBRE DATAS DE PROVAS E MINI-TESTES:
  - PRECISAMOS CONFIRMAR QUE A P1 NÃO CAI NA SEMANA ACADÊMICA
  - EU NÃO LEMBRAVA SE O MINI-TESTE IA SER HOJE, OLHEI AS FOTOS DOS QUADROS E NÃO ACHEI UM AVISO DE QUE SERIA HOJE. OS MINI-TESTES VÃO SER EM DIAS MARCADOS CLARAMENTE - E EM QUINTAS-FEIRAS.

HOJE: SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA!

IDÉIA GERAL: COMO É QUE A GENTE INTEGRA COISAS EM QUE

$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$,

EM QUE O "TERMO RUIM" DO INTEGRANDO É ALGO COMO $\sqrt{1-x^2}$?

TRUQUE (VERSÃO SIMPLES): FAZENDO A SUBSTITUIÇÃO $x = \operatorname{sen}\theta$ TEMOS:

$$\int \underbrace{x}_{\operatorname{sen}\theta} \underbrace{\underbrace{\sqrt{1-\underbrace{x^2}_{\substack{\operatorname{sen}\theta \\ (\operatorname{sen}\theta)^2}}}}_{(\cos\theta)^2}}_{\cos\theta} \underbrace{dx}_{\substack{? \\ \cos\theta\, d\theta}}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\operatorname{sen}\theta = \cos\theta$$
$$dx = \cos\theta\, d\theta$$

OU SEJA,

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = \quad \begin{bmatrix} x = \operatorname{sen}\theta \\ dx = \cos\theta\, d\theta \end{bmatrix}$$
$$\int \operatorname{sen}\theta\, (\cos\theta)^2\, d\theta =$$

UM TRUQUE EXTRA: ALGUMAS VARIÁVEIS - LETRAS - VÃO TER SIGNIFICADOS DEFAULT PRA GENTE:

$s = \operatorname{sen}\theta$ $\quad c = \cos\theta$
$t = \tan\theta$
$z = \sec\theta$

QUANDO A GENTE USAR "s" AO INVÉS DE "x" A GENTE VAI ESTAR DEIXANDO CLARO QUE SUBSTITUIÇÃO A GENTE VAI FAZER...

$$\int s\sqrt{1-s^2}\,ds =$$
$$\int \operatorname{sen}\theta\cos\theta\cos\theta\, d\theta$$

QUANDO O "TERMO RUIM" FOR $\sqrt{1-x^2}$ A GENTE USA SENO.
(VAMOS VER OS CASOS COM tan E sec DAQUI A POUCO).

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = \begin{bmatrix} s = x \\ dx = ds \end{bmatrix}$$
$$\int s\sqrt{1-s^2}\,ds = \begin{bmatrix} s = \operatorname{sen}\theta \\ ds = \cos\theta\, d\theta \end{bmatrix}$$
$$\int \operatorname{sen}\theta\,(\cos\theta)^2\, d\theta =$$
$$\int (\cos\theta)^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta = \begin{bmatrix} c = \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta\, d\theta = (-1)\,dc \end{bmatrix} \Leftarrow \quad \frac{dc}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\cos\theta = -\operatorname{sen}\theta$$
$$\operatorname{sen}\theta\, d\theta = (-1)\, dc$$
$$\int c^2\,(-1)\,dc =$$
$$-\int c^2\,dc =$$
$$-\frac{c^3}{3} =$$
$$-\frac{(\cos\theta)^3}{3} =$$
$$-\frac{(\cos\operatorname{arcsen} s)^3}{3} = -\frac{(\cos\operatorname{arcsen} x)^3}{3}$$

ESSE MODO FUNCIONA (!!!) E ISTO É VERDADE:

$$\underbrace{\int x\sqrt{1-x^2}\,dx}_{\substack{\text{SERÁ QUE } F'(x) \text{ É} \\ \text{ISTO? SE FOR,} \\ \text{FUNCIONOU...}}} = \underbrace{-\frac{(\cos\operatorname{arcsen} x)^3}{3}}_{\substack{\text{SEJA } F(x) \\ \text{IGUAL A ISTO}}}$$

C2 19/set/2019

TURMA GRANDE

- Aviso sobre datas de provas e mini-testes:
  - Precisamos confirmar que a P1 não cai na semana acadêmica
  - Eu não lembrava se o mini-teste ia ser hoje, olhei as fotos dos quadros e não achei um aviso de que seria hoje. Os mini-testes vão ser em dias marcados claramente - e em quintas-feiras.

P1: 31/out

Primeiro mini-teste: 26/set.

Po~~demos conferir~~

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = \underbrace{-\frac{1}{3}(\cos \operatorname{arcsen} x)^3}_{F(x)}$$

Pelo TFC2...

Como a gente calcula $F'(x)$?

Lembre de como a gente descobriu que

$$\ln' x = \frac{1}{x} \ \ldots$$

Se $f(g(x)) = x$

Então $\frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{d}{dx} x = 1$

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))\,g'(x)$$

E portanto

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

Dá pra usar isso pra calcular $\frac{d}{dx} \operatorname{arcsen} x$...

Mas dá pra fazer algo melhor.

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = \quad [x=s]$$

$$\int s\sqrt{1-s^2}\,ds = \quad [s=\operatorname{sen}\theta]$$

$$\int (\cos\theta)^2 \operatorname{sen}\theta\,d\theta = \quad [c=\cos\theta]$$

$$\int -c^2\,dc =$$

$$-\frac{c^3}{3} =$$

$$-\frac{\sqrt{1-s^2}^3}{3} =$$

$$-\frac{\sqrt{1-x^2}^3}{3}$$

Lembre que

$c^2+s^2=1$

$c^2 = 1-s^2$

$c = \sqrt{1-s^2}$

Ou seja:

$$\underbrace{\int x\sqrt{1-x^2}\,dx}_{\substack{\text{Será que}\\ F'(x) \text{ é isto?}}} \Leftarrow\!= \underbrace{-\frac{\sqrt{1-x^2}^3}{3}}_{\substack{\text{Seja } F(x)\\ \text{igual a isto.}}}$$

Como conferir esse "="?
Pelo TFC2! Nessa ordem:

Exercício:

(1) Seja $F(x) = -\frac{\sqrt{1-x^2}^3}{3}$.

Calcule $F'(x)$.

Dica:
Faça uma tabela com as derivadas das subexpressões de $F(x)$:

$$\frac{d}{dx}(1-x^2) =$$

$$\frac{d}{dx}\sqrt{1-x^2} =$$

$$\frac{d}{dx}\sqrt{1-x^2}^3 =$$

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}^3\right) =$$

CASA! IMPORTANTE!

A gente viu como calcular

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx \ \ldots$$

Em geral a gente vai usar substituição trigonométrica em coisas desta forma:

$$\int x^\alpha \sqrt{1-x^2}^\beta\,dx$$

(embora ela funcione também pra algumas expressões mais complicadas).

(2) Exercício:
Faça o <u>primeiro passo</u> da s.t. aqui:

$$\int s^\alpha \sqrt{1-s^2}^\beta\,ds =$$

$$\int k(\cos\theta)^\gamma(\operatorname{sen}\theta)^\delta\,d\theta$$

Descubra k, γ, δ.

C2 19/set/2019

Turma grande

- Aviso sobre datas de provas e mini-testes:
  - Precisamos confirmar que a P1 não cai na semana acadêmica
  - Eu não lembrava se o mini-teste ia ser hoje, olhei as fotos dos quadros e não achei um aviso de que seria hoje. Os mini-testes vão ser em dias marcados claramente - e em quintas-feiras.

$\boxed{\text{P1: 31/out} \quad \text{Primeiro mini-teste: 26/set.}}$

Fato importante (que a gente não costuma ver em Cálculo 1):

Secante e tangente obedecem coisas parecidas com:

$$c^2+s^2=1$$
$$c=\sqrt{1-s^2}$$
$$s=\sqrt{1-c^2}$$
$$\frac{ds}{d\theta}=c \quad \Rightarrow \quad ds=c\,d\theta$$
$$\frac{dc}{d\theta}=-s \quad \Rightarrow \quad dc=-s\,d\theta$$

Lembre:

$$t=\tan\theta=\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}=\frac{s}{c}$$
$$z=\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}=\frac{1}{c}$$

$$t^2=\frac{s^2}{c^2}$$
$$z^2=\frac{1}{c^2}=\frac{c^2+s^2}{c^2}=\frac{c^2}{c^2}+\frac{s^2}{c^2}=1+t^2$$
$$t^2=z^2-1$$

$$z=\sqrt{1+t^2}$$
$$t=\sqrt{z^2-1}$$

E daí:

$$\int x\underbrace{\sqrt{1+x^2}}_{\text{"termo ruim"}}dx = \quad [t=x]$$

$$\int \underbrace{\underbrace{t}_{\tan\theta}}_{\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}} \underbrace{\underbrace{\sqrt{1+\underbrace{\underbrace{t^2}_{\tan\theta}}_{(\tan\theta)^2}}}_{\sec\theta}}_{1/\cos\theta} \underbrace{dt}_{?} = [t=\tan\theta]$$

Falta a gente saber como lidar com o dt!

$$\frac{dt}{d\theta}=?$$
$$\frac{dt}{d\theta}=\frac{d}{d\theta}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$
$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$
$$\frac{d}{d\theta}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}=\frac{\operatorname{sen}'\theta\cos\theta-\operatorname{sen}\theta\cos'\theta}{(\cos\theta)^2}$$
$$\frac{d}{d\theta}\frac{s}{c}=\frac{s'c-sc'}{c^2}=\frac{cc-s(-s)}{c^2}=\frac{c^2+s^2}{c^2}=\frac{1}{c^2}=z^2$$

$$\frac{dz}{d\theta}=?$$
$$\frac{d}{d\theta}z=\frac{d}{d\theta}\frac{1}{c}=\frac{1'c-1\cdot c'}{c^2}=\frac{0-(-s)}{c^2}=\frac{s}{c^2}=\frac{1}{c}\frac{s}{c}=zt$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\dfrac{dt}{d\theta}=z^2\\[2ex] \dfrac{dz}{d\theta}=zt\end{array}} \quad \begin{array}{l}\Rightarrow\\[2ex]\Rightarrow\end{array} \quad \boxed{\begin{array}{l}dt=z^2\,d\theta\\[2ex] dz=zt\,d\theta\end{array}}$$

$$\int \underbrace{t}_{\tan\theta}\underbrace{\sqrt{1+t^2}}_{\sec\theta}\underbrace{dt}_{(\sec\theta)^2d\theta} = \left[\begin{array}{l}t=\tan\theta\\ \sqrt{1+t^2}=\sec\theta\\ dt=(\sec\theta)^2d\theta\end{array}\right]$$

$$\int \tan\theta(\sec\theta)^3d\theta=\int\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^3d\theta$$

(3) Exercício:

Descubra K,γ,δ em:

$$\int t^{\alpha}\sqrt{1+t^2}^{\beta}dt=$$
$$\int K(\cos\theta)^{\gamma}(\operatorname{sen}\theta)^{\delta}d\theta$$

C2 19/SET/2019

TURMA GRANDE

- Aviso sobre datas de provas e mini-testes:
- Precisamos confirmar que a P1 não cai na semana acadêmica
- Eu não lembrava se o mini-teste ia ser hoje, olhei as fotos dos quadros e não achei um aviso de que seria hoje. Os mini-testes vão ser em dias marcados claramente - e em quintas-feiras.

P1: 31/OUT

Primeiro mini-teste: 26/SET.

$s = \operatorname{sen}\theta$
$\sqrt{1-s^2} = c$
$ds = c\,d\theta$

$t = \tan\theta$
$\sqrt{1+t^2} = z$
$dt = z^2 d\theta$

$z = \sec\theta$
$\sqrt{z^2-1} = t$
$dz = zt\,d\theta$

A maioria dos problemas sobre substituição trigonométrica em listas de exercícios supõem que vocês saibam o segundo passo:

Como é que a gente lida com "termos ruins" como por exemplo isto?

$\sqrt{\underset{\text{não é } 1}{4} - \underset{\text{não é } 1}{9}x^2}$

$\sqrt{4-9x^2} =$

$\sqrt{4(1-\frac{9}{4}x^2)} =$

$\sqrt{4}\sqrt{1-\frac{9}{4}x^2} =$

$2\sqrt{1-\frac{9}{4}x^2} =$

$2\sqrt{1-(\frac{3}{2}x)^2} =$ $\quad [u = \frac{3}{2}x]$

$2\sqrt{1-u^2}$

$\int x\sqrt{4-9x^2}\,dx =$

$\int \underbrace{x}_{\frac{2}{3}u} \cdot 2\sqrt{1-(\underbrace{\tfrac{3}{2}x}_{u})^2}\,\underbrace{dx}_{\frac{2}{3}du} =$ $\quad \begin{bmatrix} u = \frac{3}{2}x \\ x = \frac{2}{3}u \\ dx = \frac{2}{3}du \end{bmatrix}$

$\int \frac{2}{3}u \cdot 2\sqrt{1-u^2} \cdot \frac{2}{3}du =$

$\frac{8}{9}\int u\sqrt{1-u^2}\,du =$ $\quad [s = u]$

$\frac{8}{9}\int s\sqrt{1-s^2}\,ds$

Na página do curso tem links pra listas antigas de C2 do GMA (um departamento da UFF de Niterói)...

Alguns dos problemas dizem claramente "Resolva por subst. trigonométrica" -

Dicas:

(I) Comecem por esses problemas,
(II) Sempre verifiquem as respostas de vocês por TFC2,
(III) Treinem muito.

Obs: A gente viu na aula sobre frações parciais que pra resolver coisas como:

$\int \frac{1}{(x-i)(x+i)}dx = ?$

$\int \frac{1}{x^2+1}dx$

Truque:

$\int \frac{1}{x^2+1}dx =$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}^{\,2}}dx =$

$\int \sqrt{x^2+1}^{\,(-2)}dx$

Sobre a aula de amanhã:

$\int (\cos\theta)^2(\operatorname{sen}\theta)^2 d\theta = ?$!!

Ambos pares

Método tradicional: várias identidades trigonométricas (difíceis, arbitrárias)

Vamos usar um método baseado em

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$

Amanhã: vamos começar a ver isso.

C2 20/SET/2019

TURMA GRANDE

Hoje:

- INTRODUÇÃO À SÉRIE DE TAYLOR
- COMO CALCULAR BOAS APROXIMAÇÕES PARA e^x, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ NA MÃO
- $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$
- COMO USAR ISSO PRA RESOLVER TODOS OS PROBLEMAS QUE EXIGEM IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS !!

(E AÍ VOCÊS VÃO APRENDER UM MÉTODO QUE QUANDO VOCÊS FIZEREM NA PROVA VAI SER MUITO MAIS FÁCIL DE CORRIGIR DO QUE AS CONTAS COM IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS!)

COMO RECUPERAR UM POLINÔMIO A PARTIR DAS SUAS DERIVADAS?

NO PONTO X=0

DEFS: $\operatorname{derivs}(f) = (f, f', f'', f''', f'''', f^{(5)}, \ldots)$

$\operatorname{derivs}_0(f) = (f(0), f'(0), f''(0), f'''(0), \ldots)$

EXEMPLOS:

SE $f(x) = 4x^2+5x+6$

ENTÃO $f'(x) = 8x+5$

$f''(x) = 8$

$f'''(x) = 0$

$f''''(x) = 0$

SE $g(x) = e^x$

$g'(x) = e^x$

$g''(x) = e^x$

$g'''(x) = e^x$

$\operatorname{derivs}(f) = (4x^2+5x+6,\ 8x+5,\ 8, 0, 0, \ldots)$

$\operatorname{derivs}(g) = (e^x, e^x, e^x, \ldots)$

$\operatorname{derivs}_0(f) = (6, 5, 8, 0, 0, 0, \ldots)$

$\operatorname{derivs}_0(g) = (1, 1, 1, 1, 1, \ldots)$

EXERCÍCIOS:

CALCULE:

1. $\operatorname{derivs}(100x^3 + 1000x^2 + 10000x + 100000)$
2. derivs_0 DA FUNÇÃO ACIMA
3. $\operatorname{derivs}(ax^4+bx^3+cx^2+dx+e)$
4. derivs_0 DA FUNÇÃO ACIMA
5. $\operatorname{derivs}(\operatorname{sen} x)$
6. $\operatorname{derivs}_0(\operatorname{sen} x)$
7. $\operatorname{derivs}(\cos x)$
8. $\operatorname{derivs}_0(\cos x)$
9. SE $\operatorname{derivs}_0(ax^4+bx^3+cx^2+dx+e) = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, 0, 0, 0, 0, \ldots)$, QUEM SÃO a, b, c, d, e?

DICA: SEJA $f(x) = ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$. CALCULEM $f'(x), f''(x), \ldots$ $f(0), f'(0), f''(0), \ldots$

LEMBRE QUE USAMOS "$p(x)$" PRA DENOTAR UM POLINÔMIO...

SE $\operatorname{derivs}_0(p(x)) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots)$

ENTÃO $p(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$

ISTO AQUI É MAIS CLARO:

SE $\operatorname{derivs}_0(p(x)) = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, 0, 0, 0, \ldots)$

ENTÃO $p(x) = a_0$

$+ a_1 x$

$+ \frac{a_2}{2} x^2$

$+ \frac{a_3}{6} x^3$

$+ \frac{a_4}{24} x^4$

$+ \frac{a_5}{120} x^5$

$0! = 1$

$1! = 1$

$2!$

$3!$

$4!$

$5!$

E SE A GENTE FINGIR QUE JÁ PODE FAZER ISSO COM "POLINÔMIOS INFINITOS"?

SE $\operatorname{derivs}_0(p(x)) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots)$

ENTÃO $p(x) =$

$1x^0 +$

$1x^1 +$

$\frac{1}{2}x^2 +$

$\frac{1}{6}x^3 +$

$\frac{1}{24}x^4 + \ldots$

$p(0.1) = 1 +$

$1 \cdot 0.1 +$

$\frac{1}{2} \cdot 0.01 +$

$\frac{1}{6} \cdot 0.001 +$

$\frac{1}{24} \cdot 0.0001 + \ldots$

AS PESSOAS VIRAM QUE OS TERMOS DESSA SÉRIE, ISTO É, DESTE SOMATÓRIO, VÃO FICANDO CADA VEZ MENORES...

C2 20/SET/2019

TURMA GRANDE

Hoje:

- Introdução à série de Taylor
- Como calcular boas aproximações para e^x, $\text{sen}\, x$, $\cos x$ na mão
- $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$
- Como usar isso pra resolver todos os problemas que exigem identidades trigonométricas!! (E aí vocês vão aprender um método que quando vocês fizerem na prova vai ser muito mais fácil de corrigir do que as contas com identidades trigonométricas!)

A série de Taylor do e^x (obs: "em $x=0$") é:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \Leftarrow ?$$

A série de Taylor do e^x truncada em grau N é:

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} x^k$$

Versão formal:

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} x^k = e^x$$

Em português: para todo $x \in \mathbb{R}$ esse limite existe e é igual a e^x.

Dá pra fazer isso também pra $\text{sen}\, x$ e $\cos x$... mas as fórmulas são um pouco mais complicadas.

$\text{derivs}_0(\cos x) = (1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, \ldots)$

$\text{derivs}_0(\text{sen}\, x) = (0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \ldots)$

Séries de Taylor:

$$\cos x = 1x^0 + 0x^1 - \frac{1}{2}x^2 + 0x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots$$

$$= 1 \quad -\frac{1}{2}x^2 \quad + \frac{1}{4!}x^4 \quad - \frac{1}{6!}x^6 + \ldots$$

$$\text{sen}\, x = \quad x \quad - \frac{1}{3!}x^3 \quad + \frac{1}{5!}x^5 \quad - \ldots$$

A partir de agora vamos acreditar que

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots,$$

$$\cos x = 1 \quad - \frac{1}{2!}x^2 \quad + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots$$

$$\text{sen}\, x = \quad x \quad - \frac{1}{3!}x^3 \quad + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots$$

Valem sempre.

x real: OK.

x complexo: novidade, vamos tentar entender!

Um caso simples:

$e^i = ?$

$$(a+ib)(c+id) = ac + ibc + iad - bd$$

$$= \underbrace{(ac-bd)}_{\text{parte real}} + i\underbrace{(bc+ad)}_{\text{parte imaginária}}$$

$i^0 = 1$

$i = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = -i$

$i^4 = 1$

$i^5 = i$

$i^6 = -1$

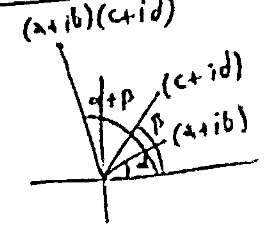
$i^7 = -i$

$i^8 = 1$

$$e^i = 1 + i + \frac{1}{2!}i^2 + \frac{1}{3!}i^3 + \frac{1}{4!}i^4 + \ldots$$

$$= 1 + i - \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}i + \frac{1}{4!} -$$

Micro-revisão de complexos (só pra vocês acreditarem que $(a+ib)(c+id)$ soma ângulos)



Exercício:

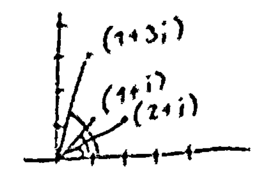
Em cada um dos casos abaixo represente graficamente $(a+ib)$, $(c+id)$, o produto $(a+ib)(c+id)$, e os ângulos que eles formam com o vetor $\overline{(1+0i)}$ =

(a) $(a+ib) = 2+i$, $(c+id) = i$

(b) $(a+ib) = 2+i$, $(c+id) = 1+i$,

(c) $(a+ib) = 2+i$, $(c+id) = -i$

(b) $(2+i)(1+i) = 1+3i$



C2 20/set/2019

Turma pequena

Hoje:

$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$!

Mas antes disso:

- Introdução a séries de Taylor,
- Revisão de complexos.

Derivadas em $x=0$

Vamos definir duas operações:

$\text{derivs}(f) = (f, f', f'', f''', f^{(4)}, \ldots)$,

$\text{derivs}_0(f) = (f(0), f'(0), f''(0), f'''(0), f^{(4)}(0), \ldots)$

A "derivs" recebe uma função e retorna uma sequência infinita de funções, e a "derivs_0" recebe uma função e retorna uma sequência infinita de números.

Exemplo: se $f(x) = ax^2 + bx + c$

então $f'(x) = 2ax + b$,

$f''(x) = 2a$,

$f'''(x) = 0$,

$\text{derivs}(f) = (ax^2+bx+c,\ 2ax+b,\ 2a,\ 0, 0, 0, \ldots)$

$\text{derivs}_0(f) = (c, b, 2a, 0, 0, 0, \ldots)$

Exercícios:

1) Seja $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Calcule $\text{derivs}_0(f)$.

   Dica: calcule $\text{derivs}(f)$ primeiro.

2) Calcule $\text{derivs}_0(e^x)$.

3) Calcule $\text{derivs}_0(\cos x)$.

4) Calcule $\text{derivs}_0(\operatorname{sen} x)$.

Se $p(x)$ é um polinômio dá pra recuperar todos os coefs de $p(x)$ a partir de $\text{derivs}_0(p(x))$! Como?

5) Digamos que $p(x) = ax^2 + bx + c$ e $\text{derivs}_0(p(x)) = (42, 99, 200, 0, 0, 0, \ldots)$. Descubra a, b, c.

6) Digamos que $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ e $\text{derivs}_0(p(x)) = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, 0, 0, 0, 0, \ldots)$. Descubra a, b, c, d, e.

Às vezes nós vamos fingir, ou supor, que essa idéia funciona também para "polinômios infinitos"... e é melhor escrevê-los começando pelos termos de grau mais baixo.

7) Digamos que $p(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + \ldots$ e $\text{derivs}_0(p(x)) = (a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$. Digamos que conhecemos $b_0, b_1, b_2, \ldots$. Descubra $a_0, a_1, a_2, \ldots$.

8) Idem, mas suponha que conhecemos $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$. Descubra $b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots$.

9) Agora vamos tentar expressar a exponencial como um "polinômio infinito". Digamos que $p(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots$, e $\text{derivs}_0(p(x)) = (1, 1, 1, 1, 1, \ldots)$, Descubra $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, \ldots$.

...Se a idéia de que "dá pra recuperar os coeficientes de $p(x)$ a partir de $\text{derivs}_0(p(x))$" também valer para "polinômios infinitos" então:

$\text{derivs}_0(e^x) = (1, 1, 1, 1, 1, \ldots)$

$\text{derivs}_0(p(x)) = (1, 1, 1, 1, 1, \ldots)$

onde $p(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$

Então num certo sentido

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots}$$

Obs: dá usar isso pra calcular e^x na mão!!!

Exemplo: se $x = 1$

então $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$

$e = 1 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots$

Obs: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$

Isto é chamado de a série de Taylor de e^x (em $x=0$).

Exercícios:

10) Encontre a série de Taylor de $\cos x$. Obs: $\text{derivs}_0(\cos x) = (1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots)$

11) Idem para $\operatorname{sen} x$.

Resposta (verifiquem em casa!):

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$

$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$

A gente decidiu acreditar que $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$ vale sempre...

sempre $\Rightarrow$ pra todos os reais.

$\Downarrow$ Novidade!!!

pra todos os complexos.

C2 20/SET/2019

TURMA PEQUENA

Hoje:

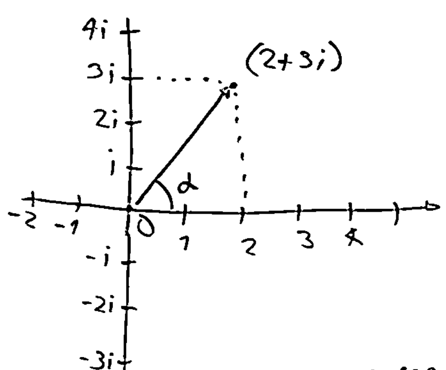
$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$!

MAS ANTES DISSO:

- INTRODUÇÃO À SÉRIES DE TAYLOR,
- REVISÃO DE COMPLEXOS.

MICRO-REVISÃO DE COMPLEXOS

PLANO COMPLEXO:

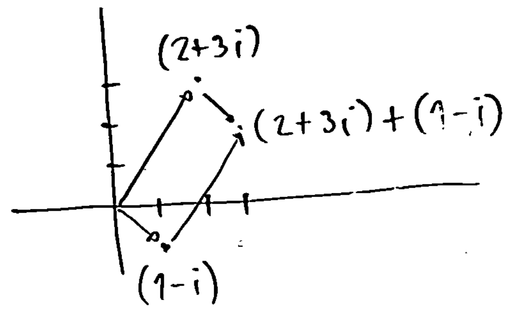


PRA DESENHAR O PONTO (2+3i) FAZEMOS ISTO: COMEÇAMOS NO 0, ANDAMOS DUAS UNIDADES PRA DIREITA, DEPOIS TRÊS UNIDADES PRA CIMA... (2+3i) PODE SER VISTO COMO UM DESLOCAMENTO - UM VETOR.

SOMA DE COMPLEXOS

... É COMO SOMA DE VETORES:

$(2+3i)+(1-i) =$



IDÉIA IMPORTANTE

"MULTIPLICAÇÃO DE COMPLEXOS SOMA ÂNGULOS"

(ISSO VOCÊS VIRAM NO ENSINO MÉDIO, VAMOS SÓ REVER BEM RÁPIDO! !!)

EXERCÍCIOS:

VERIFIQUE ISTO NOS SEGUINTES CASOS:

ⓐ $(2+i)(1+i) = (1+3i)$

ⓑ $(2+i)(2+i) =$

ⓒ $(2+i)\cdot i =$

ⓓ $(2+i)\cdot(-i) =$

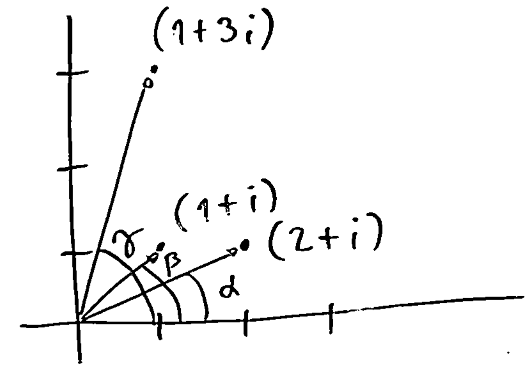
OBS:

$(a+ib)(c+id) =$

$ac + ibc + iad + iibd =$

$(ac-bd) + i(bc+ad).$

ⓐ



MINI-TESTE:

SEJAM $f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & \text{PARA } x \neq 0, \\ 0 & \text{PARA } x = 0, \end{cases}$

E $P = \{-1, -0.5, -0.2, 0.2, 0.5, 1\}$.

REPRESENTE GRAFICAMENTE

E CALCULE

$$\overline{\int_P} f(x)\, dx$$ E

$$\underline{\int_P} f(x)\, dx .$$

C2 25/set/2019

Turma pequena

Hoje:

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$

e aplicações!

Na aula passada vimos que:

$$\boxed{\begin{array}{l} e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots \\ \text{sen}\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \end{array}} \begin{array}{l} \Leftarrow \boxed{1} \\ \Leftarrow \boxed{2} \\ \Leftarrow \boxed{3} \end{array}$$

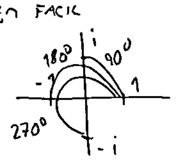
E vimos que em

$$(2+3i)(4+5i) = 2\cdot 4 + 2\cdot 5i + 3i\cdot 4 + 3i\cdot 5i$$
$$= (2\cdot 4 - 3\cdot 5) + (2\cdot 5 + 3\cdot 4)i$$

Nós separamos a parte real e a parte imaginária do resultado no final...

E vimos que multiplicação de complexos "soma ângulos" — um consequência bem fácil disto é:

$i^0 = 1$
$i^1 = i$
$i^2 = -1$
$i^3 = -i$
$i^4 = 1$



Fazendo $\boxed{1}$ $[x := i\theta]$

Temos:

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots$$
$$= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots$$
$$= \left(1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right) \Leftarrow \cos\theta$$
$$+ i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right) \Leftarrow \text{sen}\,\theta$$
$$= \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$$

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta} \Leftarrow \boxed{4}$$

Lembre que cos é uma "função par" (como x^2) e sen é uma "função ímpar" (como x, e como x^3)...

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos -\theta = \cos\theta \\ \text{sen} -\theta = -\text{sen}\,\theta \end{array}}$$

Fazendo $\boxed{4}$ $[\theta := -\theta]$

Temos:

$$e^{-i\theta} = \cos -\theta + i\,\text{sen} -\theta$$
$$= \cos\theta + i(-\text{sen}\,\theta)$$
$$= \cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta$$

$$\boxed{e^{-i\theta} = \cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta} \Leftarrow \boxed{5}$$

Fazendo $\boxed{4}$ $[\theta := k\theta]$

Temos:

$$\boxed{e^{ik\theta} = \cos k\theta + i\,\text{sen}\,k\theta} \Leftarrow \boxed{6}$$

Lembre que tínhamos essas convenções aqui:

$c = \cos\theta$
$s = \text{sen}\,\theta$
$t = \tan\theta$
$z = \sec\theta$

Novidade:

$E = e^{i\theta}$

Lembre que $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$

Então:

$$e^{i\theta - i\theta} = e^{i\theta}\cdot e^{-i\theta}$$
$$e^0 = 1$$

Ou seja:

$$\underbrace{e^{i\theta}}_{E}\cdot\underbrace{e^{-i\theta}}_{E^{-1}} = 1$$

$$\boxed{\begin{array}{l} E = e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta = c + is \\ E^{-1} = e^{-i\theta} = \cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta = c - is \end{array}} \begin{array}{l} \Leftarrow \boxed{7} \\ \Leftarrow \boxed{8} \end{array}$$

$$E + E^{-1} = (c + \cancel{is}) + (c - \cancel{is})$$
$$= 2c$$
$$\frac{E + E^{-1}}{2} = c$$
$$E - E^{-1} = (\cancel{c} + is) - (\cancel{c} - is)$$
$$= 2is$$
$$\frac{E - E^{-1}}{2i} = s$$

Dica: dêem uma olhada na "P1" de 2018.2 e 2019.1! Tem algumas dessas fórmulas no rodapé e tem problemas que precisam delas pra serem resolvidos.

C2 25, SET 2019

TURMA PEQUENA

HOJE:
$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$
E APLICAÇÕES!

NA AULA PASSADA VIMOS QUE

$$\boxed{\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots && \Leftarrow \boxed{1} \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots && \Leftarrow \boxed{2} \\ \text{sen}\, x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots && \Leftarrow \boxed{3} \end{aligned}}$$

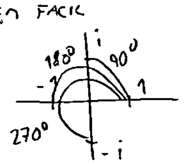
E VIMOS QUE EM

$$(2+3i)(4+5i) = 2\cdot4 + 2\cdot5i + 3i\cdot4 + 3i\cdot5i$$
$$= (2\cdot4 - 3\cdot5) + (2\cdot5 + 3\cdot4)i$$

NÓS SEPARAMOS A PARTE REAL E A PARTE IMAGINÁRIA DO RESULTADO NO FINAL...

E VIMOS QUE MULTIPLICAÇÃO DE COMPLEXOS "SOMA ÂNGULOS" - UMA CONSEQUÊNCIA BEM FÁCIL DISTO É:

$i^0 = 1$
$i^1 = i$
$i^2 = -1$
$i^3 = -i$
$i^4 = 1$



$E = c + is$
$E^{-1} = c - is$
$c = \frac{E + E^{-1}}{2}$
$s = \frac{E - E^{-1}}{2i}$

LEMBRE QUE INTEGRAR PRODUTOS DE FUNÇÕES É DIFÍCIL, MAS INTEGRAR SOMAS DE FUNÇÕES É FÁCIL...

ENTÃO VAMOS APRENDER A CONVERTER PRODUTOS DE SENOS E COSSENOS EM SOMAS DE SENOS E COSSENOS.

EXEMPLO:
$\int (\text{sen}\,\theta)^2\, d\theta = ?$

$$(\text{sen}\,\theta)^2 = s^2 = \left(\frac{E - E^{-1}}{2i}\right)^2$$
$$= \left(\frac{1}{2i}\right)^2 (E - E^{-1})^2$$
$$= \left(-\frac{1}{4}\right)(E^2 - 2EE^{-1} + E^{-2})$$
$$= \left(-\frac{1}{4}\right)(E^2 - 2 + E^{-2})$$

$$E^2 - 2 + E^{-2} =$$
$$(E^2 + E^{-2}) - 2 =$$
$$(2\cos 2\theta) - 2$$

EXERCÍCIOS:

1) PORQUE É QUE $E^2 + E^{-2} = 2\cos 2\theta$?

2) COMO A GENTE GENERALIZA ISSO? $E^7 + E^{-7} = ?$

3) $E^7 - E^{-7} = ?$

4) INTEGRE ISTO: $\int (\text{sen}\,\theta)^2\, d\theta$.
DICA: $\int (\text{sen}\,\theta)^2\, d\theta = \int \left(-\frac{1}{4}\right)(2\cos 2\theta - 2)\, d\theta$.

5) $\int (\cos\theta)^2\, d\theta = ?$

MAIS UMA DICA PRA ESTUDAR EM CASA... NO FIM DO APEX CALCULUS, LOGO DEPOIS DO ÍNDICE, TEM ALGUMAS TABELAS DE FÓRMULAS. ELAS INCLUEM UMA SEÇÃO CHAMADA "COMMON TRIGONOMETRIC IDENTITIES". TODAS AS FÓRMULAS DESSA SEÇÃO QUE SÓ ENVOLVEM SENOS E COSSENOS PODEM SER DEMONSTRADAS USANDO OS TRUQUES DE HOJE. FAÇA EM CASA!

OUTRA DICA: TEM QUESTÕES USANDO ESSES MÉTODOS, COM GABARITO, NAS PROVAS DE 2018.2 E 2019.1. (P1, VR, VS)

TRIÂNGULO DE PASCAL:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

$$(A+B)^6 = A^6B^0 + 6A^1B^5 + 15A^2B^4 + 20A^3B^3 + 15A^4B^2 + 6A^5B^1 + 1A^6B^0.$$

"BINÔMIO DE NEWTON"

6) CALCULE USANDO O TRIÂNGULO DE PASCAL:
a) $(E + E^{-1})^4$,
b) $(E - E^{-1})^5$.

7) DÁ PRA LEMBRAR ALGUMAS IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS SIMPLES "PELO GRÁFICO". FAÇA OS GRÁFICOS DE:
$\text{sen}\,\theta$,
$(\text{sen}\,\theta)^2$,
$\cos\theta$,
$(\cos\theta)^2$,
$\cos 2\theta$,
$1 + \cos 2\theta$,
$1 - \cos 2\theta$,
$\frac{1 + \cos 2\theta}{2}$,
$\frac{1 - \cos 2\theta}{2}$.

C2 26/set/2019

Turma grande

Na aula passada nós vimos estas fórmulas aqui:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \Leftarrow \boxed{1}$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots \Leftarrow \boxed{2}$$
$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \Leftarrow \boxed{3}$$

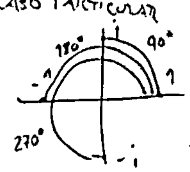
Hoje vamos entender porque é que

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta} \Leftarrow \boxed{4}$$

E vamos ver como isso pode ser usado pra provar um monte de identidades trigonométricas... Por exemplo as da folha do APEX Calculus que eu trouxe hoje, que vem logo depois do índice.

Lembre que o produto complexo "soma ângulos". Um caso particular disso é:

$i^0 = 1$
$i^1 = i$
$i^2 = -1$
$i^3 = -i$
$i^4 = 1$



Truque:

Lembre que quando a gente faz contas com complexos a gente separa a parte real e a parte imaginária no final... Ex:

$(2+3i)(4+5i) =$
$2\cdot4 + 3i\cdot4 + 2\cdot5i + 3i\cdot5i =$
$(2\cdot4 + 3i\cdot5i) + i(3\cdot4 + 2\cdot5) =$
$(2\cdot4 - 3\cdot5) + i(3\cdot4 + 2\cdot5) =$
$-7 + 22i$

O que acontece se fazemos a substituição $[x := i\theta]$ na fórmula 1 e depois separamos a parte real da imaginária?

(Suponha que θ é real)

Vamos usar $\boxed{2}[x := \theta]$, $\boxed{3}[x := \theta]$.

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots$$
$$= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots$$
$$= \left(1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots\right) \Leftarrow \boxed{\cos\theta}$$
$$+ i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots\right) \Leftarrow \boxed{\operatorname{sen}\theta}$$
$$= \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$

Ou seja:

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta} \Leftarrow \boxed{4}$$

A gente tem "significados preferidos" pra algumas letras...

$s = \operatorname{sen}\theta$ $\quad c = \cos\theta$
$t = \tan\theta$ $\quad z = \sec\theta$

Novidade:

$E = e^{i\theta}$

Obs: $\boxed{E = c + is}$

Lembre que $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$

Dá pra provar - mas acreditem! - que isso continua valendo pro e^x definido por $\boxed{1}$, que aceita argumentos complexos...

Por exemplo:

$$e^{(2+3i)+(4+5i)} = e^{(2+3i)} \cdot e^{(4+5i)}$$

Então, por exemplo:

$e^{42i+99i} = e^{42i} \cdot e^{99i}$
$e^{i\theta - i\theta} = e^{i\theta} \cdot e^{-i\theta}$
$e^{0} = 1$
$e^{i\theta} \cdot e^{-i\theta} = 1$
$e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}} = (e^{i\theta})^{-1} = E^{-1}$
$e^{-i\theta} = E^{-1}$
$e^{42\theta} = (e^{\theta})^{42} = E^{42}$

Obs: a gente pode escrever $e^{42i\theta}$ como E^{42} e $e^{-99i\theta}$ como E^{-99} mas a gente não vai ter uma notação curta pra coisas como $\cos 42\theta$ e $\operatorname{sen} 99\theta$.

C2 26/SET/2019

TURMA GRANDE

NA AULA PASSADA NÓS VIMOS ESTAS FÓRMULAS AQUI:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \quad \Leftarrow \boxed{1}$$

$$\cos x = 1 \quad - \frac{x^2}{2} \quad + \frac{x^4}{4!} \quad - \ldots \quad \Leftarrow \boxed{2}$$

$$\operatorname{sen} x = \quad x \quad - \frac{x^3}{3!} \quad + \frac{x^5}{5!} \quad - \ldots \quad \Leftarrow \boxed{3}$$

HOJE VAMOS ENTENDER PORQUE É QUE

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta} \Leftarrow \boxed{4}$$

$E = c + is$

$e^{ik\theta} = (e^{i\theta})^k = E^k$

LEMBRE QUE $\cos x$ É UMA "FUNÇÃO PAR" (COMO x^2)
E $\operatorname{sen} x$ É UMA "FUNÇÃO ÍMPAR" (COMO x, x^3)

DAÍ: $\cos -\theta = \cos\theta$
$\operatorname{sen} -\theta = -\operatorname{sen}\theta$

SE FIZERMOS A SUBSTITUIÇÃO $[\theta := -\theta]$ EM $\boxed{4}$
OBTEMOS:

$$\begin{aligned} e^{-i\theta} &= \cos -\theta + i \operatorname{sen} -\theta \\ &= \cos\theta - i \operatorname{sen}\theta \\ &= c - is \end{aligned}$$

$e^{-i\theta} = E^{-1}$

$$\boxed{\begin{aligned} E &= c + is \\ E^{-1} &= c - is \end{aligned}}$$

$E + E^{-1} = (c + \cancel{is}) + (c - \cancel{is})$
$= 2c$

$\boxed{E + E^{-1} = 2c} \Rightarrow \boxed{c = \frac{E + E^{-1}}{2}}$

$E - E^{-1} = (\cancel{c} + is) - (\cancel{c} - is)$
$= is + is$
$= 2is$

$\boxed{E - E^{-1} = 2is} \Rightarrow \boxed{s = \frac{E - E^{-1}}{2i}}$

SUGESTÃO:
DEPOIS VEJAM AS PROVAS DE C2 DOS ÚLTIMOS SEMESTRES... NO RODAPÉ DELAS EU SEMPRE PONHO ALGUMAS DESSAS FÓRMULAS.

LEMBREM:
TRIÂNGULO DE PASCAL:

						1						
					1		1					
				1		2		1				
			1		3		3		1			
		1		4		6		4		1		
	1		5		10		10		5		1	
1		6		15		20		15		6		1

BINÔMIO DE NEWTON:

$$(A+B)^6 = A^6B^0 + 6A^5B^1 + 15A^4B^2 + 20A^3B^3 + 15A^2B^4 + 6A^1B^5 + 1A^0B^6$$

EXERCÍCIOS:

1. CALCULE $(E + E^{-1})^5$.
2. CALCULE $(E - E^{-1})^6$.
3. CALCULE $(\cos\theta)^5$. DICA: $\left(\frac{E + E^{-1}}{2}\right)^5$.
4. CALCULE $(\operatorname{sen}\theta)^6$. DICA: $\left(\frac{E - E^{-1}}{2i}\right)^6$.

$\Longrightarrow (E + E^{-1})^5 =$

$$\begin{aligned} &1\,E^5(E^{-1})^0 + \\ &5\,E^4(E^{-1})^1 + \\ &10\,E^3(E^{-1})^2 + \\ &10\,E^2(E^{-1})^3 + \\ &5\,E^1(E^{-1})^4 + \\ &1\,E^0(E^{-1})^5 = \end{aligned}$$

$E^5 + 5E^3 + 10E + 10E^{-1} + 5E^{-3} + E^{-5}$

5. $(E \quad + E \quad) = K \cos 42\theta$.

DESCUBRA PORQUÊ E
DESCUBRA O VALOR DE K.

6. $(E^{99} - E^{-99}) = K \operatorname{sen} 99\theta$.

DESCUBRA PORQUÊ E
DESCUBRA O VALOR DE K.

7. DEMONSTRE A SEGUNDA "DOUBLE ANGLE FORMULA" DA FOLHA:

$\cos 2\theta = 1 - 2(\operatorname{sen}\theta)^2$

TRUQUE:

$$\boxed{\begin{aligned} c &\to \frac{E + E^{-1}}{2} \\ s &\to \frac{E - E^{-1}}{2i} \end{aligned}} \Leftarrow \text{USE ESTAS PRIMEIRO}$$

$$\boxed{\begin{aligned} E^k + E^{-k} &\to \ldots \\ E^k - E^{-k} &\to \ldots \end{aligned}} \Leftarrow \text{E ESTAS DEPOIS.}$$

C2 26/SET/2019

TURMA GRANDE

NA AULA PASSADA NÓS VIMOS ESTAS FÓRMULAS AQUI:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \quad \Leftarrow \boxed{1}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \quad \Leftarrow \boxed{2}$$

$$\mathrm{sen}\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \quad \Leftarrow \boxed{3}$$

HOJE VAMOS ENTENDER PORQUE É QUE

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta} \quad \Leftarrow \boxed{4}$$

MINI-TESTE

SEJAM $f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$

$P = \{-1, -0.5, -0.2, 0.2, 0.5, 1\}$.

REPRESENTE GRAFICAMENTE E CALCULE

$$\overline{\int_P} f(x)\,dx - \underline{\int_P} f(x)\,dx .$$

C2 27/set/2019

Turma grande

Hoje:

- Algumas dicas sobre os exercícios de ontem e sobre exercícios que a gente pode fazer usando $E = c + is$
- Áreas entre curvas ⇐ Seção 7.1 do APEX
- $\int_{x=a}^{x=b} \sqrt{1-x^2}\,dx$ ⇐ Ficaram pra aula que vem

No final da aula de ontem eu disse "deduza as fórmulas da seção "Double angle formulas" da página de identidades trigonométricas do APEX"... É mais fácil começar pela seção "Power-reducing formulas"!

Sugestão: dêem uma olhada na página sobre "Fourier series" na Wikipedia em inglês... As figuras mostram como funções periódicas podem ser aproximadas por somas de senos e cossenos (de velocidades diferentes).

① Exercício

(Pra quem quiser aprender a decorar as fórmulas para $(\cos\theta)^2$ e $(\operatorname{sen}\theta)^2$)...

Desenhe os gráficos de:

(a) $\cos x$
(b) $\operatorname{sen} x$
(c) $\cos 2x$
(d) $\operatorname{sen} 2x$
(e) $1+\cos 2x$
(f) $1+\operatorname{sen} 2x$
(g) $1-\cos 2x$
(h) $1-\operatorname{sen} 2x$

(e') $\frac{1+\cos 2x}{2}$
(f') $\frac{1+\operatorname{sen} 2x}{2}$
(g') $\frac{1-\cos 2x}{2}$
(h') $\frac{1-\operatorname{sen} 2x}{2}$

(i) $(\cos x)^2$
(j) $(\operatorname{sen} x)^2$

Dica:

$\int f(x)g(x)\,dx$ é difícil de integrar,
$\int f(x)+g(x)\,dx$ é fácil de integrar...

O método do $E = c + is$ transforma coisas difíceis de integrar — produtos de senos e cossenos ("de diferentes velocidades" — p.ex.: $(\cos 2\theta)^3(\operatorname{sen} 4\theta)^5 \operatorname{sen} 6\theta)$ em somas de senos e cossenos ("de diferentes velocidades", como na série de Fourier)...

Então comece por $(\cos\theta)^2$ ⇐ um produto! $(\cos\theta)(\cos\theta)$

e tente transformá-lo numa soma da forma ⇐ $\cos 0\theta = \cos 0 = 1$

$$\alpha\cos 0\theta + \beta\cos 2\theta + \gamma\operatorname{sen} 2\theta \ldots$$

$$(\cos\theta)^2 = \left(\frac{E+E^{-1}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2(E+E^{-1})^2$$
$$= \frac{1}{4}\left(E^2+2+E^{-2}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left((E^2+E^{-2})+2\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(2\cos 2\theta+2\right)$$
$$= \frac{\cos 2\theta+1}{2}$$

$$(\operatorname{sen}\theta)^2 = \left(\frac{E-E^{-1}}{2i}\right)^2 =$$

$$c = \frac{E+E^{-1}}{2}$$
$$2c = E+E^{-1}$$
$$E+E^{-1} = 2c$$
$$e^{i\theta}+e^{-i\theta} = 2\cos\theta \quad (*)$$

Fazendo $(*)[\theta := 73\theta]$ obtemos:

$$e^{i73\theta}+e^{-i73\theta} = 2\cos 73\theta$$
$$E^{73}+E^{-73} = 2\cos 73\theta$$

$$(\cos\theta)^3 =$$
$$(\cos 42\theta)(\cos 99\theta) = \left(\frac{E^{42}+E^{-42}}{2}\right)\left(\frac{E^{99}+E^{-99}}{2}\right)$$
$$\int(\cos 42\theta)(\cos 99\theta)\,d\theta =$$
$$(\operatorname{sen} 3\theta)^2(\cos 4\theta)^2 = \left(\frac{E^3-E^{-3}}{2i}\right)^2\left(\frac{E^4+E^{-4}}{2}\right)^2 = \frac{1}{(-4)4}(E^6-2+E^{-6})(E^8+2+E^{-8})$$
$$= \frac{1}{-16}(E^{14}-2E^8+2E^6-\ldots)$$

27/set/2019

Turma pequena

Hoje:

- Mais aplicações do $E=c+is$
- Área entre curvas
- $\int_{x=a}^{x=b}\sqrt{1-x^2}\,dx$

Deem uma olhada na página sobre "Fourier Series" na Wikipedia em inglês — ela tem umas figuras que mostram que toda função periódica pode ser aproximada por somas de senos e cossenos de diferentes frequências e amplitudes.

Lembre que é difícil integrar $\int_{x=a}^{x=b} f(x)g(x)\,dx$ ⇐ um produto

mas é fácil integrar $\int_{x=a}^{x=b} f(x)+g(x)\,dx$

A técnica do $E=c+is$ serve pra gente transformar qualquer produto de senos e cossenos (obs: fica implícito que eles podem ter várias "frequências") e somas de senos e cossenos.

As fórmulas mais fáceis de demonstrar da folha de identidades trigonométricas (obs: ela é do APEX Calculus, logo depois do índice) são as das seções "Power-Reducing Formulas" e "Sum to Product Formulas". Vou fazer algumas e passar outras como exercícios.

$(\cos\theta)^2 = C^2 = \left(\frac{E+E^{-1}}{2}\right)^2$ ⇐ passamos pra uma expressão em E

⇑ Começamos com um produto de senos e cossenos

$= \frac{1}{4}(E+E^{-1})^2$

$= \frac{1}{4}(E^2+2+E^{-2})$ ⇐ expandimos ela (por Newton/distributividade)

$= \frac{1}{4}((E^2+E^{-2})+2)$ ⇐ reagrupamos os termos

$= \frac{1}{4}(2\cos 2\theta+2)$ ⇐ soma de senos e cossenos

$= \frac{\cos 2\theta + 1}{2}$

Lembre que:

$\frac{E+E^{-1}}{2}=C$

$E+E^{-1}=2C$

$e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2\cos\theta$

substituindo $[\theta:=73\theta]$ obtemos:

$e^{i73\theta}+e^{-i73\theta}=2\cos 73\theta$

$E^{73}+E^{-73}=2\cos 73\theta$

Isso vale "pra qualquer valor de 73", e dá pra fazer algo parecido pro seno.

Pra casa!!! Dica: várias P1s, VRs e VSs têm problemas assim com gabarito!

Exercícios:

1. $(\operatorname{sen}\theta)^2=?$
2. $\int \cos 42\theta + \operatorname{sen} 99\theta\,d\theta = ?$
3. $\int(\operatorname{sen}\theta)^2\,d\theta=?$
4. $(\cos\theta)^5=?$
5. $(\operatorname{sen}\theta)^4=?$
6. $(\cos 6\theta)(\cos 8\theta)=?$

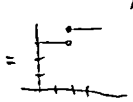
   ⇑ Obs: isto é uma das "product to sum formulas", com $x=6\theta$ e $y=8\theta$
7. $(\cos 6\theta)^3(\cos 8\theta)=?$
8. $\int(\cos 6\theta)^3(\cos 8\theta)\,d\theta=?$

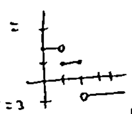
Áreas sobre curvas

Obs: agora a gente vai seguir a seção 7.1 do APEX Calculus...

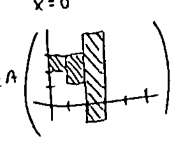
Nos exercícios sobre áreas via retângulos vocês aprenderam a desenhar áreas e diferenças entre áreas...

Exemplo:

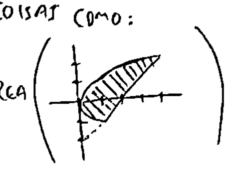
Se $f(x)=$ 

e $g(x)=$ 

então $\int_{x=0}^{x=3} f(x)\,dx - \int_{x=0}^{x=3} g(x)\,dx =$

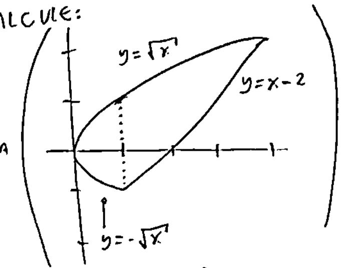
Área  $=1+2+3\ldots$

Agora nós vamos usar a mesma ideia pra calcular coisas como:

Área 

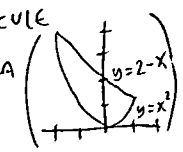
Mais precisamente,

9. Calcule:

Área 

$=$

$\int_{x=0}^{x=1}\sqrt{x}-(-\sqrt{x})\,dx + \int_{x=1}^{x=4}\sqrt{x}-(x-2)\,dx = ?$

10. Calcule Área 

IL: 27/SET/2019

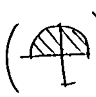
TURMA PEQUENA

Hoje:
- Mais aplicações do $E = c + is$
- Área entre curvas
- $\int_{x=a}^{x=b}\sqrt{1-x^2}\,dx$

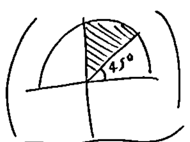
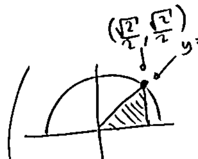
(8) $\int (\cos 6\theta)^3(\cos 8\theta)\,d\theta = ?$

$$\cos 6\theta = \frac{E^6+E^{-6}}{2}$$
$$\cos 8\theta = \frac{E^8+E^{-8}}{2}$$
$$(\cos 6\theta)^3 = \left(\frac{E^6+E^{-6}}{2}\right)^3$$
$$= \frac{1}{8}(E^6+E^{-6})^3$$
$$= \frac{1}{8}\left((E^6)^3(E^{-6})^0 + 3(E^6)^2(E^{-6})^1 + 3(E^6)^1(E^{-6})^2 + (E^6)^0(E^{-6})^3\right)$$
$$= \frac{1}{8}(E^{18} + 3E^6 + 3E^{-6} + E^{-18})$$
$$(\cos 6\theta)^3 = \frac{1}{8}(E^{18}+3E^6+3E^{-6}+E^{-18})$$
$$(\cos 6\theta)^3(\cos 8\theta) = \frac{1}{8}(E^{18}+3E^6+3E^{-6}+E^{-18})\,\frac{1}{2}(E^8+E^{-8})$$
$$= \frac{1}{16}(E^{26}+3E^{14}+3E^{2}+E^{-10}+E^{10}+3E^{-2}+3E^{-14}+E^{-26})$$
$$= \frac{1}{16}\left((E^{26}+E^{-26})+3(E^{14}+E^{-14})+(E^{10}+E^{-10})+3(E^{2}+E^{-2})\right)$$
$$\frac{1}{16}(2\cos 26\theta + 6\cos 14\theta + 2\cos 10\theta + 6\cos 2\theta)$$
$$= \frac{1}{8}(\cos 26\theta + 3\cos 14\theta + \cos 10\theta + 3\cos 2\theta)$$
$$\int (\cos 6\theta)^3(\cos\theta)^8\,d\theta =$$
$$\int \frac{1}{8}(\cos 26\theta + 3\cos 14\theta + \cos 10\theta + 3\cos 2\theta)\,d\theta$$

A integral $\int_{x=a}^{x=b}\sqrt{1-x^2}\,dx$ pode ser calculada por área facilmente pra alguns valores de a e b...

$\int_{x=-1}^{x=1}\sqrt{1-x^2}\,dx = $ Área() $= \frac{\pi}{2}$

$\int_{x=0}^{x=1}\sqrt{1-x^2}\,dx = $ Área() $= \frac{\pi}{4}$

Área() = Área() − Área()

$\pi/8$ — $\int_{x=0}^{x=\frac{\sqrt{2}}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx$ — $1/4$

$$\Rightarrow \int_{x=0}^{x=\frac{\sqrt{2}}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$$

Por substituição trigonométrica,

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx = \quad [s=x]$$
$$\int\sqrt{1-s^2}\,ds = \quad \left[\begin{array}{l} s = \operatorname{sen}\theta \\ \sqrt{1-s^2} = \cos\theta \\ \frac{ds}{d\theta} = \cos\theta \\ ds = \cos\theta\,d\theta \end{array}\right]$$
$$\int\cos\theta\cos\theta\,d\theta =$$
$$\int(\cos\theta)^2\,d\theta =$$
$$\int\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta =$$
$$\int\frac{1}{2}\,d\theta + \frac{1}{2}\int\cos 2\theta\,d\theta =$$
$$\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right) = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta$$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} s + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2(\operatorname{arcsen} s)$$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2(\operatorname{arcsen} x)$$

Exercício:
Seja $F(x) = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2\operatorname{arcsen} x)$.

Calcule: $F(0)$, $F(1)$, $F(-1)$, $F(\frac{\sqrt{2}}{2})$.

C2. 1/OUT/2019

HOJE: AULA COM POUCA GENTE PORQUE 4ª E 5ª TEVE PARALISAÇÃO ... !! ⟸ SÓ VIERAM O VITOR E O PEDRO

ASSUNTOS PRINCIPAIS:
ÁREAS (SEÇÃO 7.1 DO LIVRO) E DÚVIDAS!

EXEMPLO 7.1.2:

$$\int_{x=1}^{x=2} \underbrace{(x^3 - 7x^2 + 14x - 8)}_{h(x)}\,dx = H(x)\Big|_{x=1}^{x=2}$$

$$\int_{x=1}^{x=2} \underbrace{x^3}_{m(x)}\,dx = \underbrace{\frac{x^4}{4}}_{M(x)}\Big|_{x=1}^{x=2}$$

$M'(x) = m(x)$

$H(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{7x^3}{3} + 7x^2 - 8x$

$H(2) = 4 - \frac{56}{3} + 28 - 16 = \underbrace{\underbrace{28+4}_{32}-16}_{16} - \frac{56}{3} = \frac{48}{3} - \frac{56}{3} = -\frac{8}{3} = -\frac{32}{12}$

$H(1) = \frac{1}{4} - \frac{7}{3} + 7 - 8 = \frac{3}{12} - \frac{28}{12} - \frac{12}{12} = -\frac{37}{12}$

$H(2) - H(1) = \frac{5}{12}$

$$\int f(x) + g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int 42f(x) + 99g(x)\,dx = \int 42f(x)\,dx + \int 99g(x)\,dx = 42\int f(x)\,dx + 99\int g(x)\,dx$$

$$\int_{x=0}^{2\pi} (f(x) - g(x))\,dx =$$

$\frac{x^2}{4} + 3x - \left(\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,x + x\right) =$

$\frac{x^2}{4} + 3x - \frac{\mathrm{sen}\,x}{2} - x =$

$\frac{x^2}{4} + 2x - \frac{\mathrm{sen}\,x}{2}\Big|$ $x = 2\pi \longrightarrow \frac{(2\pi)^2}{4} + 2(2\pi) - \frac{\mathrm{sen}\,2\pi}{2} = \frac{4\pi^2}{4} + 4\pi - 0 = \pi^2 + 4\pi =$

$x = 0 = 0$

① $\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{2}x + 3\,dx = \frac{1}{2}\int x\,dx + 3\int 1\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{2} + 3x = \frac{x^2}{4} + 3x$

$E = c + is$

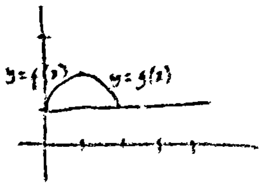
② $\int g(x)\,dx = \frac{\cos x}{2} + 1 = \int \frac{\cos x}{2}\,dx + \int 1\,dx = \frac{1}{2}\int \cos x\,dx + \int 1\,dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,x + x$

C2 4/out/2019

HOJE: AULA COM POUCA GENTE PORQUE 4ª E 5ª TEVE PARALISAÇÃO ... !!

← SÓ VIERAM O VITOR E O PEDRO

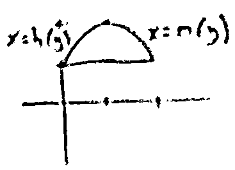
ASSUNTOS PRINCIPAIS: ÁREAS (SEÇÃO 7.1 DO LIVRO) E DÚVIDAS!



$f(x) = \sqrt{x} + 1$
$g(x) = \sqrt{2-x} + 1$

$y = \sqrt{x} + 1 \Rightarrow y - 1 = \sqrt{x}$
$\Rightarrow (y-1)^2 = x$
$\Rightarrow x = (y-1)^2$

$y = \sqrt{2-x} + 1 \Rightarrow y - 1 = \sqrt{2-x}$
$\Rightarrow (y-1)^2 = 2 - x$
$x = 2 - (y-1)^2$



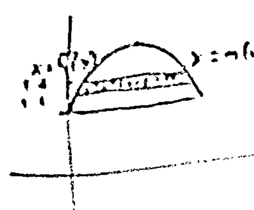
$h(y) = (y-1)^2$
$m(y) = 2 - (y-1)^2$

$f(x) = \sqrt{x} + 1 \therefore y - 1 = x^{1/2} = (y-1)^2 = x$

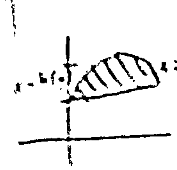
$g(x) = \sqrt{2-x} + 1 \therefore y - 1 = (2-x)^{1/2}$
$(y-1)^2 = 2 - x$
$-(y-1)^2 + 2 = x$

$\int (f(y) - g(y))\, dy \therefore$ 1º - DESCOBRIU $f(y)$

$\int (y-1)^2\, dy \quad [(y-1) = u]$
$= \int u^2\, du$
$= \frac{u^3}{3} = \frac{(y-1)^3}{3}$



$\Rightarrow \int_{y=1.2}^{y=1.4} m(y) - h(y)\, dy$

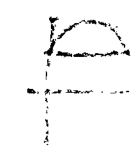


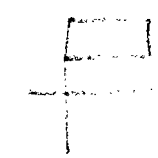
$\Rightarrow \int_{y=1}^{y=2} m(y) - h(y)\, dy$

$\int m(y)\, dy = M(y) = \left(-\frac{y^3}{3} + y^2 + y\right)$
$= \int 2 - (y-1)^2\, dy =$
$\int 2 - (y^2 - 2y + 1)\, dy =$
$\int -y^2 + 2y + 1\, dy =$
$-\frac{y^3}{3} + y^2 + y$

$\int h(y)\, dy = H(y) = \left(\frac{y^3}{3} - y^2 + y\right)$
$= \int (y-1)^2\, dy$
$= \int y^2 - 2y + 1\, dy$
$= \frac{y^3}{3} - y^2 + y$

$\int_{y=1}^{y=2} m(y) - h(y)\, dy = \left(M(y) - H(y)\right)\Big|_{y=1}^{y=2}$
$= \left(-\frac{y^3}{3} + y^2 + \cancel{y} - \left(\frac{y^3}{3} - y^2 + \cancel{y}\right)\right)\Big|_{y=1}^{y=2}$
$= \left(-2\frac{y^3}{3} + 2y^2\right)\Big|_{y=1}^{y=2}$
$= 2\left(-\frac{y^3}{3} + y^2\right)\Big|_{y=1}^{y=2} = 2\left(\left(-\frac{2^3}{3} + 2^2\right) - \left(-\frac{1^3}{3} + 1^2\right)\right) = 2\left(-\frac{8}{3} + 4 - \left(-\frac{1}{3} + 1\right)\right) = 2\left(-\frac{9}{3} + 5\right) = 2(-3+5)$
$= 2 \cdot 2 = 4$!!



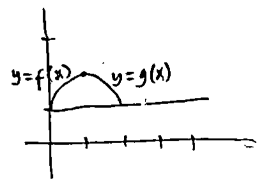


C2 4/out/2019

HOJE: AULA COM POUCA GENTE PORQUE 4ª E 5ª TEVE PARALISAÇÃO ... !!

← SÓ VIERAM O VITOR E O PEDRO

ASSUNTOS PRINCIPAIS:
ÁREAS (SEÇÃO 7.1 DO LIVRO) E DÚVIDAS!



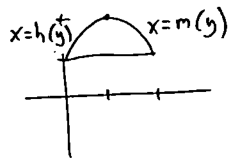
$f(x) = \sqrt{x} + 1$
$g(x) = \sqrt{2-x} + 1$

$y = \sqrt{x} + 1 \Rightarrow y - 1 = \sqrt{x}$
$\Rightarrow (y-1)^2 = x$
$\Rightarrow x = (y-1)^2$

$y = \sqrt{2-x} + 1 \Rightarrow y - 1 = \sqrt{2-x}$
$\Rightarrow (y-1)^2 = 2 - x$
$x = 2 - (y-1)^2$

$f(x) = \sqrt{x} + 1 \;\therefore\; y - 1 = x^{1/2} = (y-1)^2 = x$

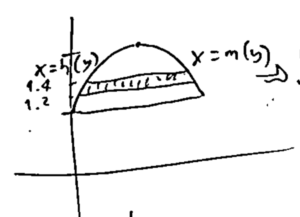
$g(x) = \sqrt{2-x} + 1 \;\therefore\; y - 1 = (2-x)^{1/2}$
$(y-1)^2 = 2 - x$
$-(y-1)^2 + 2 = x$



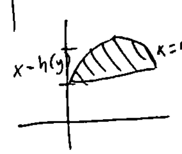
$h(y) = (y-1)^2$
$m(y) = 2 - (y-1)^2$

$\int (f(y) - g(y))\, dy \;\therefore\; 1^{\circ}$ - DESENV. $f(y)$.

$\int (y-1)^2\, dy \quad [(y-1) := u]$
$= \int u^2\, du$
$= \frac{u^3}{3} = \frac{(y-1)^3}{3}$



$\Rightarrow \int_{y=1.2}^{y=1.4} m(y) - h(y)\, dy$

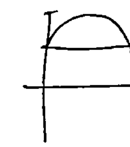


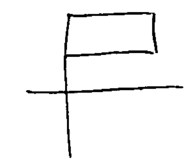
$\Rightarrow \int_{y=1}^{y=2} m(y) - h(y)\, dy$

$\int m(y)\, dy = M(y) = \left(-\frac{y^3}{3} + y^2 + y\right)$
$= \int 2 - (y-1)^2\, dy =$
$\int 2 - (y^2 - 2y + 1)\, dy =$
$\int -y^2 + 2y + 1\, dy =$
$-\frac{y^3}{3} + y^2 + y$

$\int h(y)\, dy = H(y) = \left(\frac{y^3}{3} - y^2 + y\right)$
$= \int (y-1)^2\, dy$
$= \int y^2 - 2y + 1\, dy$
$= \frac{y^3}{3} - y^2 + y$

$\int_{y=1}^{y=2} m(y) - h(y)\, dy = \left(M(y) - H(y)\right)\Big|_{y=1}^{y=2}$
$= \left(-\frac{y^3}{3} + y^2 + y - \left(\frac{y^3}{3} - y^2 + y\right)\right)\Big|_{y=1}^{y=2}$
$= \left(-2\frac{y^3}{3} + 2y^2\right)\Big|_{y=1}^{y=2}$
$= 2\left(-\frac{y^3}{3} + y^2\right)\Big|_{y=1}^{y=2} = 2\left(\left(-\frac{2^3}{3} + 2^2\right) - \left(-\frac{1^3}{3} + 1^2\right)\right) = 2\left(-\frac{8}{3} + 4 - \left(-\frac{1}{3} + 1\right)\right) = 2\left(-\frac{9}{3} + 5\right) = 2(-3+5)$
$= 2 \cdot 2 = 4$!!





1/OUT/2019

TURMA PEQUENA

HOJE: REVISÃO E DÚVIDAS!

RESOLVA POR INTEGRAÇÃO POR PARTES:

$\int 1 \cdot \ln x \, dx = ?$

$\int x \cdot \ln x \, dx = ?$

$\int f g' \, dx = fg - \int f' g \, dx$

$\int x \ln(2x+3) \, dx = ?$

$\int \ln x \, dx =$:)

$\int x \ln x \, dx =$:)

$\int (ax+b) \ln x \, dx =$:)

$$\int \underbrace{x}_{\frac{u-3}{2}} \ln \underbrace{(2x+3)}_{u} \underbrace{dx}_{\frac{1}{2} du} = \begin{bmatrix} u = 2x+3 \\ x = \frac{u-3}{2} \\ dx = \frac{1}{2} du \end{bmatrix}$$

$$\int \left(\frac{u-3}{2}\right)(\ln u) \frac{1}{2} du =$$

$$\int \left(\frac{u-3}{4}\right) \ln u \, du =$$

$$\frac{1}{4} \int u \ln u \, du - \frac{3}{4} \int \ln u \, du =$$

$\ln(2x+3)$

$\ln\left(x+\frac{3}{2}\right)$

C2 9/out/2019

TURMA PEQUENA

Hoje:
- Somas de Riemann
- Volumes

Dica: Leiam o cap. 7 do APEX Calculus!!!

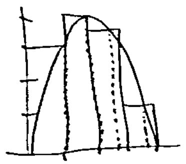
O cap. 7 começa com um método de integração — somas de Riemann — que eu deixei pra apresentar depois porque ele precisa de dados extras...

Uma soma de Riemann é algo como isto aqui,

$$\sum_{i=1}^{N} f(c_i)\Delta x$$

Onde "Δx" é a notação do livro para (b_i-a_i), e cada c_i é um ponto no intervalo $[a_i;b_i]$: $c_i \in [a_i;b_i]$.

Por exemplo, para calcularmos esta aproximação por retângulos,



Precisamos ter, além da função $f(x)=4-(x-2)^2$ e da partição $P=\{0,1,2,3,4\}$, os valores dos "c_i"s:

$$\left.\begin{array}{l} c_1=1,\\ c_2=2,\\ c_3=2.7,\\ c_4=3.6 \end{array}\right\}\text{dados extras!}$$

$$\sum_{i=1}^{N} f(c_i)\Delta x =$$
$$f(\underbrace{c_1}_{1})\underbrace{(\underbrace{b_1}_{1}-\underbrace{a_1}_{0})}_{1}+f(\underbrace{c_2}_{2})\underbrace{(\underbrace{b_2}_{2}-\underbrace{a_2}_{1})}_{1}+f(\underbrace{c_3}_{2.7})\underbrace{(\underbrace{b_3}_{3}-\underbrace{a_3}_{2})}_{1}+f(\underbrace{c_4}_{3.6})\underbrace{(\underbrace{b_4}_{4}-\underbrace{c_4}_{3})}_{4}$$

Se escolhermos os "c_i"s do jeito certo conseguimos fazer com que:

$$\sum_{i=1}^{N} f(c_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{N} f(a_i)(b_i-a_i) \quad (\text{"[L]"})$$
$$\sum_{i=1}^{N} f(c_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{N} f(b_i)(b_i-a_i) \quad (\text{"[R]"}),$$
$$\ldots = \ldots \quad (\text{"[m]"}),$$
$$\ldots = \ldots \quad (\text{"[Trap]"}),$$
("[inf]"),
("[sup]"),
("[m,n]"),
("[max]").

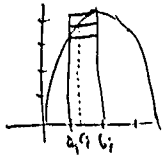
A primeira aplicação disso no cap. 7 é usar isso pra medir áreas entre curvas...

Truques:

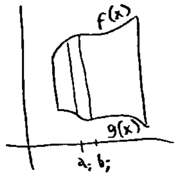
(1) "The approximation become exact by taking the limit $\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} f(c_i)\Delta x$"

(o "valor exato" é a área sob a curva).

(2) Se $f(x)$ for contínua dá pra escolher em cada intervalo $[a_i;b_i]$ um valor de c_i tal que a área do retângulo seja exatamente a área sob a curva. Exemplo:



O livro usa isso primeiro pra discutir como calcular áreas entre curvas... Ele usa essas figuras:



Dá pra escolher nesse intervalo $[a_i;b_i]$ um ponto $c_i\in[a_i;b_i]$ tal que a área do retângulo $f(c_i)\Delta x - g(c_i)\Delta x$ seja exatamente a área entre as duas curvas no intervalo $[a_i;b_i]$.

↑ Uma espécie de aplicação do truque (2)...

O truque (1) nos diz que no limite

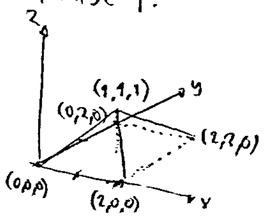
$$\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} f(x_i)\Delta x$$

Não importa mais que escolha dos "c_i"s a gente faz.

Um limite bem complicado, sobre todas as partições, disfarçado!!!

A gente já viu um pouco sobre áreas entre curvas na aula passada... (Na sexta eu vou uma lista de exercícios sobre isso, que vai virar um mini-teste em algum momento!)... Então vamos ver volumes.

Exemplo: Pirâmide P:



[1] Exercício (pra vocês entenderem as coordenadas disso aí):

[a] Represente graficamente a interseção dessa pirâmide P com o plano $z=\frac{1}{2}$ e dê os quatro vértices desse quadrado.

[b] Idem mas com $z=0.1$

[c] Idem mas com $z=0.9$

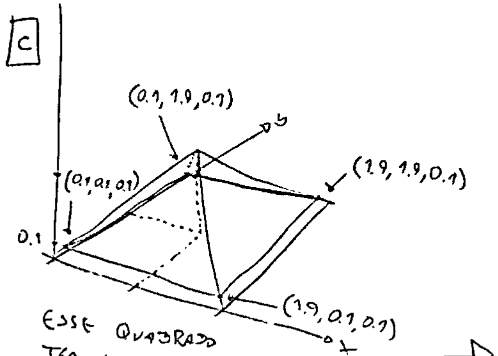
[d] Idem mas no caso geral — encontre fórmulas para os quatro pontos ($z\in[0,1]$)

C2 9/OUT/2019

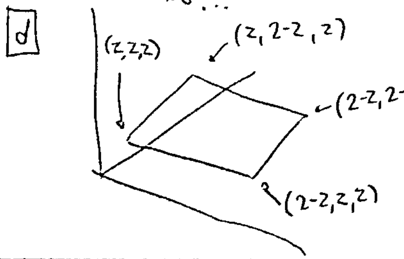
TURMA PEQUENA

HOJE:
- SOMAS DE RIEMANN
- VOLUMES

DICA: LEIAM O CAP. 7 DO APEX CALCULUS!!!



ESSE QUADRADO TEM LADO 1.8 ... $\Rightarrow$ ... E ÁREA $(1.8)^2$.



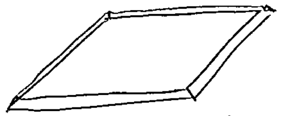
O LADO DESSE QUADRADO É: $2-2z$

A ÁREA DELE É $(2-2z)^2$.

COMO CALCULAR O VOLUME DESSA PIRÂMIDE?

O QUE ACONTECE SE A GENTE CORTAR ELA ENTRE $z=0.6$ E $z=0.7$?

VAMOS TER ALGO ASSIM:



E O QUADRADO DE CIMA É MENOR DO QUE O DE BAIXO.

O VOLUME DISSO É DIFÍCIL DE CALCULAR, MAS PODEMOS USAR OS TRUQUES 1 E 2...

VAI EXISTIR ALGUM $c_i \in [0.6, 0.7]$ TAL QUE ACONTECE ALGO COMO $f(c_i)\Delta x = \int_{x=a_i}^{x=b_i} f(x)\,dx$

PRA CADA $z \in [0,1]$

$\text{Lado}(z) = 2-2z$,

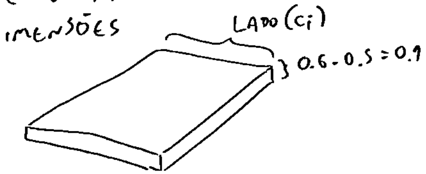
ONDE $\text{Lado}(z)$ É O LADO DO QUADRADO QUE É A INTERSEÇÃO DA PIRÂMIDE P COM O PLANO COM Z FIXO...

ALÉM DISSO

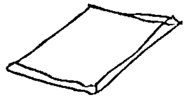
$\text{Área}(z) = \text{Lado}(z)^2 = (2-2z)^2$

ADAPTANDO (★),

EXISTE $c_i \in [0.5, 0.6]$ TAL QUE O PARALELEPÍPEDO DE DIMENSÕES



(★) TENHA O MESMO VOLUME QUE O "CORTE"



O VOLUME DESSE PARALELEPÍPEDO É:

$\text{Lado}(c_i)^2 \cdot (0.6-0.5)$.

SEJA P UMA PARTIÇÃO DE $[0,1]$.

PODEMOS CALCULAR

$$\begin{pmatrix}\text{VOLUME}\\\text{TOTAL DA}\\\text{PIRÂMIDE}\end{pmatrix} = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \underbrace{\text{Lado}(c_i)^2}_{\text{ÁREA DO CORTE}} \cdot (b_i - a_i)}_{\text{VOLUME DO CORTE ENTRE } z=a_i \text{ E } z=b_i}$$

OU:

$$\begin{pmatrix}\text{VOLUME}\\\text{TOTAL DA}\\\text{PIRÂMIDE}\end{pmatrix} = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \text{Lado}(c_i)^2 (b_i - a_i)$$

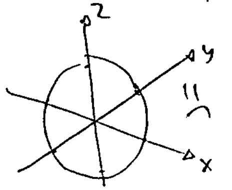
$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} (2-2z)^2 (b_i - a_i)$$

$$= \int_{z=0}^{z=1} \underbrace{(2-2z)^2}_{\text{ÁREA DO CORTE!!!}} dz$$

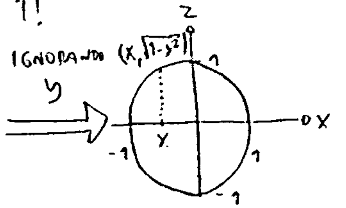
$$= \int_{z=0}^{z=1} 4 - 8z + 4z^2 \, dz$$

$$= \frac{4}{3}$$

... AGORA VAMOS FAZER A MESMA COISA - USANDO $\int_{z=a}^{z=b} \text{Área}(z)\,dz$, ALIÁS, $\int_{x=a}^{x=b} \text{Área}(x)\,dx$ - PRA CALCULAR O VOLUME DA ESFERA DE RAIO 1!



IGNORANDO y



SE EU CORTAR ESSE ESFERA NUM PLANO COM X CONSTANTE VOU OBTER UM CÍRCULO DE RAIO $\sqrt{1-x^2}$

E ÁREA $\pi\sqrt{1-x^2}^2$...

$$\begin{pmatrix}\text{VOLUME}\\\text{TOTAL DA}\\\text{ESFERA}\end{pmatrix} = \int_{x=-1}^{x=1} \text{Área}(x)\,dx$$

$$= \int_{x=-1}^{x=1} \pi(1-x^2)\,dx$$

$$= \pi \int_{x=-1}^{x=1} 1-x^2\,dx$$

$$= \pi \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{x=-1}^{x=1} = \pi\left(\left(1-\tfrac{1}{3}\right)-\left(-1+\tfrac{1}{3}\right)\right)$$

C2 10/OUT/2019

TURMA GRANDE

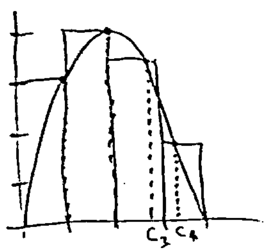
HOJE: SOMAS DE RIEMANN; VOLUMES; DISCUSSÃO SOBRE O MINI-TESTE.

DICA: LEIAM O CAP. 7 DO APEX CALCULUS!!!

ELE COMEÇA RELEMBRANDO ALGO QUE EU RESOLVI DEIXAR PRA APRESENTAR SÓ AGORA: SOMAS DE RIEMANN.

EXEMPLO: $\sum_{i=1}^{N} f(c_i)\Delta x$ ...

VISUALMENTE:



Se $f(x)=4-(x-2)^2$,

$P=\{0,1,2,3,4\}$,

$c_1=1$, $c_2=2$, $c_3=2.7$, $c_4=3.3$, } DADOS EXTRAS! RESTRIÇÃO: $\forall i.\ c_i\in[a_i,b_i]$

$\sum_{i=1}^{N} f(c_i)\Delta x =$

$\sum_{i=1}^{N} f(c_i)(b_i-a_i) =$

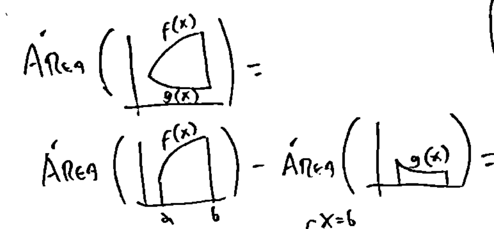
$\underbrace{f(\underbrace{c_1}_{1})}_{}\underbrace{(\underbrace{b_1}_{1}-\underbrace{a_1}_{0})}_{1} + f(\underbrace{c_2}_{2})\underbrace{(\underbrace{b_2}_{2}-\underbrace{a_2}_{1})}_{1} + f(\underbrace{c_3}_{2.7})\underbrace{(\underbrace{b_3}_{3}-\underbrace{a_3}_{2})}_{1} + f(\underbrace{c_4}_{3.3})\underbrace{(\underbrace{b_4}_{4}-\underbrace{a_4}_{3})}_{1}$

SE ESCOLHERMOS OS "c_i"S DO JEITO CERTO (E SE $f(x)$ FOR CONTÍNUA!) CONSEGUIMOS FAZER COM QUE $\sum_{i=1}^{N} f(c_i)\Delta x$

SEJA IGUAL A QUALQUER UM DOS MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO QUE A GENTE VIU:

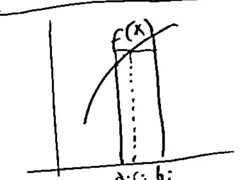
[L], [R], [M], [min], [máx], [inf], [sup], [TRAP] !!!

A PRIMEIRA APLICAÇÃO DISSO (SOMAS DE RIEMANN) NO CAP. 7 É CALCULAR ÁREAS...



$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx - \int_{x=a}^{x=b} g(x)\,dx$

NA HORA DE DISCUTIR COMO USAR RETÂNGULOS PRA MEDIR ESSAS ÁREAS ELE USA DOIS TRUQUES...



TRUQUE ①

A ÁREA SOB ESSA CURVA ENTRE a_i E b_i É EXATAMENTE A ÁREA DE ALGUM RETÂNGULO $f(c_i)(b_i-a_i)$ - EXISTE $c_i\in[a_i,b_i]$ ETC ETC.

TRUQUE ②

"THE APPROXIMATION BECOMES EXACT BY TAKING THE LIMIT $\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} f(c_i)\Delta x$"

ESSE LIMITE DAQUI É ALGO BEM COMPLICADO - LIMITE ENTRE TODAS AS PARTIÇÕES DE $[a,b]$ "À MEDIDA QUE ELAS FICAM INFINITAMENTE FINAS"...

VIMOS QUE

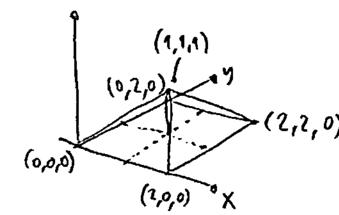
$\lim_{\substack{P \text{ PART } [a,b] \\ \|P\|\to 0}} \sum_{i=1}^{N} f(a_i)(b_i-a_i) = [L]$

$= \lim_{\substack{P \text{ PART } [a,b] \\ \|P\|\to 0}} \sum_{i=1}^{N} f(b_i)(b_i-a_i) = [R]$

... NESSE TRECHO DO LIVRO FICA IMPLÍCITO QUE ESTAMOS ESCOLHENDO OS "c_i"S DE QUALQUER JEITO, NÃO DO JEITO MÁGICO DO TRUQUE ① QUE FAZ OS RESULTADOS SEREM EXATOS.

A GENTE JÁ VIU (NUMA AULA ÀS 7:00 NUM DIA QUE QUASE TODO MUNDO FALTOU!!) UM POUCO SOBRE ÁREAS... ENTÃO QUEM NÃO VEIO POR FAVOR (RE)VEJA ISTO EM CASA... VAMOS PASSAR DIRETO PRA VOLUMES.

EXEMPLO: SEJA P ESTA PIRÂMIDE:



EXERCÍCIOS: SE CORTARMOS ESSA PIRÂMIDE POR UM PLANO HORIZONTAL VAMOS OBTER UM QUADRADO "FLUTUANDO NO AR"... DÊ AS COORDENADAS DOS QUATRO VÉRTICES DESTES QUADRADOS NOS CASOS:

ⓐ $z=0.5$
ⓑ $z=0.1$
ⓒ $z=0.9$
ⓓ CASO GERAL, $z\in[0,1]$

C2 10/OUT/2019

TURMA GRANDE

HOJE: SOMAS DE RIEMANN; VOLUMES; DISCUSSÃO SOBRE O MINI-TESTE.

LEMBREM QUE DÁ PRA ENCONTRAR PONTOS NAS ARESTAS DA PIRÂMIDE P USANDO RETAS PARAMETRIZADAS...

SE $A=(2,2)$ E $B=(1,1)$

ENTÃO TODOS OS PONTOS DA FORMA $A+t\overrightarrow{AB}$ ESTÃO NA RETA QUE PASSA POR A E B.

SE $A=(2,2,0)$ E $B=(1,1,1)$

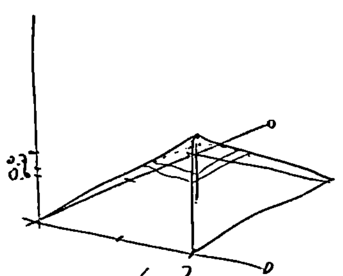
ENTÃO $A+t\underbrace{\overrightarrow{AB}}_{B-A}=(2,2,0)+t(-1,-1,1)$

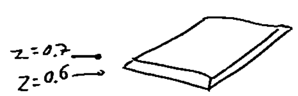
$=(2-t,2-t,t)$

O QUE ACONTECE SE A GENTE FATIA ESSE PIRÂMIDE USANDO VÁRIOS PLANOS HORIZONTAIS?

$P=\{0,\ 0.4,\ 0.5,\ 0.6,\ 0.7,\ 1\}$

ENTRE $z=0.6$ E $z=0.7$,





ESSA FATIA TEM UM QUADRO MAIOR EMBAIXO E UM QUADRADO MENOR EM CIMA...

CONTINUAÇÃO DO EXERCÍCIO:

CADA CORTE DA PIRÂMIDE P POR UM PLANO Z CONSTANTE DÁ UM QUADRADO... DESCUBRA O LADO E A ÁREA DESSE QUADRADO.

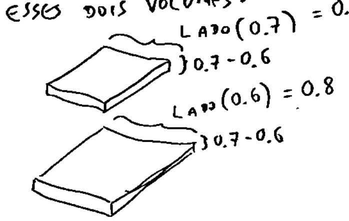
(e) LADO(0.5), ÁREA(0.5) $\Rightarrow 1,\ 1^2$

(f) LADO(0.1), ÁREA(0.1) $\Rightarrow 1.8,\ 1.8^2$

(g) LADO(0.9), ÁREA(0.9) $\Rightarrow 0.2,\ 0.2^2$

(h) LADO(z), ÁREA(z) $\Rightarrow (2-2z),\ (2-2z)^2$

O VOLUME DESSE OBJETO 3D AQUI ESTÁ ENTRE ESSES DOIS VOLUMES:



VOLUME: $\underbrace{\text{ÁREA}(0.7)}_{0.6^2}\cdot\underbrace{\text{ALTURA}}_{0.1}$

VOLUME: $\underbrace{\text{ÁREA}(0.6)}_{0.8^2}\cdot\underbrace{\text{ALTURA}}_{0.1}$

USANDO UM DOS TRUQUES ① OU ② (QUAL? EU APAGUEI! !!) DESCOBRIMOS QUE O VOLUME DO OBJETO 3D COMPLICADO É

$\underbrace{\text{ÁREA}(c_i)}\cdot(\underbrace{b_i}_{0.7}-\underbrace{a_i}_{0.6})$

ALGUM VALOR ENTRE 0.6 E 0.7

E USANDO O OUTRO TRUQUE A GENTE DESCOBRE QUE

$$\begin{pmatrix}\text{VOLUME TOTAL}\\ \text{DA PIRÂMIDE } P\end{pmatrix}=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\underbrace{f(c_i)}_{\text{ÁREA}(c_i)}(b_i-a_i)$$

$$=\int_{z=0}^{z=1}\text{ÁREA}(z)\,dz$$

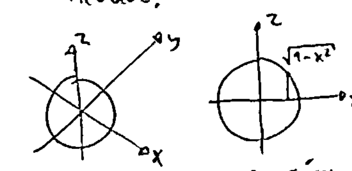
$$=\int_{z=0}^{z=1}(2-2z)^2\,dz$$

$$=\int_{z=0}^{z=1}4-8z+4z^2\,dz$$

A GENTE JÁ VIU (NUMA AULA ÀS 7:00 NUM DIA QUE QUASE TODO MUNDO CAFORCOU !!) UM POUCO SOBRE ÁREAS... ENTÃO QUEM NÃO VEIO PFAVOR (RE)VEJA ISTO EM CASA... VAMOS PASSAR DIRETO PRA VOLUMES.

TENTEM CALCULAR EM CASA O VOLUME DA ESFERA DE RAIO 1!

TRUQUE:



COMPLICADO!! MAIS FÁCIL !!

CORTANDO A ESFERA EM PLANOS COM X CONSTANTE OBTEMOS CÍRCULOS DE RAIO $\sqrt{1-x^2}$...

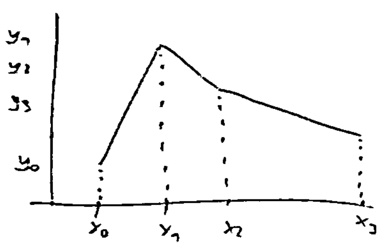
$$\begin{pmatrix}\text{VOLUME}\\ \text{TOTAL}\\ \text{DA}\\ \text{ESFERA}\end{pmatrix}=\int_{x=-1}^{x=1}\text{ÁREA}(x)\,dx$$

C2 11/out/2019

TURMA GRANDE

Hoje:
Mais modos de calcular volumes(?),
Como calcular comprimentos de curvas.

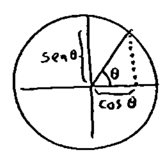
Idéia:



$\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}$ (y_1-y_0) (x_1-x_0)

O comprimento dessa curva pode ser calculado por uma soma de "$\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$"s.

Lembrando trigonometria...



1 sen θ cos θ

No círculo de raio 1 a hipotenusa é 1

No círculo de raio 99 a hipotenusa é 99 e:

99 99 sen θ 99 cos θ

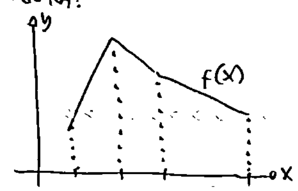
Um triângulo similar a estes:

$\frac{1}{\cos\theta}$ $\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$ $\frac{\cos\theta}{\cos\theta}$ = sec θ tan θ 1

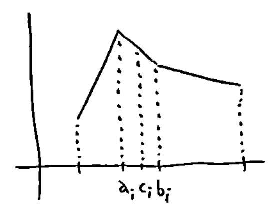
Outro:

42 sec θ 42 tan θ 42

Lembre que na figura:



Essa curva é formada por segmentos de reta, e em cada um desses segmentos a derivada $f'(x)$ é constante...
$f'(x)$ não existe nos "bicos" - ou seja, em x_0, x_1, x_2, x_3.



Usando a idéia da soma de Riemann, mas agora com $a_i < c_i < b_i$ ao invés de $a_i \le c_i \le b_i$...

$f'(c_i)$ vai ser independente da escolha do c_i, no seguinte sentido:
$\forall c,d \in (a_i,b_i).\ f'(c)=f'(d)$.

⇒ E voltando às identidades sobre c,s,z,t que a gente aprendeu na parte sobre integração trigonométrica...

$42t = 42f'(c_i)$ 42

Obs: Relembre a relação entre derivada, coeficiente angular, e a tangente deste ângulo:

Qual é a relação entre z e t?

$z=\frac{1}{c}$ $z^2=\frac{1}{c^2}=\frac{c^2+s^2}{c^2}=\frac{c^2}{c^2}+\frac{s^2}{c^2}=1+t^2$

$t=\frac{s}{c}$ $t^2=\frac{s^2}{c^2}$

$z^2=1+t^2$
$z=\sqrt{1+t^2}$

$42z = 42\sqrt{1+t^2}$ $42t$ 42

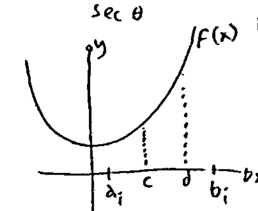
Mini-exercício:
Calcule a hipotenusa e o cateto oposto dos triângulos abaixo:

(a) ? ? 3 se $\tan\theta = 2$

(b) ? ? 10 se $\tan\theta = \frac{1}{2}$

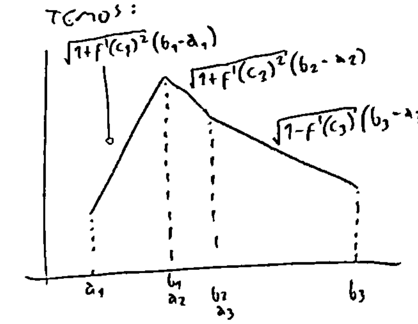
(c) ? ? 5 se $\tan\theta = 1$

Qual é a interpretação geométrica de $\underbrace{\sqrt{1+\underbrace{f'(c_i)}_{\tan\theta}{}^2}}_{\sec\theta}\,(b_i-a_i)$?



Nesse exemplo $f'(c)=1$, $f'(d)=2$.

Péra, acho que eu pulei um passo!
No caso de curvas formadas por segmentos de retas, com $c_i \in (a_i,b_i)$, temos:



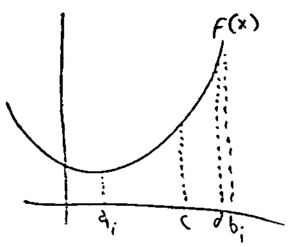
C2 11/out/2019

TURMA GRANDE

Hoje:

Mais modos de calcular volumes(?), como calcular comprimentos de curvas.

Voltando...
Considere esta figura aqui, que é uma "curva curva" e não uma curva formada de segmentos de reta:

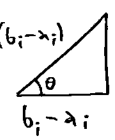


Digamos que $f'(c)=1$, $f'(d)=2$.

Qual é a interpretação geométrica de $\sqrt{1+f'(c)^2}\,(b_i-a_i)$? ⇐ triângulo com $\tan\theta=1$

e a de $\sqrt{1+f'(d)^2}\,(b_i-a_i)$? ⇐ triângulo com $\tan\theta=2$

1º caso ("c"):

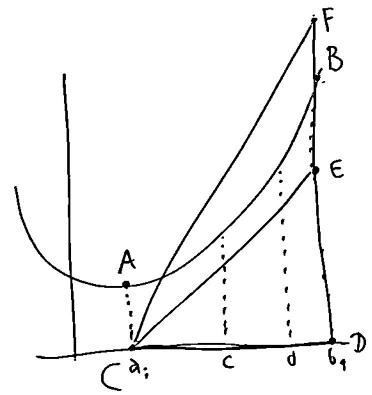


$\tan\theta=1$

2º caso ("d"):

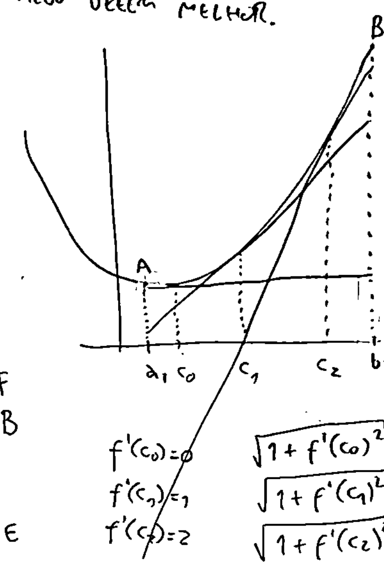
$\tan\theta=2$

Figura com a curva original e os dois triângulos:



No olhômetro o comprimento da curva entre A e B está entre os comprimentos de CE e CF...

Aliás vamos fazer algo beeem melhor.

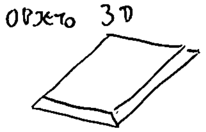


$f'(c_0)=0$ $\quad \sqrt{1+f'(c_0)^2}\,(b_i-a_i) = \sqrt{1}\,(b_i-a_i)$

$f'(c_1)=1$ $\quad \sqrt{1+f'(c_1)^2}\,(b_i-a_i) = \sqrt{1+1^2}\,(b_i-a_i)$

$f'(c_2)=2$ $\quad \sqrt{1+f'(c_2)^2}\,(b_i-a_i) = \sqrt{1+2^2}\,(b_i-a_i)$

Vamos lembrar dos truques ① e ② da aula passada... Um deles nos dizia que o volume desse objeto 3D



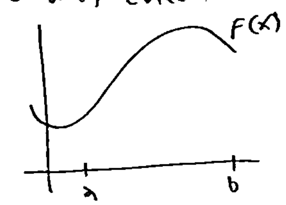
era $\text{Área}(c_i)\,(b_i-a_i)$ para algum c_i...

Adaptando esse truque pra comprimentos de curvas, ⇐ o comprimento da curva do exemplo entre A e B vai ser

$$\sqrt{1+f'(c_i)^2}\,(b_i-a_i)$$

para algum $c_i\in(a_i,b_i)$.

O outro truque nos dizia que pra calcular o comprimento total de uma curva



entre a e b podemos calculá-lo assim:

$$\binom{\text{comprimento}}{\text{total}} = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\sqrt{1+f'(c_i)^2}\,(b_i-a_i) = \int_{x=a}^{x=b}\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

C2 11/OUT/2019

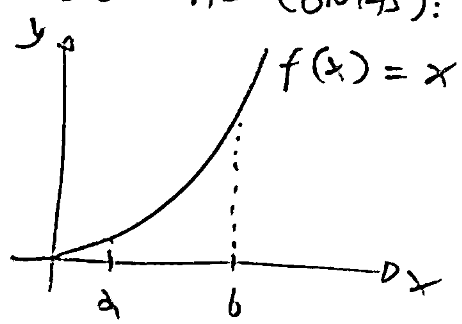
TURMA GRANDE

HOJE:

MAIS MODOS DE CALCULAR VOLUMES(?),

COMO CALCULAR COMPRIMENTOS DE CURVAS.

PRIMEIRO EXEMPLO DO LIVRO (EM QUE ELE FAZ TODAS AS CONTAS):



$f(x) = x^{3/2} = x\sqrt{x}$

$$\int_{x=a}^{x=b} \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = ?$$

$$\int_{x=0}^{x=4} \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = ?$$

$f(x)=x^{3/2}$

$f'(x) = \frac{3}{2} x^{1/2} = \frac{3\sqrt{x}}{2}$

$$\int \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx =$$

$$\int \sqrt{1+\left(\tfrac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2}\,dx =$$

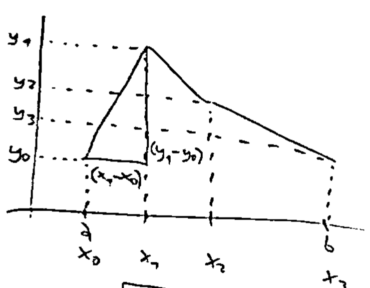
$$\int \sqrt{1+\tfrac{9}{4}x}\,dx = \quad \left[\begin{array}{l} u = 1+\frac{9}{4}x \\ x = \frac{4}{9}(u-1) \\ dx = \frac{4}{9}du \end{array}\right]$$

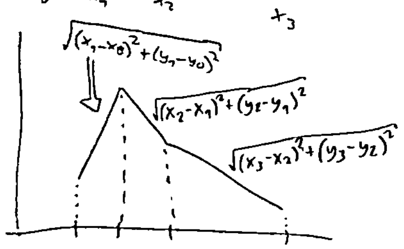
C2 11/OUT/2019

TURMA PEQUENA

Hoje:
Comprimentos de curvas!

É fácil calcular o comprimento de uma curva feita de segmentos de retas... por exemplo esta aqui:



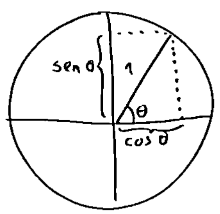


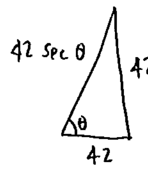
Essa fórmula misteriosa daqui é a "fórmula pra calcular o comprimento [de arco] de uma curva":

$$\int_{x=a}^{x=b}\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

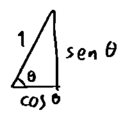
Vamos tentar entendê-la!

Lembre:





Uma das coisas que a gente viu na parte sobre substituição trigonométrica é que $\tan\theta$ e $\sec\theta$ obedecem uma relação parecida com $(\cos\theta)^2+(\operatorname{sen}\theta)^2=1$...

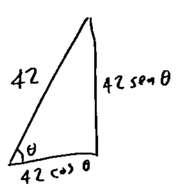


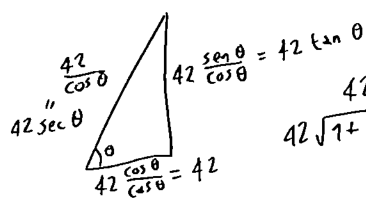
$c=\cos\theta$
$s=\operatorname{sen}\theta$
$t=\tan\theta=\frac{s}{c}$
$z=\sec\theta=\frac{1}{c}$

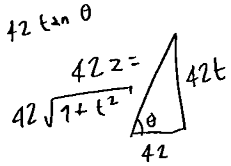
$t^2=\frac{s^2}{c^2}$

$z^2=\frac{1^2}{c^2}=\frac{1}{c^2}=\frac{c^2+s^2}{c^2}=\frac{c^2}{c^2}+\frac{s^2}{c^2}=1+t^2$

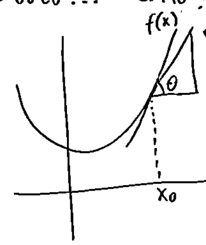
$\boxed{z^2=1+t^2}$







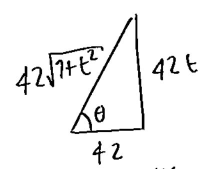
Lembre que derivada tem a ver com coeficiente angular (da reta tangente) e com tangente de um ângulo... Como?



← Essa reta tem coef. ang. $f'(x_0)$; a equação dela é $y=f'(x_0)x+b$

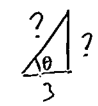
Além disso $f'(x_0)=\tan\theta$.

No triângulo

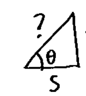


A gente vai considerar que o $\sqrt{1+t^2}$ é um "fator multiplicador" que nos permite descobrir a hipotenusa a partir da base ("cateto adjacente").

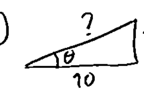
Exercício:
Calcule o valor dos "?" nos triângulos abaixo:

(a) 

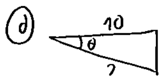
$\tan\theta=2$

(b) 

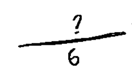
$\tan\theta=1$

(c) 

$\tan\theta=\frac{1}{2}$

(d) 

$\tan\theta=-\frac{1}{2}$

(e) 

$\tan\theta=0$

Voltando...

Lembre que as somas de Riemann eram assim:

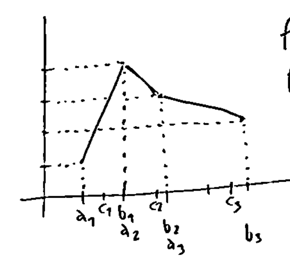
$$\sum_{i=1}^{N} f(c_i)\,\Delta x$$

onde $c_i\in[a_i,b_i]$...

A gente vai restringir isso um pouquinho:

$c_i\in(a_i,b_i)$.

Exercício:



$f'(c_1)=?$
$f'(c_2)=?$
$f'(c_3)=?$

Precisamos:
- Confirmar a data da P1
- e, se puder, marcar P2, VR, VS
- Discutir mini-teste

C2 11/OUT/2019

TURMA PEQUENA

HOJE:
COMPRIMENTOS DE CURVAS!

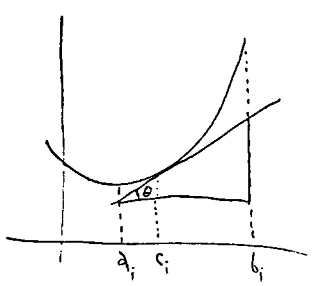
ESSA FÓRMULA MISTERIOSA DAQUI É A "FÓRMULA PRA CALCULAR O COMPRIMENTO [DE ARCO] DE UMA CURVA":

$$\int_{x=a}^{x=b} \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

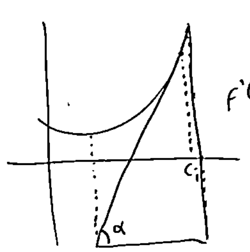
VAMOS TENTAR ENTENDÊ-LA!

QUAL É O SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DE

$$\underbrace{\underbrace{\sqrt{1+\underbrace{f'(c_i)}_{\tan\theta}{}^2}}_{\text{FATOR MULTIPLICADOR}}\ \underbrace{(b_i-a_i)}_{\text{BASE}}}\ ?$$



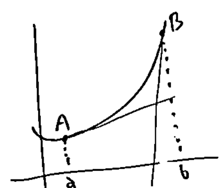
$f'(c_i)=\tan\theta$



$f'(c_i)=\tan\alpha$

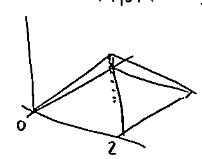
O PASSO SEGUINTE É INTUITIVO/ OLHOMÉTRICO (MAS ALGUNS LIVROS FAZEM ELE COM TODO DETALHE).

O COMPRIMENTO DO SEGMENTO DE ARCO ENTRE A E B (O "COMPRIMENTO DA CURVA $f(x)$ ENTRE $x=a$ E $x=b$")

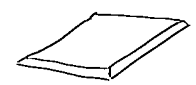


É EXATAMENTE O COMPRIMENTO DE ALGUMA HIPOTENUSA $\sqrt{1+f'(c_i)^2}(b_i-a_i)$ PARA A ESCOLHA CERTA DE c_i

NA AULA PASSADA VIMOS ALGO ASSIM PRA CALCULAR O VOLUME DE UMA FATIA DA PIRÂMIDE...



ENTRE $z=0.6$ E $z=0.7$ A FATIA DA PIRÂMIDE TINHA ESSA CARA:

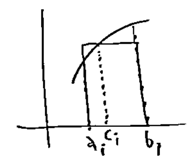


E EXISTIA ALGUM $c_i \in [0.6, 0.7]$ TAL QUE O VOLUME DESSA FATIA ERA

$\text{ÁREA}(c_i)\cdot(0.7-0.6)$.

A GENTE VIU QUE O LIVRO USAVA DOIS TRUQUES:

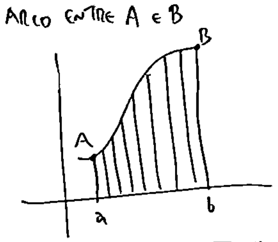
① EM CADA INTERVALO $[a_i,b_i]$ EXISTE UM $c_i \in [a_i,b_i]$ TAL QUE A ÁREA DO RETÂNGULO $f(c_i)(b_i-a_i)$ É EXATAMENTE A ÁREA SOB $f(x)$ NESSE INTERVALO...



② "THE APPROXIMATION BECOMES EXACT BY TAKING THE LIMIT $\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} f(c_i)(b_i-a_i)$"

E AQUI FICA IMPLÍCITO QUE A GENTE PODE ESCOLHER OS "c_i" DE QUALQUER MODO DENTRO DOS INTERVALOS.

OU SEJA:
DÁ PRA CALCULAR O COMPRIMENTO DE ARCO ENTRE A E B



DIVIDINDO O INTERVALO $[a,b]$ EM VÁRIOS SUBINTERVALOS, ESCOLHENDO O c_i "CERTO" EM CADA SUBINTERVALO, E FAZENDO ESSA CONTA:

$$\sum_{i=1}^{N}\sqrt{1+f'(c_i)^2}\,(b_i-a_i)$$

⇐ PELO TRUQUE ①

E PELO TRUQUE ② PODEMOS CALCULAR ESSE COMPRIMENTO DE ARCO FAZENDO

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\sqrt{1+f'(c_i)^2}\,(b_i-a_i)$$

ONDE AGORA PODEMOS ESCOLHER QUALQUER $c_i\in[a_i,b_i]$!

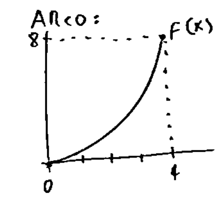
E PODEMOS TRADUZIR ISSO PRA UMA INTEGRAL:

$$\begin{pmatrix}\text{COMPRIMENTO}\\ \text{DE ARCO}\\ \text{ENTRE } x=a\\ \text{E } x=b\end{pmatrix} = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\sqrt{1+f'(c_i)^2}\,(b_i-a_i)$$

$$= \int_{x=a}^{x=b}\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

PRECISAMOS:
- CONFIRMAR A DATA DA P1
- E, SE PUDER, MARCAR P2, VR, VS
- DISCUTIR MINI-TESTE

EXERCÍCIO:
SEJA $f(x)=x^{3/2}$.
CALCULE ESTE COMPRIMENTO DE ARCO:



ENTRE $x=0$ E $x=4$.

$f'(x)=\frac{3}{2}\cdot x^{1/2}$

$\int\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx=$

$\int\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right)^2}\,dx=$

$\int\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=$ $\left[\begin{array}{l}u=1+\frac{9}{4}x\\ x=\frac{4}{9}(u-1)\\ dx=\frac{4}{9}du\end{array}\right.$

$\int\sqrt{u}\,\frac{4}{9}du=$

$\frac{4}{9}\int u^{1/2}du=$

$\frac{4}{9}\left(\frac{2}{3}u^{3/2}\right)=$

$\frac{8}{27}u^{3/2}=$

$\frac{8}{27}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}$

C2 16/out/2019

TURMA PEQUENA

HOJE: EDOS - PRIMEIRO MÉTODO: "VARIÁVEIS SEPARÁVEIS"!

AINDA FALTA UMA "APLICAÇÃO DA INTEGRAL", QUE É O MÉTODO PRA CALCULAR A ÁREA DE ALGUNS OBJETOS 3D, MAS VAMOS DEIXAR ISSO PRA SEXTA.

NÓS TAMBÉM VAMOS TER MÉTODOS COMPLETAMENTE DIFERENTES PRA RESOLVER EDOS, DA MESMA FORMA QUE VIMOS VÁRIOS MÉTODOS TOTALMENTE DIFERENTES PRA RESOLVER INTEGRAIS...

O PRIMEIRO MÉTODO - QUE SERVE PRA "EDOS COM VARIÁVEIS SEPARÁVEIS". VAMOS VER A CLASSIFICAÇÃO DAS EDOS DEPOIS - PODE SER USADO PRA RESOLVER EDOS DA FORMA $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$...

PRIMEIRO EXEMPLO:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad (\star)$$

ISTO PODE SER REESCRITO DESTE JEITO:

$$f'(x) = -\frac{x}{f(x)} \quad (\star\star)$$

PODEMOS TENTAR RESOLVER ISTO POR CHUTAR E TESTAR, MAS...

1 EXERCÍCIO: TESTE CADA UMA DAS $f(x)$ ABAIXO PRA VER SE ELA OBEDECE $(\star\star)$:

a) $f(x) = x$

b) $f(x) = x^2$

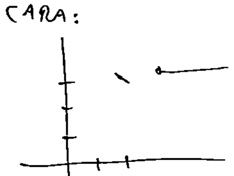
c) $f(x) = e^x$

d) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

COMO PODERÍAMOS TER CHUTADO A SOLUÇÃO $f(x) = \sqrt{1-x^2}$?

LEMBRE QUE SE TUDO QUE SABEMOS SOBRE UMA $g(x)$ É QUE $g(2)=3$, $g'(2)=-1$

ENTÃO SABEMOS QUE O GRÁFICO DA $g(x)$ TEM ESTA CARA:



SABEMOS QUE $y=g(x)$ PASSA PELO PONTO $(2,3)$ COM DERIVADA -1...

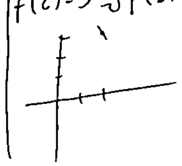
SÓ SABEMOS INFORMAÇÕES SOBRE O COMPORTAMENTO DE $g(x)$ EM $x=2$...

A EQUAÇÃO $(\star\star)$ NOS PERMITE CALCULAR $f'(x)$ SE SOUBERMOS x E $f(x)$...

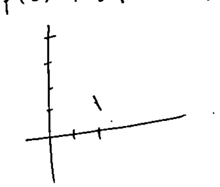
EXEMPLO: $x=2$, $f(x)=3$, $f(2)=3$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{x}{f(x)} \Rightarrow f'(2) = -\frac{2}{f(2)} = -\frac{2}{3}$$

$f(2)=3 \Rightarrow f'(2) = -\frac{2}{3}$

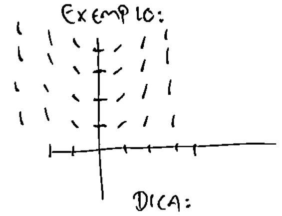


$f(2)=1 \Rightarrow f'(2) = -\frac{2}{f(2)} = -2$



2 EXERCÍCIO: USE $(\star\star)$ PRA DESENHAR UM "CAMPO DE DIREÇÕES" PARA AS SOLUÇÕES DE $(\star\star)$...

EXEMPLO:



DICA: PRA CADA $x \in \{-2,-1,0,1,2\}$, $y \in \{-2,-1,0,1,2\}$ DESENHE UM TRACINHO COM A INCLINAÇÃO CERTA NO PONTO (x,y); OBS: DÁ PRA USAR $(\star)$: $\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{\text{INCLINAÇÃO}} = -\frac{x}{y}$

(FIZEMOS O DESENHO NA ÁREA DE RASCUNHO)

...DÁ PRA CHUTAR QUE AS SOLUÇÕES SÃO CÍRCULOS...

...NO SENTIDO DE QUE $x^2+y^2=1$ É SOL., $x^2+y^2=4$ É SOL.,

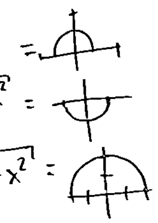
$\Rightarrow y^2 = 1-x^2$

$\Rightarrow y = \pm\sqrt{1-x^2}$

$y = \sqrt{1-x^2} =$

$y = -\sqrt{1-x^2} =$

$y = \sqrt{4-x^2} =$



COMO ENCONTRAR ESSAS SOLUÇÕES ALGEBRICAMENTE? (VAMOS USAR GAMBIARRAS COM dx E dy AINDA PIORES QUE AS ANTERIORES!)

$$(\star) \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$y\frac{dy}{dx} = -x$$

$$y\,dy = -x\,dx$$

$$\int y\,dy = \int -x\,dx = -\int x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2}+C_1 \qquad -\frac{x^2}{2}+C_2$$

$$\frac{y^2}{2}+C_1 = -\frac{x^2}{2}+C_2$$

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2} = C_2-C_1$$

$$x^2+y^2 = \underbrace{2(C_2-C_1)}_{C_3} \Rightarrow y^2 = C_3-x^2$$

$$y = \pm\sqrt{C_3-x^2}$$

O QUE ACONTECE SE $C_1=42$ E $C_2=99$?

$$\frac{y^2}{2}+42 = -\frac{x^2}{2}+99$$

$$\frac{y^2}{2}+\frac{x^2}{2} = 99-42 = 57$$

$$x^2+y^2 = 2\cdot 57$$

ESSE MÉTODO SUGERE (OBS: ESTAMOS USANDO GAMBIARRAS, ENTÃO TEMOS QUE CHECAR OS RESULTADOS!) QUE AS SOLUÇÕES DE $(\star\star)$ SÃO FUNÇÕES DA FORMA $y = \pm\sqrt{C_3-x^2}$...

$\Uparrow$

$f(x)$

3 EXERCÍCIO: TESTE ESSAS SOLUÇÕES!

a) $f(x) = \sqrt{C_3-x^2}$ OBEDECE $(\star\star)$?

b) $f(x) = -\sqrt{C_3-x^2}$ OBEDECE $(\star\star)$?

C2 16/out/2019

TURMA PEQUENA

HOJE: EDOS – PRIMEIRO MÉTODO: "VARIÁVEIS SEPARÁVEIS"! AINDA FALTA UMA "APLICAÇÃO DA INTEGRAL" QUE É O MÉTODO PRA CALCULAR A ÁREA DE ALGUNS OBJETOS 3D, MAS VAMOS DEIXAR ISSO PRA SEXTA.

COMO GENERALIZAR ESSA IDÉIA?

VAMOS COMEÇAR PELO MEIO (OBS: QUASE TODOS OS NOSSOS MÉTODOS PRA RESOLVER EDOS VÃO SER MAIS FÁCEIS DE LEMBRAR SE A GENTE "COMEÇAR PELO MEIO").

CASO PARTICULAR:

$$y\,dx = -x\,dx$$

$$\int y\,dx = \int -x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2}+C_1 \qquad -\frac{x^2}{2}+C_2$$

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2} = C_1+C_2$$

$$h(y)\,dy = g(x)\,dx$$

$$\int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx$$

$$H(y)+C_1 \qquad G(x)+C_2$$

$$H(y) = G(x)+C_2-C_1$$

$$\boxed{H^{-1}(H(y)) = H^{-1}(G(x)+C_2-C_1) \;=\; y}$$

OUTRO JEITO:

$$H(y)-G(x) = C_3$$

E VAMOS PROCURAR AS CURVAS DE NÍVEL DISTO, ISTO É, OS CONJUNTOS DA FORMA $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid H(y)-G(x)=C_3\}$

(4) EXERCÍCIO:

(a) RESOLVA:

$$e^{2y}\,dy = x^3\,dx \qquad (\star\star\star)$$

(b) TESTE AS SUAS SOLUÇÕES (OBS: "SUAS SOLUÇÕES" NO PLURAL PORQUE ELAS VÃO TER ALGO COMO UM "C_3", E CADA VALOR DESSE C_3 GERA UMA SOLUÇÃO DIFERENTE).

(c) CONVERTA $(\star\star\star)$ PRA ALGO EM TERMOS DE $f(x)$ E $f'(x)$, COMO FIZEMOS COM ISTO AQUI...

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \iff f'(x) = -\frac{x}{f(x)}.$$

(d) DESCUBRA COMO AJUSTAR O C_3 PARA A SUA SOLUÇÃO OBEDECER $f(a)=b$ PARA a E b DADOS – POR EXEMPLO, $f(42)=99$.

$$\int e^{2y}\,dy = \int x^3\,dx$$

$$\frac{1}{2}e^{2y}+C_1 \qquad \frac{1}{4}x^4+C_2$$

$$\frac{1}{2}e^{2y} = \frac{1}{4}x^4+C_2-C_1$$

$$e^{2y} = \frac{2}{4}x^4+2(C_2-C_1)$$

$$= \frac{1}{2}x^4+\underbrace{2(C_2-C_1)}_{C_3}$$

$$= \frac{1}{2}x^4+C_3$$

$$e^{2y} = \frac{1}{2}x^4+C_3$$

$$\ln(e^{2y}) = \ln\left(\frac{1}{2}x^4+C_3\right)$$

$$2y = \ln\left(\frac{1}{2}x^4+C_3\right)$$

(a) $$\boxed{y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}x^4+C_3\right)}$$

(b) $$f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}x^4+C_3\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\ln\left(\frac{1}{2}x^4+C_3\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^4+C_3\right)}{\left(\frac{1}{2}x^4+C_3\right)} = \frac{1}{2}\frac{\left(\cancel{\frac{1}{2}}4x^3\right)}{\left(\cancel{\frac{1}{2}}x^4+C_3\right)} = 2\frac{x^3}{x^4+C_3}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}x^4+C_3\right)$$

$$f'(x) = 2\frac{x^3}{x^4+C_3}$$

SERÁ QUE ESSA $f(x)$ OBEDECE $(\star\star\star)$, OU SEJA, $e^{2y}\,dy = x^3\,dx$, OU SEJA, $f'(x) = \frac{x^3}{e^{2f(x)}}$?

PARÊNTESE:

(c) $$e^{2y}\,dy = x^3\,dx$$

$$e^{2y}\frac{dy}{dx} = x^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{e^{2y}}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{x^3}{e^{2f(x)}}}$$

OU SEJA, SERÁ QUE

$$2\frac{x^3}{x^4+C_3} \stackrel{?}{=} \frac{x^3}{e^{2\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}x^4+C_3\right)\right)}}$$

$$= \frac{x^3}{e^{\ln\left(\frac{1}{2}x^4+C_3\right)}}$$

$$= \frac{x^3}{\frac{1}{2}x^4+C_3}$$

$\neq$ CASA PLZ

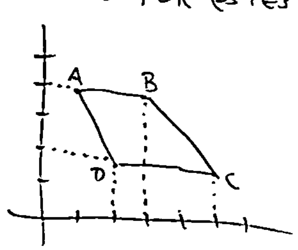
C2 16/out/2019

TURMA PEQUENA

Hoje: EDOs - primeiro método: "variáveis separáveis"! Ainda falta uma "aplicação da integral", que é o método pra calcular a área de alguns objetos 3D, mas vamos deixar isso pra sexta.

Lista de exercício de exercícios nova (que vai virar um mini-teste - falta digitar):

Seja Q o quadrilátero formado por estes pontos:



$A=(1,4)$, $B=(3,4)$, $C=(5,2)$, $D=(2,2)$

Seja $f(x)$ a curva que dá a parte de cima de Q e $g(x)$ a curva que dá a parte de baixo.

1) Qual é o domínio de $f(x)$? E o de $g(x)$?

2) Defina $f(x)$ formalmente por casos

3) Defina $g(x)$ formalmente por casos

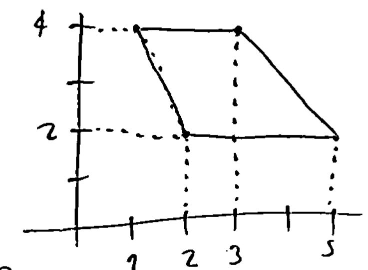
4) Idem para $f(x)-g(x)$ (obs: cada um dos seus casos tem que ser da forma "$ax+b$ quando $c \le x \le d$", como aqui: ⇩)

$$f(x) = \begin{cases} 3x+4 & \text{se } 42 \le x \le 99 \\ 5x+6 & \text{se } 99 < x \le 200 \end{cases}$$

5) Encontre uma definição por casos para:

$$H(t) = \left(\begin{array}{l}\text{Área de } Q \\ \text{entre } x=1 \\ \text{e } x=t\end{array}\right).$$

Hipótese:



2) $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{quando } 1 \le x \le 3 \\ 7-x & \text{quando } 3 < x \le 5 \end{cases}$

3) $g(x) = \begin{cases} -2x+6 & \text{quando } 1 \le x \le 2 \\ 2 & \text{quando } 2 < x \le 5 \end{cases}$

4) $$\underbrace{f(x)-g(x)}_{=\,h(x)} = \begin{cases} 2x-2 & \text{quando } 1 \le x \le 2 \\ 2 & \text{quando } 2 < x \le 3 \\ 5-x & \text{quando } 3 < x \le 5 \end{cases}$$

Truque pra resolver a 5:

$$H(t) = \begin{cases} \int_{x=1}^{x=t} h(t)\,dt & \text{se } 1 \le t \le 2 \\ \int_{x=1}^{x=2} h(t)\,dt + \int_{x=2}^{x=t} h(t)\,dt & \text{se } 2 < t \le 3 \\ \int_{x=1}^{x=2} h(t)\,dt + \int_{x=2}^{x=3} h(t)\,dt + \int_{x=3}^{x=t} h(t)\,dt & \text{se } 3 < t \le 5 \end{cases}$$

C2 17/out/2019

Turma grande

Hoje: EDOs com variáveis separáveis!

A gente ainda tem que ver uma "aplicação da integral", que é o método para calcular áreas de certas figuras 3D, mas vamos deixar isso pra amanhã...

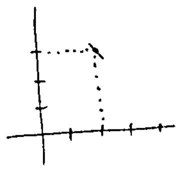
Vamos usar esta EDO como nosso primeiro exemplo:

$$\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{f'(x)} = \underbrace{-\frac{x}{y}}_{-\frac{x}{f(x)}} \qquad (\star)$$

$$f'(x) = -\frac{x}{f(x)} \qquad (\star\star)$$

Obs: Lembrem que resolvemos $\int \frac{2x+3}{x^2+4x+5}dx$ de um jeito totalmente diferente de $\int x\sqrt{1-x^2}dx$... Com EDOs é a mesma coisa.

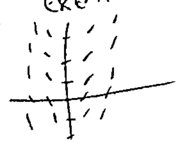
Lembre que
$f(2)=3$
$f'(2)=-1$
nos dá um pouquinho de informação gráfica sobre o gráfico da f...



O gráfico da f passa pelo ponto $(2,3)$ com coef. ang. -1.

A EDO $(\star)$ — ou, equivalentemente, $(\star\star)$, vai ter várias soluções... Cada uma delas é uma curva, e se desenharmos todas elas, ou muitas delas, vamos ter um "campo de direções"... que diz para cada ponto de $\mathbb{R}^2$ uma direção.

Exemplo:



Repare que

$$(\star\star) \quad f'(x) = -\frac{x}{f(x)}$$

nos permite descobrir a "direção" (o coeficiente angular!) das soluções da $(\star\star)$ em cada ponto de $\mathbb{R}^2$...

Exemplo: no ponto $(4,1)$?

Uma solução de $(\star\star)$ é uma $f(x)$ que obedece $f'(x) = -\frac{x}{f(x)}$ para todo x; sabemos testar se uma $f(x)$ dada obedece $(\star\star)$... Por exemplo, se $f(x)=x$ temos $f'(x)=1$,

$$\boxed{f'(x) \overset{?}{=} -\frac{x}{f(x)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{1 \overset{?}{=} -\frac{x}{1}}$$

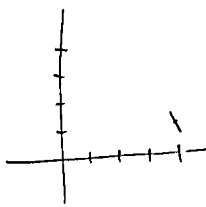
$\Rightarrow$ falso em geral!

Voltando:

Se a nossa solução passa pelo ponto $(4,1)$ é porque $(4,1) \in$ (gráfico da f), $(4,1) = (x,f(x))$, então quando $x=4$ temos $f(x)=1$...

$$\left(f'(x) = -\frac{x}{f(x)}\right)[x:=4] = \left(f'(4) = -\frac{4}{f(4)}\right),$$ ou seja,

$$f'(4) = -\frac{4}{1},$$ ou seja,



$\Leftarrow$ coef. ang. $= -4$.

Exercício:

1. Façam esse diagrama de tracinhos para EDO $(\star)$ nos pontos onde $x \in \{-2,-1,0,1,2\}$, $y \in \{-2,-1,0,1,2\}$.
2. Esse diagrama ("campo de direções") te permite chutar uma função que tem cara de ser solução de $(\star)$?

Façam em casa!

Como a gente resolve $(\star)$ algebricamente? Vamos usar umas gambiarras não confiáveis e testar os nossos resultados no final.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$
$$y\frac{dy}{dx} = -x$$
$$y\,dy = -x\,dx$$
$$\int y\,dy = \int -x\,dx$$
$$\frac{y^2}{2}+C_1 \qquad -\frac{x^2}{2}+C_2$$
$$\frac{y^2}{2}+C_1 = -\frac{x^2}{2}+C_2$$
$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2}+C_2-C_1$$
$$y^2 = -x^2+2(C_2-C_1)$$
$$y^2 = -x^2+C_3$$
$$\Rightarrow x^2+y^2=C_3$$

ou: $y = \pm\sqrt{C_3-x^2}$

$f(x) = \pm\sqrt{C_3-x^2}$

3. Exercício: Testem essas possíveis soluções:

a) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$
b) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$
c) $f(x)=-\sqrt{4-x^2}$
d) $f(x)=\sqrt{C_3-x^2}$
e) $f(x)=-\sqrt{C_3-x^2}$

C2 17/out/2019

Turma grande

Hoje: EDOs com variáveis separáveis!

A gente ainda tem que ver uma "aplicação da integral", que é o método para calcular áreas de certas figuras 3D, mas vamos deixar isso pra amanhã...

Vamos usar esta EDO como nosso primeiro exemplo:

$$\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{f'(x)} = \underbrace{-\frac{x}{y}}_{-\frac{x}{f(x)}} \quad (*)$$

$$f'(x) = -\frac{x}{f(x)} \quad (**)$$

Agora vamos generalizar isso, "começando pelo meio"...

Caso particular:

$$\int y\,dy = \int -x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2}+C_1 \qquad \frac{x^2}{2}+C_2$$

Caso geral:

$$\int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx$$

$$H(y)+C_1 \qquad G(x)+C_2$$

Caminho 1:

$$H(y)+C_1 = G(x)+C_2$$

$$H(y) = G(x)+C_2-C_1$$

$$\underbrace{H^{-1}(H(y))}_{y} = H^{-1}(G(x)+C_2-C_1)$$

Caminho 2:

$$H(y)+C_1 = G(x)+C_2$$

$$H(y)-G(x) = C_2-C_1$$

Ou seja, as nossas soluções vão ser as curvas

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid H(y)-G(x) = \underbrace{C_3}_{C_2-C_1}\}$$

("curvas de nível").

4) Exercício

a) Resolva esta EDO:

$$e^{2y}\,dy = x^3\,dx \quad (***)$$

b) Traduza ela pra um formato fácil de testar, como fizemos com

$$y\,dy = -x\,dx \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow$$

$$f'(x) = -\frac{x}{f(x)}$$

c) Teste as soluções que você obteve no item a) ("as soluções" porque mudando o C_3 a gente obtém várias soluções diferentes).

d) Descubra o valor de C_3 que faz a sua solução passar pelo ponto (42,99). ⇐ Casa!

a)

$$\int e^{2y}\,dy = \int x^3\,dx$$

$$\frac{1}{2}e^{2y}+C_1 \qquad \frac{1}{4}x^4+C_2$$

$$\frac{1}{2}e^{2y} = \frac{1}{4}x^4+C_2-C_1$$

$$e^{2y} = \frac{1}{2}x^4+2(C_2-C_1)$$

$$= \frac{1}{2}x^4+C_3$$

$$\ln(e^{2y}) = \ln\left(\frac{1}{2}x^4+C_3\right)$$

$$2y = \ln\left(\frac{1}{2}x^4+C_3\right)$$

$$y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}x^4+C_3\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}x^4+C_3\right)$$

c)

$$e^{2f(x)} = e^{2\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}x^4+C_3\right)\right)}$$

$$= e^{\left(\ln\left(\frac{1}{2}x^4+C_3\right)\right)}$$

$$= \frac{1}{2}x^4+C_3$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}x^4+C_3\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\ln\left(\frac{1}{2}x^4+C_3\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^4+C_3\right)}{\frac{1}{2}x^4+C_3}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2x^3}{\frac{1}{2}x^4+C_3} = \frac{x^3}{\frac{1}{2}x^4+C_3}$$

b)

$$e^{2y}\,dy = x^3\,dx$$

$$e^{2y}\frac{dy}{dx} = x^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{e^{2y}}$$

$$f'(x) = \frac{x^3}{e^{2f(x)}}$$

c) (cont.)

$$\boxed{f'(x) \overset{?}{=} \frac{x^3}{e^{2f(x)}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x^3}{\frac{1}{2}x^4+C_3} \overset{?}{=} \frac{x^3}{\frac{1}{4}x^4+C_3}}$$

⇒ Sim!!! !! !! !!

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\ln(g(x)) = \ln'(g(x))g'(x)$$

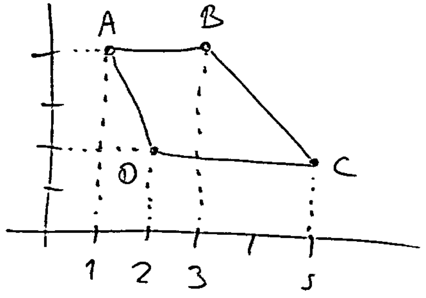
$$= \frac{1}{g(x)}g'(x)$$

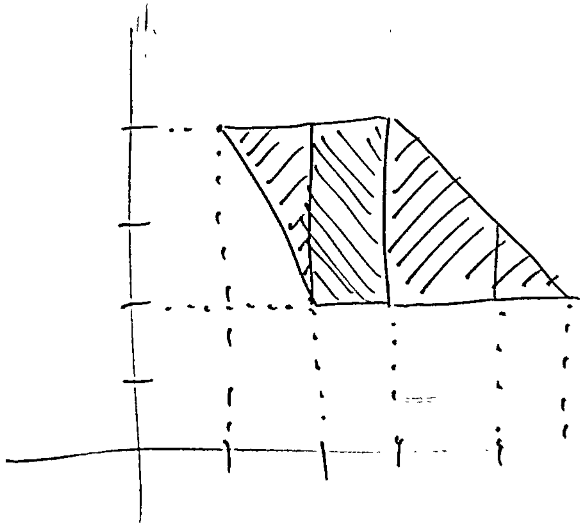
$$= \frac{g'(x)}{g(x)}$$

C2 17/OUT/2019

TURMA GRANDE

ACABEI DE DISTRIBUIR UMA FOLHA COM UNS EXERCÍCIOS SOBRE ÁREAS DE POLÍGONOS...





$$\alpha(t) = \left(\begin{array}{l}\text{ÁREA DE } Q \\ \text{ENTRE } x=1 \\ \quad \text{E } x=t\end{array}\right)$$

NO OLHÔMETRO,

$\alpha(1) = 0$

$\alpha(2) = 1$

$\alpha(3) = 3$

$\alpha(4) = 4.5$

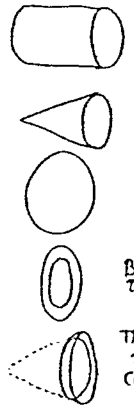
$\alpha(5) = 5$

C2 18/out/2019

Turma grande

Hoje: Áreas de superfícies de revolução!

Exemplos:



cilindros,

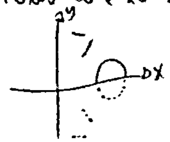
cones,

esferas,

bordas de pizzas,

troncos de cones

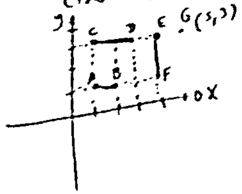
Pra gerar uma superfície de revolução a gente pega uma figura no plano xy e rotaciona ela em torno do eixo y.



Exercícios:

① Você encomendou uma pizza de raio 4 mas a borda dela era muito ruim e você não comeu, você só comeu o miolo dela, de raio 3. Qual é a área da borda que sobrou?

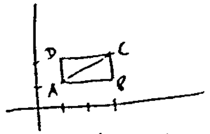
② Qual é a área do cilindro que a gente obtém rotacionando estes segmentos em torno do eixo x?



Notação:
$\mathrm{Rot}(AB)$, ou: $\mathrm{Rot}_x(AB)$;
$\text{Área}(\mathrm{Rot}(AB))$

③ Calcule:
$\text{Área}(\mathrm{Rot}(AB))$,
$\text{Área}(\mathrm{Rot}(CD))$,
$\text{Área}(\mathrm{Rot}(EF))$

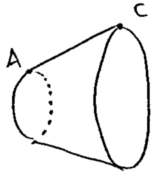
④ Como a gente calcula $\text{Área}(\mathrm{Rot}(AC))$ nesta figura?



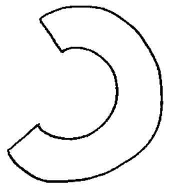
Tem vários jeitos, e alguns livros e vídeos usam um jeito desonesto...

Um jeito honesto difícil:
Faça Rot(AC) em papel e abra ele.

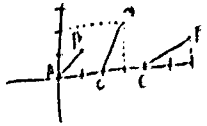
Rot(AC) =



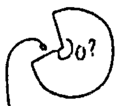
Abrindo, vamos obter algo como:



⑤ Planifique Rot(AB), Rot(CD), Rot(DE) na figura abaixo:



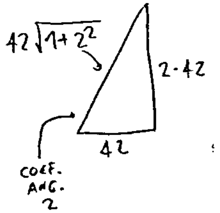
Dica:
Plan(Rot(AB)) =



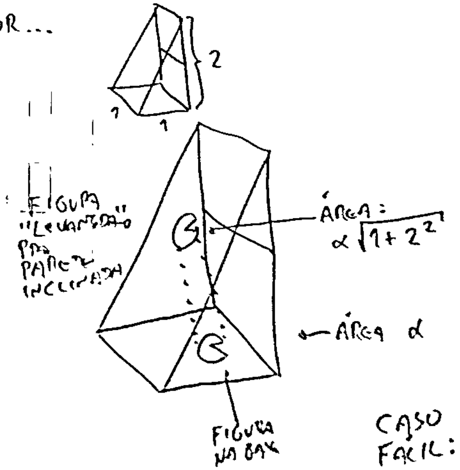
esta circunferência externa é a circunferência de Rot(B)

este comprimento é AD

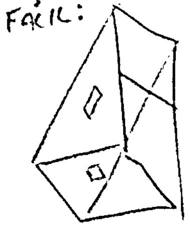
Na aula sobre comprimentos de curvas a gente interpretou o $\sqrt{1+f'(x)^2}$ como um "fator multiplicador"...



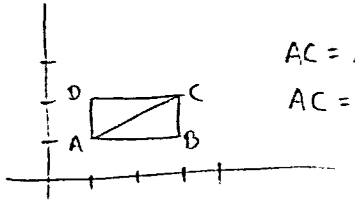
Esse fator multiplicador também vai servir pra áreas!



Caso fácil:



Voltando ao problema ④...



$AC = AB \cdot \sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}$

$AC = DC \cdot \sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}$

E se a gente rotacionar tudo isso?

Se a gente dividir as "versões rotacionadas" em, digamos, 360 pedaços de 1° cada um, vamos ter a impressão de que $\text{Área}\left(\frac{\mathrm{Rot}(AC)}{360}\right) = \text{Área}\left(\frac{\mathrm{Rot}(AB)}{360}\right) \cdot \sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}$...

e além disso $\text{Área}\left(\frac{\mathrm{Rot}(DC)}{360}\right) = \text{Área}\left(\frac{\mathrm{Rot}(AB)}{360}\right) \cdot \sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}$...

C2 18/out/2019

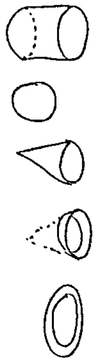
TURMA PEQUENA

Hoje: como calcular a área de alguns objetos 3D! ← "superfícies de revolução"

Depois a gente volta pra EDOs!

Notação: se A é um subconjunto do plano (x,y) Rot(A) vai ser o conjunto que obtemos rotacionando A ao redor do eixo x.

Exemplos de superfícies de revolução:



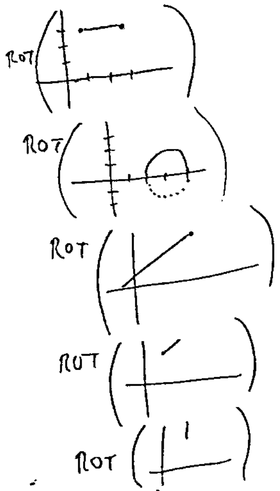
cilindros,

esferas,

cones,

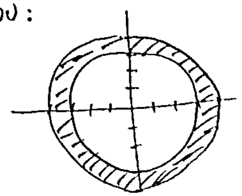
troncos de cones,

"bordas de pizzas".

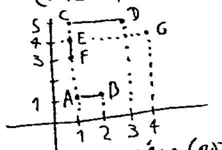


Rot ( ) Rot ( ) Rot ( ) Rot ( ) Rot ( )

(1) Digamos que você encomendou uma pizza de raio 4 mas a borda dela — de largura 1 — era muito ruim e você não comeu. Calcule a área do que sobrou:



(2) Sejam A, B, C, D, E, F, G estes pontos:

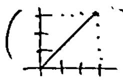


Calcule: Área(Rot(AB)), Área(Rot(CD)), Área(Rot(EF)) ← você já fez, e a circunferência do círculo Rot(G).

Os problemas seguintes são preparação pra gente aprender a calcular áreas de troncos de cones e depois da esfera...

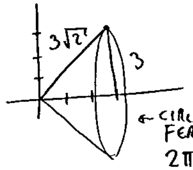
(3) Vamos usar a notação "Plan" pra planificar cones.

Digamos que Plan(Rot( ))

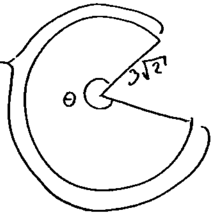


=

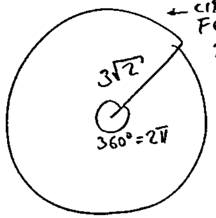
Descubram: o raio R, o ângulo θ, e a área do pacman acima.



← circunferência: $2\pi \cdot 3 = 6\pi$



6π



← circunferência: $2\pi \cdot 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}\pi$

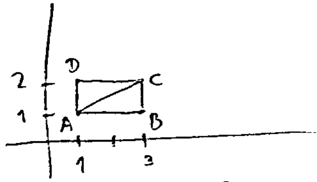
$\frac{6\sqrt{2}\pi}{2\pi} = \frac{6\pi}{\theta}$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{\theta}$

$\theta = \pi \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\pi$

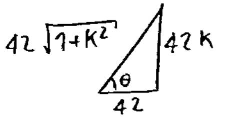
Dá pra generalizar isso!... Se a gente quebrar a cabeça bastante a gente consegue fórmulas pra estas áreas: Área(Rot((a,b))), Área(Rot((a,b) (ka,kb))), Área(Rot((a,b) (c,d)))

Existe um método melhor... que alguns livros apresentam ele sem um detalhe importante!...



Área(Rot(AC)) = ?

Vamos lembrar de comprimentos de curvas.



$k = \tan\theta$ é o coeficiente angular da hipotenusa!

Dá pra fazer algo parecido pra áreas! Exemplo: k = 2

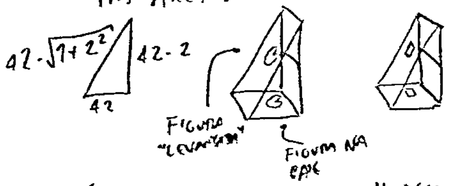
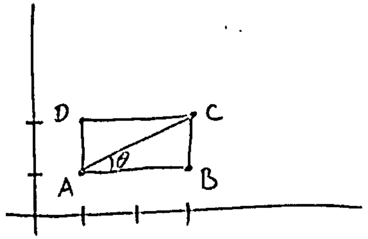


Figura "levantada"

Figura na base

A área da figura "levantada" vai ser a área da figura na base vezes $\sqrt{1+2^2}$!

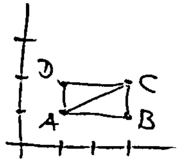
18/OUT/2019
TURMA PEQUENA



VERSÃO 2D:
$\tan\theta = \frac{1}{2}$
FATOR MULTIPLICADOR:
$\sqrt{1+(\frac{1}{2})^2}$

$AC = AB \cdot \sqrt{1+(\frac{1}{2})^2}$
$AC = DC \cdot \sqrt{1+(\frac{1}{2})^2}$

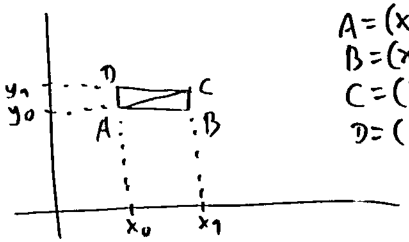
VERSÃO 3D:

Rot ()

IDÉIA (MEIO ERRADA):
$ÁREA(ROT(AC)) = ÁREA(ROT(AB)) \cdot \sqrt{1+(\frac{1}{2})^2}$
$ÁREA\left(\frac{ROT(AC)}{360}\right) = ÁREA\left(\frac{ROT(AB)}{360}\right) \cdot \sqrt{1+(\frac{1}{2})^2}$
$ÁREA\left(\frac{ROT(AC)}{360}\right) = ÁREA\left(\frac{ROT(DC)}{360}\right) \cdot \sqrt{1+(\frac{1}{2})^2}$

SÃO DIFERENTES! !!

O QUE VAI ACONTECER -
ALGUNS LIVROS E VÍDEOS
FAZEM ISSO DIRETO SEM
EXPLICAR OS DETALHES -
É QUE NESSA FIGURA
(UM POUCO MAIS GERAL
QUE A ANTERIOR)



$A = (x_0, y_0)$
$B = (x_1, y_0)$
$C = (x_1, y_1)$
$D = (x_0, y_1)$

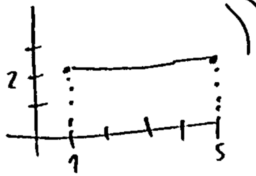
SE y_0 E y_1 FOREM MUITO
PRÓXIMOS ESSAS ÁREAS
VÃO SER MUITO PRÓXIMAS:
$ÁREA(ROT(DC)) \approx$
$ÁREA(ROT(AB))$
E AÍ A APROXIMAÇÃO
$ÁREA(ROT(DC)) \approx ÁREA(ROT(AB)) \cdot \sqrt{1+(\tan\theta)^2}$
PASSA A SER MUITO BOA, E A
GENTE CONSEGUE UMA
FÓRMULA PRA ÁREA TOTAL
USANDO UMA INTEGRAL COM
" $\sqrt{1+f'(x)^2}$ "
NO MEIO.

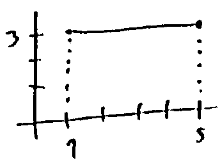
PRA CASA:
LEIAM A SESSÃO 7.4
DO LIVRO
(OBS: ELE FAZ
ISSO AQUI DIRETO,
MAS USANDO UMA
FÓRMULA QUE A
GENTE NÃO DEDUZIU).

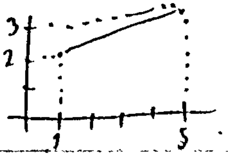
EXERCÍCIO:
O LIVRO DEMONSTRA
ESSA FÓRMULA:

$$(*) \quad ÁREA\left(ROT\left(\begin{array}{c}\text{GRÁFICO DE } f(x)\\ \text{ENTRE } x=a\\ \text{E } x=b\end{array}\right)\right) = \int_{x=a}^{x=b} 2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

USE ESTA FÓRMULA PRA
CALCULAR:

ÁREA (ROT ()),

ÁREA (ROT ()),

ÁREA (ROT ())

C2 1º/nov/2019

Hoje: o método pra resolver EDOs como esta aqui:

$$f''(x) + 7f'(x) + 10f(x) = 0 \quad (*)$$

("EDOs lineares de 2ª ordem com coeficientes constantes").

A gente vai ver a versão "álgebra linear" desse método, que usa matrizes, vetores e funções da forma $f(x) = e^{\alpha x}$.

Alguns livros dão uma prova que não dá pra gente entender como alguém descobriu aquilo.

A gente sabe procurar soluções de $(*)$ por chutar e testar...

1) Teste se as funções abaixo são soluções da $(*)$:

a) $f(x) = x$

b) $f(x) = e^{2x}$

c) $f(x) = e^{-2x}$

d) $f(x) = e^{5x}$

e) $f(x) = e^{-5x}$

Dica (pra derivar funções complicadas):

$$\frac{d}{dx} e^{2x} = \frac{d}{dx} g(2x) = g'(2x) \frac{d}{dx}(2x) = g(2x) \cdot 2 = e^{2x} \cdot 2$$

Seja $g(y) = e^y$, então $g'(y) = e^y$

__Vetores__ são __funções__ escritas de um jeito especial...

Se $\vec{v} = (10, 20, 30)$ então $\vec{v}_1 = 10$, $\vec{v}_2 = 20$, $\vec{v}_3 = 30$, $\vec{v}_{42} =$ erro.

Se $\vec{v}_i$ é só sintaxe para $\vec{v}(i)$, então $\vec{v} : \{1, 2, 3\} \to \mathbb{R}$...

mais precisamente:

$$\vec{v} = \{(1,10), (2,20), (3,30)\}$$

Temos jeitos "padrão" de definir somas de vetores e produto de vetor por escalar...

Se $\vec{w} = (100, 200, 300) = \{(1,100), (2,200), (3,300)\}$

$$\vec{v} + \vec{w} = (110, 220, 330) = \{(1,110), (2,220), (3,330)\}$$

$$2\vec{v} = (20, 40, 60) = \{(1,20), (2,40), (3,60)\}$$

Um vetor de tamanho k pode ser visto como uma função com domínio $\{1, 2, \ldots, k\}$...

Vamos ver (gambiarra!) funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ como vetores que têm infinitos componentes...

Exemplo: $f(x) = x^2$, $f(0.1) = 0.01$, $f_{0.1} = 0.01$

$f(-2) = 4$, $f_{-2} = 4$

...e podemos adaptar os nossos modos de somar vetores e multiplicar vetores por escalares pra essas funções disfarçadas de vetores...

$g(x) = 10x$

$f(2) = 4 \qquad f_2 = 4$

$g(2) = 20 \qquad g_2 = 20$

$$\vec{v} + \vec{w} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) + (\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3) = (\vec{v}_1 + \vec{w}_1, \vec{v}_2 + \vec{w}_2, \vec{v}_3 + \vec{w}_3)$$

$$(\vec{v} + \vec{w})_i = \vec{v}_i + \vec{w}_i$$

$$(2\vec{v})_i = 2\vec{v}_i$$

$$(f+g)_2 = f_2 + g_2 = f(2) + g(2) = 4 + 20 = 24$$

$$(f+g)_x = f_x + g_x = f(x) + g(x) = x^2 + 10x$$

Os próximos passos vão ficar menos confusos se a gente introduzir uma notação (temporária!!!) pra distinguir __números__ de funções constantes – e números de vetores...

__Notação lambda__

```
int f(int a) {
  return a*a;
}
```

Em linguagens funcionais a gente tem jeitos de definir funções sem nome. Em Lua,

```
function f(a) return a*a end
f = function(a) return a*a end
```

Em λ-cálculo,

$f = (\lambda a. a \cdot a)$

$f(10) = 10 \cdot 10 = 100$

Mais passo a passo:

$$f(10) = (\lambda a. a \cdot a)(10) = (a \cdot a)[a := 10] = 10 \cdot 10 = 100$$

$$(\lambda a. 3)(4) = ? = 3$$

Essa notação vai nos permitir distinguir o número 4 da função constante $(\lambda a. 4)$.

"escalar" "vetor"

C2 1º/nov/2019

Hoje: o método pra resolver EDOs como esta aqui:

$$f''(x)+7f'(x)+10f(x)=0 \quad (☆)$$

("EDOs lineares de 2ª ordem com coeficientes constantes")

Def: (obs: a gente vai precisar melhorar ela depois!)

$$Df = f'$$

Exemplos:

$$D(\lambda x.\, x^4) = (\lambda x.\, 4x^3)$$

Uma sintaxe um pouco mais precisa:

$$Df = \left(\lambda x.\, \tfrac{d}{dx} f(x)\right)$$

② Calcule:

ⓐ $D(\lambda x.\, \operatorname{sen} x) = ?$

ⓑ $D(\lambda x.\, e^{x}) = ?$

ⓒ $D(\lambda x.\, e^{4x}) = ?$

ⓓ $D(\lambda x.\, f(x)+g(x)) = ?$

ⓔ $D(\lambda x.\, 200f(x)) = ?$

Essa operação D recebe uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ (escrita em notação λ, que a gente trata como vetor) e retorna outra função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ (idem!)

$$D(f+g) = Df + Dg$$
$$D(200f) = 200\, Df$$

Obs: $(\lambda x.\, f(x)) + (\lambda x.\, g(x)) = (\lambda x.\, f(x)+g(x))$

$$(f+g) = (\lambda x.\, f(x)+g(x))$$

$\boxed{D \text{ é linear! Ela se comporta como matriz!}}$

Se $f = (\lambda x.\, e^{200x})$

$$Df = (\lambda x.\, 200e^{200x})$$
$$= 200\,(\lambda x.\, e^{200x})$$
$$= 200\, f$$

Esse $f = (\lambda x.\, e^{200x})$ é um autovetor da operação D associado ao autovalor 200...

$$Df = 200f$$
$$T\vec{v} = 200\vec{v}$$

Se $f = (\lambda x.\, e^{\alpha x})$ para $\alpha \in \mathbb{R}$.

Lembre que

(☆) $f''(x)+7f'(x)+10f(x)=0$.

Dá pra reescrever isto...

$$(☆')\quad D(Df) + 7Df + \underbrace{10f}_{\text{mult. por escalar}} = 0$$

$$M(M\vec{v}) + 7M\vec{v} + 10\vec{v} = \vec{0} \quad (☆☆)$$
$$= (MM)\vec{v} + (7M)\vec{v} + (10I)\vec{v}$$
$$= (MM + 7M + 10I)\vec{v}$$

Resolver (☆☆) é a mesma coisa que resolver

$$(M^2 + 7M + 10)\vec{v} = \vec{0} \quad (☆☆')$$

Se $f = (\lambda x.\, e^{\alpha x})$

Então $Df = \alpha f$...

Vamos reescrever (☆') como:

$$(D^2 + 7D + 10)\, f = \vec{0} \quad (☆'')$$

③ Exercício:

Seja $f = (\lambda x.\, e^{\alpha x})$.

Então: $(D^2+7D+10)\, f = \beta f$.

Calcule β.

$$(D^2+7D+10)f = D^2f + 7Df + 10f$$
$$= \alpha^2 f + 7\cdot\alpha f + 10f$$
$$= (\alpha^2 + 7\alpha + 10)\, f$$

④ Exercício:

Use o que obteve no ③ pra calcular $(D^2+7D+10)f$ para os seguintes valores de α:

ⓐ $\alpha=2$

ⓑ $\alpha=-2$

ⓒ $\alpha=5$

ⓓ $\alpha=-5$

⑤ Sejam $g = (\lambda x.\, e^{-2x})$ e $h = (\lambda x.\, e^{-5x})$.

Nós vimos no exercício 4 que $(D^2+7D+10)g = 0$ e $(D^2+7D+10)h = 0$.

Mostre - usando truques de Álgebra Linear - que

$$(D^2+7D+10)(42g+99h) = 0.$$

C2 11/nov/2019

TURMA PEQUENA

Hoje: o método "Álgebra Linear" para resolver EDOs como esta aqui:

$$f''(x) + 7f'(x) + 10f(x) = 0 \quad (*)$$

("EDOs lineares de 2ª ordem com coeficientes constantes").

A aula de hoje é meio opcional - ela vai mostrar porque é que um método que vários livros apresentam sem grandes justificativas funciona, e a gente vai ver como pessoas mais ou menos normais que saibam muita Álgebra Linear poderiam descobrir esse método sozinhas.

A gente sabe tentar resolver (*) por chutar-e-testar...

1. Descubra quais das funções abaixo são soluções da EDO (*) e quais não são.
   - a) $f(x) = x$
   - b) $f(x) = e^{2x}$
   - c) $f(x) = e^{-2x}$
   - d) $f(x) = e^{5x}$
   - e) $f(x) = e^{-5x}$

Em Álgebra Linear vocês costumam ver - sem muito detalhe - que o espaço das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial...

Vamos rever isso, e vamos ver como tratar funções como "vetores" (de dimensão infinita) e a derivada como uma "matriz" (na verdade uma transformação linear).

Vetores podem ser vistos como funções com uma sintaxe especial...

$\vec{v} = (10, 20, 30)$

$\vec{v}_1 = 10$ $\quad \vec{v}_{42} = \text{erro}$

$\vec{v}_2 = 20$

$\vec{v}_3 = 30$

Mudando a sintaxe um pouco...

$\vec{v}(1) = \vec{v}_1 = 10$

$\vec{v}(2) = \vec{v}_2 = 20$

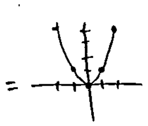
$\vec{v}(3) = \vec{v}_3 = 30$

$\vec{v}(i) = \vec{v}_i$

$$\vec{v} : \{1,2,3\} \to \mathbb{R}, \quad i \mapsto \vec{v}_i$$

Em Cálculo 1 e em Matemática Discreta a gente às vezes considera que funções são seus gráficos...

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$$

$f =$ 

$= \{(0,0), (1,1), (2,4), (-1,1), (-2,4), \ldots\}$

$\vec{v} = \{(1,10), (2,20), (3,30)\}$

Lembre como a gente define soma de vetores e produto de vetor por escalar em Álgebra Linear...

$\vec{w} = (100, 200, 300)$

$\vec{v} + \vec{w} = (110, 220, 330)$

$(\vec{v} + \vec{w})_i = \vec{v}_i + \vec{w}_i$

$2\vec{v} = (20, 40, 60)$

$(k\vec{v})_i = k\vec{v}_i$

Pra ver funções como vetores vamos flexibilizar a ideia de quais são os índices válidos...

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$$

$f(0) = 0$	$f_0 = 0$
$f(1) = 1$	$f_1 = 1$
$f(2) = 4$	$f_2 = 4$
$f(-1) = 1$	$f_{-1} = 1$
$f(-2) = 4$	$f_{-2} = 4$
$f(0.1) = 0.01$	$f_{0.1} = 0.01$

Se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto 10x$

$(f+g)_i = f_i + g_i = f(i) + g(i)$

$(kf)_i = k(f_i)$

Vou introduzir temporariamente uma notação - "notação lambda" - que vai nos ajudar a distinguir, por exemplo, o número 4 da função constante $= 4$.

$4 \neq (\lambda a. 4)$

Em C:

```c
int f(int a) {
  return a*a;
}
```

Isto define uma função com nome, "f".

Em linguagens funcionais dá pra definir funções sem nome ("anônimas").

Em Lua:

```lua
function f(a) return a*a end
f = function(a) return a*a end
```

Em λ-cálculo:

$f = (\lambda a. a \cdot a)$

$f(10) = (\lambda a. a \cdot a)(10)$

$= (a \cdot a)[a := 10]$

$= 10 \cdot 10$

$= 100$

2. Exercício: calcule:
   - a) $(\lambda a. 3)(4)$
   - b) $(\lambda a. 10 \cdot a)(2+3)$

Def: (que vai ser melhorada em breve):

$\mathcal{D}f = f'$

3. Exercício: Calcule:

$\mathcal{D}(\lambda x. \operatorname{sen} x) = (\lambda x. \cos x)$

$\mathcal{D}(\lambda x. x^4) = ?$

$\mathcal{D}(\lambda x. e^x) = ?$

$\mathcal{D}(\lambda x. e^{42x}) = ?$

A definição melhor é:

$\mathcal{D}f = (\lambda x. \frac{d}{dx} f(x))$

Repare que $(\lambda x. x^2)$ e $(\lambda y. y^2)$ são funções com o mesmo gráfico - e devem ser iguais: $(\lambda x. x^2) = (\lambda y. y^2)$

C2 1/nov/2019

TURMA PEQUENA

Hoje: o método "Álgebra Linear" para resolver EDOs como esta aqui:

$f''(x) + 7f'(x) + 10f(x) = 0$ (*)

("EDOs lineares de 2ª ordem com coeficientes constantes")

Dá pra ver que o "D" recebe uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ (um "vetor") e retorna outra função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ (um "vetor" do mesmo tamanho que o anterior!)... Então dá pra gente tratar esse "D" como uma matriz quadrada (de dimensão infinita!...)

Dá pra ver que:

$D(f+g) = Df + Dg$

$D(kf) = k(Df)$

Ou seja, esse D é uma transformação linear!...

Além disso:

$D(\lambda x. e^{42x}) =$

$(\lambda x. 42e^{42x}) =$

$42(\lambda x. e^{42x})$ ...

Se $f = (\lambda x. e^{42x})$ então $Df = 42f$, ou seja, esse f é um autovetor de D associado ao autovalor 42... E se $\alpha \in \mathbb{R}$, $(\lambda x. e^{\alpha x})$ é um autovetor de D associado ao autovalor α.

Nossa EDO é:

$f''(x) + 7f'(x) + 10f(x) = 0$ (*).

(fica implícito que isso vale para todo $x \in \mathbb{R}$).

Na notação de vetores podemos reescrever (*) como:

$f'' + 7f' + 10f = \vec{0} = (\lambda x. 0)$

$D(Df) + 7(Df) + 10f = \vec{0}$ (*')

$(DD)f + (7D)f + (10I)f = \vec{0}$ (*'')

$\underbrace{(DD + 7D + 10I)}_{M} f = \vec{0}$ (*''')

As soluções de $Mf = \vec{0}$ vão formar um subespaço!!!

④ Calcule (usando Álgebra Linear!):

ⓐ $M(\lambda x. e^{2x})$

ⓑ $M(\lambda x. e^{-2x})$

ⓒ $M(\lambda x. e^{\alpha x})$

Obs: $M(\lambda x. e^{\alpha x}) = \beta(\lambda x. e^{\alpha x})$ para algum $\beta \in \mathbb{R}$... Que β é esse?

Dicas:

Ⓘ Seja $f = (\lambda x. e^{\alpha x})$

(Obs: aprendam o truque do "seja"!!! Quando vocês aprenderem a definir objetos com "seja" vocês mesmos muita coisa em matemática vai ficar bem mais simples!)

Então $Df = \alpha f$.

Ⓘⓘ $Mf = (DD + 7D + 10I)f$

$= DDf + 7Df + 10f$

$=$

⑤ Para que valores de α temos $M(\lambda x. e^{\alpha x}) = \vec{0}$?

Sejam $g = (\lambda x. e^{-2x})$ e $h = (\lambda x. e^{-5x})$.

Então $Mg = 0$, $Mh = 0$, e...

$M(42g + 99h) = M(42g) + M(99h)$

$= 42(Mg) + 99(Mh)$

$= 42 \cdot \vec{0} + 99 \cdot \vec{0}$

$= \vec{0} + \vec{0}$

$= \vec{0}$

Ou seja: nos primeiro descobrimos duas soluções "básicas" de $Mf = 0$, e depois descobrimos que combinações lineares dessas soluções também são soluções...

O "básicas" quer dizer:

1) são fáceis de encontrar,

2) são a base do espaço vetorial de soluções.

Um modo de escrever soluções de EDOs lineares de 2ª ordem com coeficientes constantes usando esse método:

$f'' + 7f' + 10f = 0$

$\parallel$

$(D^2 + 7D + 10)f$

$\parallel$

$(D+2)(D+5)f$

$\parallel$

$(D+5)(D+2)f$

A solução "básica" de $(D+5)f = 0$ é $f = (\lambda x. e^{-5x})$

e a solução "básica" de $(D+2)f = 0$ é $f = (\lambda x. e^{-2x})$

C2 1º/nov/2019

TURMA PEQUENA

Hoje: o método "Álgebra Linear" para resolver EDOs como esta aqui:

$$f''(x) + 7f'(x) + 10f(x) = 0 \quad (\star)$$

("EDOs lineares de 2ª ordem com coeficientes constantes").

Aviso!!! Nos últimos 15 minutos da aula da sexta que vem, 8/nov, nós vamos fazer um mini-teste baseado na lista de exercícios sobre áreas de polígonos - página 4 do "material para exercícios"...

OBS: o título da folha é "Exercício sobre funções definidas por casos".

Um problema da P2 do semestre passado...

Seja $(\star)$ esta EDO:

$$f''(x) + 8f'(x) - 20f(x) = 0 \quad (\star).$$

(a) Encontre as soluções básicas de $(\star)$. Chame-as de f_1 e f_2.

(b) Verifique que f_1 obedece $(\star)$ e que f_2 obedece $(\star)$.

#2

C2 6/nov/2019

TURMA PEQUENA

Hoje:
- Mais sobre EDOs da forma $f''+\alpha f'+\beta f=0$:
  - Problemas de valor inicial
  - Casos com raízes complexas
- Dúvidas sobre a lista de exercícios do mini-teste da sexta

Na aula passada nós vimos um modo de resolver EDOs como esta aqui:

$$f''+7f'+10f=0$$
$$(D^2+7D+10)f$$
$$(D+5)(D+2)f$$

As soluções básicas são:

$$(D+2)f=0 \Rightarrow f(x)=e^{-2x}$$
$$(D+5)f=0 \Rightarrow f(x)=e^{-5x}$$

Essas soluções básicas formam a base (no sentido de Álgebra Linear!) do espaço de soluções de $f''+7f'+10f=0$...

As soluções da EDO acima são todas desta forma: $\alpha e^{-2x}+\beta e^{-5x}$ para $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$; ou melhor, sejam $f_1=e^{-2x}$, $f_2=e^{-5x}$; as soluções são todas combinações lineares $\alpha f_1+\beta f_2$.

Seja $g=\alpha f_1+\beta f_2$.

Então
$$g(x)=\alpha e^{-2x}+\beta e^{-5x}$$
$$g'(x)=-2\alpha e^{-2x}-5\beta e^{-5x}$$
$$g(0)=\alpha e^{-2\cdot 0}+\beta e^{-5\cdot 0}=\alpha+\beta$$
$$g'(0)=-2\alpha\cdot 1-5\beta\cdot 1=-2\alpha-5\beta$$

Exercício: Quais são os valores de α e β que fazem com que $g(0)=3$ e $g'(0)=4$?

Temos que resolver este sistema:

$$\alpha+\beta=3$$
$$-2\alpha-5\beta=4$$
$$\beta=3-\alpha$$
$$-2\alpha-5(3-\alpha)=4$$
$$-2\alpha-15+5\alpha=4$$
$$3\alpha=4+15=19$$
$$\alpha=\frac{19}{3}$$
$$\beta=3-\alpha=\frac{9}{3}-\frac{19}{3}=-\frac{10}{3}$$
$$\Rightarrow \alpha=\frac{19}{3},\quad \beta=-\frac{10}{3}$$
$$g(x)=\frac{19}{3}e^{-2x}-\frac{10}{3}e^{-5x}$$
$$g'(x)=-\frac{38}{3}e^{-2x}+\frac{50}{3}e^{-5x}$$
$$g(0)=\frac{19}{3}-\frac{10}{3}=\frac{9}{3}=3$$
$$g'(0)=-\frac{38}{3}+\frac{50}{3}=\frac{12}{3}=4$$

Dica: Quase todas as P2, VRs e VSs dos semestres passados têm problemas deste tipo... Tentem fazê-los!

Acabamos de ver que

$$f''+7f'+10f=0$$
$$(D^2+7D+10)f$$
$$(D+5)(D+2)f$$

A fatoração de $(D^2+7D+10)$ deu $(D+5)(D+2)$, que tem raízes reais... $D=-5$, $D=-2$

O que a gente faz quando as raízes são complexas? Caso bem simples:

$$(D+i)(D-i)f$$
$$(D^2+1)f$$
$$f''+f=0$$

A gente conhece duas soluções disto!

Se $f(x)=\operatorname{sen} x$, $f''(x)=-\operatorname{sen} x$, $f''+f=0$!

Se $f(x)=\cos x$, $f''(x)=-\cos x$, $f''+f=0$!

Se $f(x)=42\cos x+99\operatorname{sen} x$, $f''(x)=-42\cos x-99\operatorname{sen} x$, $f''+f=0$!

Lembre que a gente viu que senos e cossenos são combinações lineares de exponenciais complexas...

$$E=c+is$$
$$c=\frac{E+E^{-1}}{2}$$
$$s=\frac{E-E^{-1}}{2i}$$
$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$
$$\operatorname{sen} x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

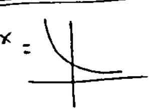
Uma coisa importante que a gente não viu...

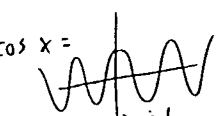
$$e^{2+3i}=\underbrace{e^2}_{\text{número real}}\cdot e^{3i}=e^2\cdot(\cos 3+i\operatorname{sen} 3)$$

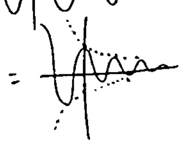
Generalizando: se $a,b\in\mathbb{R}$,
$$e^{a+ib}=e^a e^{ib}=e^a(\cos b+i\operatorname{sen} b)$$

Exercício: Calcule e^{2+3i} usando a calculadora do celular (ou outra).

Exercício: Faça o gráfico de $f(x)=e^{-x}\cos x$ sem calculadora.

$e^{-x}=$


$\cos x=$


$e^{-x}\cos x=$


#2

C2 6/nov/2019

TURMA PEQUENA

Hoje:

- Mais sobre EDOs da forma $f''+\alpha f'+\beta f=0$:
  - Problemas de valor inicial
  - Casos com raízes complexas
- Dúvidas sobre a lista de exercícios do mini-teste da sexta

Algumas EDOs que vêm de problemas físicos vão ter soluções como

e^{-t} ⇒ Decaimento radiativo
quantidade de um remédio no organismo depois que você toma ele

$\cos t$ ⇒ mola

$e^{-x}\cos x$ ⇒ mola com atrito / oscilações amortecidas

Problema:

1. Qual é a EDO que tem estas soluções básicas?

$f_1 = e^{(-2+3i)x}$

$f_2 = e^{(-2-3i)x}$

Obs: as soluções básicas reais dela vão ser coisas como f_1+f_2 e f_1-f_2...

Lembre que esta EDO $(D-\alpha)(D-\beta)f=0$ tem soluções básicas $e^{\alpha x}$ e $e^{\beta x}$...

2. Expresse f_1 e f_2 usando só exponenciais reais, senos e cossenos.
3. Idem para $\frac{f_1+f_2}{2}$ e $\frac{f_1-f_2}{2i}$.

Um problema da P2 do semestre passado:

Seja (✯) esta EDO:

(✯) $f''+8f'+25f=0$

a) Expresse (✯) na forma $(D-\alpha)(D-\beta)f=0$

b) Expresse (✯) na forma $(D-(a+ib))(D-(a-ib))f=0$.

c) Descubra as soluções básicas de (✯).

d) Descubra as soluções básicas reais de (✯).

$\Rightarrow f_1+f_2 =$
$= e^{-4x}(\cos(3x)+i\,\mathrm{sen}\,3x)$
$+ e^{-4x}(\cos(3x)-i\,\mathrm{sen}\,3x)$
$e^{-4x}(2\cos(3x))$

$-4\pm 3i$: $-4+3i$, $-4-3i$

B.

SP

α, β são raízes

b) $(D-(-4+3i))(D-(-4-3i))f=0$

c) $e^{(-4+3i)x}$ $e^{(-4-3i)x}$
f_1 f_2

d) $e^{-4x+3ix}$

$e^{-4x}e^{3ix}$

$f_1 = e^{-4x}(\cos 3x + i\,\mathrm{sen}\,3x)$

$f_2 = e^{-4x}(\cos(-3x)+i\,\mathrm{sen}(-3x)) \Rightarrow$

$= e^{-4x}(\cos(3x)-i\,\mathrm{sen}(3x))$

#2

C2 6/Nov/2019

TURMA PEQUENA

Hoje:
- Mais sobre EDOs da forma $f''+\alpha f'+\beta f=0$:
  - Problemas de valor inicial
  - Casos com raízes complexas
- Dúvidas sobre a lista de exercícios do mini-teste da sexta

Algumas EDOs que vêm de problemas físicos vão ter soluções como

e^{-x} ⇒ Decaimento radioativo / quantidade de um remédio no organismo depois que você toma ele

$\cos x$ ⇒ mola

$e^{-x}\cos x$ ⇒ mola com atrito / oscilações amortecidas

Problema:

① Qual é a EDO que tem estas soluções básicas?

$f_1 = e^{(-2+3i)x}$

$f_2 = e^{(-2-3i)x}$

Obs: as soluções básicas reais dela vão ser coisas como f_1+f_2 e f_1-f_2 ...

Lembre que esta EDO $(D-\alpha)(D-\beta)f=0$ tem soluções básicas $e^{\alpha x}$ e $e^{\beta x}$ ...

② Expresse f_1 e f_2 usando só exponenciais reais, senos e cossenos.

③ Idem para $\frac{f_1+f_2}{2}$ e $\frac{f_1-f_2}{2i}$.

Um problema da P2 do semestre passado:

Seja (☆) esta EDO:

(☆) $f''+8f'+25f=0$

ⓐ Expresse (☆) na forma $(D-\alpha)(D-\beta)f=0$

ⓑ Expresse (☆) na forma $(D-(a+ib))(D-(a-ib))f=0$.

ⓒ Descubra as soluções básicas de (☆).

ⓓ Descubra as soluções básicas reais de (☆).

$$\Rightarrow f_1+f_2 = e^{-4x}(\cos(3x)+i\,\text{sen}\,3x) + e^{-4x}(\cos(3x)-i\,\text{sen}\,3x) = e^{-4x}(2\cos(3x))$$

$-4\pm 3i$: $-4+3i$, $-4-3i$

a) SP — α, β são raízes

b) $(D-(-4+3i))(D-(-4-3i))f=0$

c) $e^{(-4+3i)x}$ = f_1, $e^{(-4-3i)x}$ = f_2

d) $e^{-4x+3ix}$

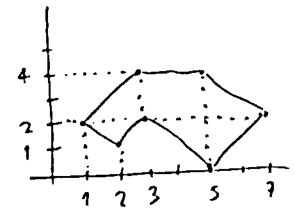
$e^{-4x}e^{3ix}$

$f_1 = e^{-4x}(\cos 3x + i\,\text{sen}\,3x)$

$f_2 = e^{-4x}(\cos(-3x)+i\,\text{sen}(-3x)) \Rightarrow$

$= e^{-4x}(\cos(3x)-i\,\text{sen}(3x))$

Seja P esse polígono aqui:



Sejam $f(x)$ = (curva de cima do polígono),
$g(x)$ = (curva de baixo de P),
$H(t)$ = área do polígono P entre $x=0$ e $x=t$.

Façam o que der! Temos pouco tempo! Corram!

C2 7/nov/2019

Turma grande

Na aula passada nós vimos como resolver EDOs como esta aqui

$$f''+7f'+10f=0 \qquad (☆)$$

Usando truques de álgebra linear.
O método é:

$$f''+7f'+10f=0$$
$$= (D^2+7D+10)f$$
$$= (D+2)(D+5)f$$

E as soluções "básicas" disto são estas aqui:

$(D+2)f=0 \Rightarrow f_1=e^{-2x}$

$(D+5)f=0 \Rightarrow f_1=e^{-5x}$

...e vimos que o conjunto destas soluções básicas, $\{f_1,f_2\}$ é a base do espaço vetorial das soluções de ☆:

$$\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid f''+7f'+10f=0\}$$

(Obs: faltam uns detalhes aí - por exemplo, só estamos interessados nas funções $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ suaves...)

Hoje:

- $\boxed{\text{O que acontece quando as raízes são complexas?}}$
- Problemas de valor inicial
- Marcar P2, VR, VS
- Discussão da lista que vai virar o mini-teste.

Exemplo:

$$f''+f=0 \qquad (☆☆)$$
$$= (D^2+1)f$$
$$= (D+i)(D-i)f$$

① Exercício: quais destas funções são soluções de (☆☆)?

ⓐ e^x
ⓑ $\operatorname{sen} x$
ⓒ $\cos x$
ⓓ e^{ix}
ⓔ e^{-ix}

Uma coisa que faltou:

$$e^{\alpha+\beta}=e^\alpha e^\beta$$

Isto vale pra $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$...

$$e^{3+4i}=e^3e^{4i}$$
$$=e^3(\cos 4+i\operatorname{sen}4)$$

Dá pra calcular isso em qualquer calculadora que tenha exp, cos, sen, mesmo que ela não suporte complexos!

$$\underbrace{e^3}_{20}\left(\underbrace{\cos 4}_{-0.6}+i\underbrace{\operatorname{sen}4}_{-0.7}\right)$$

$$=\underbrace{\underbrace{e^3}_{20}\underbrace{\cos 4}_{-0.6}}_{-12}+i\underbrace{\underbrace{e^3}_{20}\underbrace{\operatorname{sen}4}_{-0.7}}_{-14}$$

Exercícios:

② $(2+3i)(4-5i)=?$

③ Quais são as raízes disto?
$x^2+8x+25=0$

④ Calculem:
$(a+ib)^2+8(a+ib)+25$

⑤ Teste as suas respostas pra ③.

$$\underset{a}{1}x^2+\underset{b}{8}x+\underset{c}{25}=0$$

$$\Delta=b^2-4ac$$
$$=8^2-4\cdot1\cdot25$$
$$=64-100$$
$$=-36$$

Raízes:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$=\frac{-8\pm\sqrt{-36}}{2\cdot1}$$
$$=\frac{-8\pm6i}{2}$$
$$=-4\pm3i$$

Raízes:
$x_1=-4+3i$
$x_2=-4-3i$

Testando:
$x_1^2+8x_1+25\overset{?}{=}0$

$$(a+ib)^2=(a+ib)(a+ib)$$
$$=a^2+(ib)^2+2aib$$
$$=a^2-b^2+2abi$$

$$(-4+3i)^2=(-4)^2-3^2+2(-4)\cdot3i$$
$$=16-9-24i$$
$$=7-24i$$

$$(a+ib)^2+8(a+ib)+25=$$
$$(a^2-b^2+2abi)+8a+8bi+25=$$
$$(a^2-b^2+8a+25)+(2ab+8b)i$$

Substituindo $a:=-4$ e $b:=3$ acima, obtemos:

$$(16-9-32+25)+(-24+24)i=0+0i=0$$

$$\sqrt{-36}=\sqrt{-1}\sqrt{36}$$
$$=i6$$

$\boxed{\text{C2 7/NOV/2019}}$

$\boxed{\text{TURMA GRANDE}}$

NA AULA PASSADA NÓS VIMOS COMO RESOLVER EDOS COMO ESTA AQUI

$$f'' + 7f' + 10f = 0 \qquad (\star)$$

USANDO TRUQUES DE ÁLGEBRA LINEAR.

O MÉTODO É:

$$f'' + 7f' + 10f = 0$$
$$\shortparallel$$
$$(D^2 + 7D + 10)f$$
$$\shortparallel$$
$$(D+2)(D+5)f$$

E AS SOLUÇÕES "BÁSICAS" DISTO SÃO ESTAS AQUI:

$$(D+2)f = 0 \quad \Rightarrow f_1 = e^{-2x}$$
$$(D+5)f = 0 \quad \Rightarrow f_1 = e^{-5x}$$

...E VIMOS QUE O CONJUNTO DESTAS SOLUÇÕES BÁSICAS, $\{f_1, f_2\}$ É A BASE DO ESPAÇO VETORIAL DAS SOLUÇÕES DE $\star$:

$$\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f'' + 7f' + 10f = 0\}$$

(OBS: FALTAM UNS DETALHES AÍ - POR EXEMPLO, SÓ ESTAMOS INTERESSADOS NAS FUNÇÕES $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ SUAVES...)

HOJE:

- O QUE ACONTECE QUANDO AS RAÍZES SÃO COMPLEXAS?
- PROBLEMAS DE VALOR INICIAL
- MARCAR P2, VR, VS
- DISCUSSÃO DA LISTA QUE VAI VIRAR O MINI-TESTE.

EXEMPLO:

$$f'' + f = 0 \qquad (\star\star)$$
$$\shortparallel$$
$$(D^2 + 1)f$$
$$\shortparallel$$
$$(D+i)(D-i)f$$

(1) EXERCÍCIO: QUAIS DESTAS FUNÇÕES SÃO SOLUÇÕES DE $(\star\star)$?

(a) e^x
(b) $\operatorname{sen} x$
(c) $\cos x$
(d) e^{ix}
(e) e^{-ix}

UMA COISA QUE FALTOU:

$$e^{\alpha+\beta} = e^\alpha e^\beta$$

ISTO VALE PRA $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$...

$$e^{3+4i} = e^3 e^{4i}$$
$$= e^3(\cos 4 + i \operatorname{sen} 4)$$

DÁ PRA CALCULAR ISSO EM QUALQUER CALCULADORA QUE TENHA exp, cos, sen, MESMO QUE ELA NÃO SUPORTE COMPLEXOS!

$$\underbrace{e^3}_{20}(\underbrace{\cos 4}_{-0.6} + i \underbrace{\operatorname{sen} 4}_{-0.7})$$
$$= \underbrace{\underbrace{e^3}_{20} \underbrace{\cos 4}_{-0.6}}_{-12} + i \underbrace{\underbrace{e^3}_{20} \underbrace{\operatorname{sen} 4}_{-0.7}}_{-14}$$

EXERCÍCIOS:

(2) $(2+3i)(4-5i) = ?$

(3) QUAIS SÃO AS RAÍZES DISTO?
$$x^2 + 8x + 25 = 0$$

(4) CALCULEM:
$$(a+ib)^2 + 8(a+ib) + 25$$

(5) TESTE AS SUAS RESPOSTAS PRA (3).

NO EXERCÍCIO (1) VIMOS QUE TODAS ESTAS FUNÇÕES SÃO SOLUÇÕES DA $(\star\star)$...

$$\left.\begin{array}{l} f_1 = \operatorname{sen} x \\ f_2 = \cos x \end{array}\right\} \text{SOLUÇÕES REAIS}$$
$$\left.\begin{array}{l} f_3 = e^{ix} \\ f_4 = e^{-ix} \end{array}\right\} \text{SOLUÇÕES COMPLEXAS}$$

... COMBINAÇÕES LINEARES DELAS TAMBÉM SÃO SOLUÇÕES DA $(\star\star)$!

EXEMPLOS:

$$f_2 + i f_1 = \cos x + i \operatorname{sen} x = e^{ix} = f_3$$
$$f_2 - i f_1 = \cos x - i \operatorname{sen} x = e^{-ix} = f_4$$
$$\frac{f_3}{2} + \frac{f_4}{2} = \frac{f_3 + f_4}{2} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x = f_2$$
$$\frac{f_3 - f_4}{2i} = \operatorname{sen} x = f_1$$

$$e^{(3+4i)x} = e^{3x+4ix}$$
$$= e^{3x} \cdot e^{4ix}$$
$$= e^{3x}(\cos 4x + i \operatorname{sen} 4x)$$

COMO É A QUE A GENTE ENCONTRA UMA EDO DA FORMA

$$f'' + \alpha f' + \beta f = 0$$

QUE TENHA SOLUÇÕES

$$e^{3x} \cos 4x,$$
$$e^{3x} \operatorname{sen} 4x \; ?$$

(6) EXERCÍCIO:

SEJAM

$$f_1 = e^{(3+4i)x},$$
$$f_2 = e^{(3-4i)x},$$
$$f_3 = e^{3x} \cos 4x$$
$$f_4 = e^{3x} \operatorname{sen} 4x.$$

EXPRESSE f_3 COMO COMBINAÇÃO LINEAR DE f_1 E f_2.

(7) VERIFIQUE QUE

$$(D - (3+4i))(D - (3-4i))f = 0 \quad (\star\star\star)$$

TEM SOLUÇÕES

$$f_1 = e^{(3+4i)x},$$
$$f_2 = e^{(3-4i)x}.$$

(8) REESCREVA A EDO $(\star\star\star)$ NA FORMA

$$f'' + \alpha f' + \beta f = 0.$$

TODAS AS P2, VRs E VSs DOS ÚLTIMOS SEMESTRES TEM ALGUM PROBLEMA DA FORMA $f'' + \alpha f' + \beta f = 0$ COM RAÍZES COMPLEXAS...

EXEMPLO:

CONSIDERE ESTA EDO:

$$f'' - 6f' + 25f = 0 \qquad (\star\star\star\star)$$

(9) ENCONTRE AS SOLUÇÕES BÁSICAS DE $(\star\star\star\star)$.

(10) ENCONTRE AS SOLUÇÕES BÁSICAS REAIS DE $(\star\star\star\star)$.

C2 8/nov/2019

TURMA GRANDE

Estamos adiantados na matéria! A gente teve uma aula que a outra turma ainda não teve - a de 17/out, sobre EDOs com variáveis separáveis -

Então:

Hoje:

Problemas de valor inicial, revisão, exercícios!

Digamos que queremos uma solução para

$f''+7f'+10f=0$ (☆)

que obedeça isto:

$f(0)=3$,

$f'(0)=4$.

Sabemos que as soluções de (☆) são todas da forma:

$f(x)=\alpha f_1(x)+\beta f_2(x)$

$=\alpha e^{-2x}+\beta e^{-5x}$

Então:

$f(0)=\alpha+\beta$

$f'(0)=-2\alpha-5\beta$

E queremos

$\alpha+\beta=3$

$-2\alpha-5\beta=4$. $\Rightarrow$

$\alpha=3-\beta$

$-2(3-\beta)-5\beta=4$

$-6+2\beta-5\beta=4$

$-3\beta=10$

$\beta=-\frac{10}{3}$

$\alpha=3+\frac{10}{3}$

$\alpha=\frac{19}{3}$

$\alpha+\beta \overset{?}{=} 3$ ‼ ☺

$\frac{19}{3}-\frac{10}{3} = \frac{9}{3}$

$-2\alpha-5\beta \overset{?}{=} 4$ ‼

$-2\frac{19}{3}-5\left(-\frac{10}{3}\right) = -\frac{38}{3}+\frac{50}{3} = \frac{12}{3}$

Como fatorar alguns polinômios bem rápido

$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

Exercícios:

Fatorem por chutar-e-testar:

(a) $x^2+7x+12$

(b) $x^2+2x-24$

(c) $x^2-2x-24$

(d) $x^2-7x+10$

... E no caso com raízes complexas?

Se $ax^2+bx+c=0$ é uma equação de 2º grau em que a,b,c são reais então as raízes disso vão ser dois números complexos conjugados...!

P.ex.: $3+4i$, $3-4i$

Digamos que $x^2+bx+c=0$

$\quad\quad\quad = (x+\alpha)(x+\beta)$

Aliás:

Digamos que α e β são complexos conjugados:

$\alpha=a+ib$

$\beta=a-ib$.

Então

$(x+\alpha)(x+\beta)=$

$(x+(a+ib))(x+(a-ib))=$

$=x^2+((a+ib)+(a-ib))x+(a+ib)(a-ib)$

$=x^2+2ax+(a^2+b^2)$

Exercício:

Fatorem por chutar-e-testar:

(a) $x^2-8x+25$

(b) $x^2-6x+25$

(c) $x^2+6x+25$

(d) $x^2+8x+25$

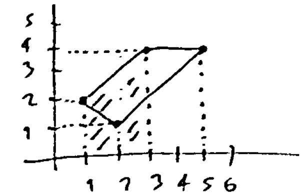
$x^2\underbrace{-8x}_{\substack{2a=-8\\ a=-4}}+\underbrace{25}_{\substack{a^2+b^2=25\\ 16+b^2=25\\ b^2=9\\ b=\pm 3}}$

$\Rightarrow a=-4,\ b=\pm 3$,

$x^2-8x+25=$

$(x+(-4+3i))(x+(-4-3i))$

Seja P este polígono:



$x+1-(-x+3)$

Seja $f(x)$ a função que dá a borda superior de P, e $g(x)$ a função que dá a borda inferior de P.

Seja $H(t)=\int_{x=1}^{x=t} f(x)-g(x)\,dx$.

Dê uma definição por casos para $H(t)$ que seja fácil de calcular - como a da dica da lista.

C2 8/nov/2019

TURMA PEQUENA

Hoje:

EDOs:
- variáveis separáveis ← oops, vimos em 16/out... (não tenho foto do quadro)

ou

- EDOs exatas

Mini-teste nos últimos 30 minutos da aula.

Nós resolvíamos EDOs com variáveis separáveis assim:

$$g(y)\,dy = f(x)\,dx$$

$$\underbrace{\int g(y)\,dy}_{G(y)+C_1} = \underbrace{\int f(x)\,dx}_{F(x)+C_2}$$

$$F(x)+C_2 = G(y)+C_1$$

$$\underbrace{F(x)-G(y)}_{H(x,y)} = \underbrace{C_1-C_2}_{C_3}$$

As soluções eram as curvas com $H(x,y)=$ constante...

...mas, em variáveis separáveis essa $H(x,y)$ era sempre da forma

$$H(x,y)=F(x)-G(y),$$

e existem muitas funções de x e y que não podem ser separadas numa soma de uma função só de x com uma função só de y...

Exemplo: $H(x,y)=xy$ não pode ser expressa como $F(x)-G(y)$

EDOs exatas nos permitem generalizar a idéia de variáveis separáveis - curvas de nível - para funções $F(x,y)$ gerais.

Vamos começar pelo meio - digamos que já sabemos a $F(x,y)$... qual é a EDO?

Mini-introdução a algumas coisas de Cálculo 3

$F(x,y)$ é $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

Dá pra derivar essa função F em x e em y separadamente...

Notação:

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y) = F_x(x,y) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x,y)-F(x,y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = F_y(x,y) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{F(x,y+\Delta y)-F(x,y)}{\Delta y}$$

Truque: pra calcular $F_x(x,y)$ a gente deriva em x fingindo que y é constante.

Exemplo:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^3y^4) = 3x^2y^4$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^3y^4) = x^3\cdot 4y^3$$

Exercício: Calcule:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^3+x^2y^4+y^5) = ?$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^3+x^2y^4+y^5) = ?$$

⇐ Isto são "derivadas parciais".

Regra da cadeia em duas dimensões

Digamos que: $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Então

$$\frac{d}{dt}F(g(t),h(t)) = F_x(g(t),h(t))\,g'(t) + F_y(g(t),h(t))\,h'(t)$$

Exercício: Digamos que $F(x,y)=x^2y^3$, $g(t)=\cos t$, $h(t)=\operatorname{sen} t$. Calcule

a) $\frac{d}{dt}F(g(t),h(t))$,

b) $\frac{d}{dt}F(g(\pi),h(\pi))$,

c) $\frac{d}{dt}\left((\cos t)^2(\operatorname{sen} t)^3\right)$ ← deve dar o mesmo que a (a)

$$\frac{d}{dt}F(g(t),h(t)) = F_x(g(t),h(t))\,g'(t) + F_y(g(t),h(t))\,h'(t) = \text{(façam em casa!!!)}$$

$F(x,y)=x^2y^3$
$g(t)=\cos t$
$h(t)=\operatorname{sen} t$
$F_x(x,y)=2xy^3$
$F_y(x,y)=3x^2y^2$
$g'(t)=-\operatorname{sen} t$
$h'(t)=\cos t$

Como a gente encontra - ou melhor, caracteriza - as curvas que percorrem curvas de nível de $F(x,y)$?

Idéia: $(g(t),h(t))$ é uma trajetória.

Queremos $F(g(t),h(t))=$ constante

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}F(g(t),h(t))=0$$

|| abreviando!

$$F_x\,g'(t)+F_y\,h'(t)=0$$

E se $g(t)=t$, então $g'(t)=1$,

$$F_x+F_y\,h'(t)=0$$

C2 8/NOV/2019

TURMA PEQUENA

HOJE:

EDOS:

- VARIÁVEIS SEPARÁVEIS

OU

- EDOS EXATAS

OOPS, VIMOS EM 16/OUT... (NÃO TENHO FOTO DO QUADRO)

MINI-TESTE NOS ULTIMOS 30 MINUTOS DA AULA.

RECAPITULANDO:

$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

ESTAMOS PROCURANDO CURVAS DE NIVEL DELA:

$F(x,y) = \text{CONSTANTE},$

$F(g(t), h(t)) = \text{CONSTANTE}$

OU SEJA, ESTAMOS PROCURANDO FUNÇÕES g E h QUE FAÇAM

$F(g(t), h(t)) = \text{CONSTANTE} \ldots$

ALIÁS, VAMOS PROCURAR ALGO MAIS SIMPLES: SÓ UMA FUNÇÃO $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ QUE FAÇA

$F(t, h(t)) = \text{CONSTANTE} \ldots$

REESCREVENDO:

$F(x, h(x)) = \text{CONSTANTE}$

$F(x, h(x)) = \text{CONST}$

$\frac{d}{dx} F(x, h(x)) = 0$

OPS  :

$\frac{d}{dx} F(x, h(x)) \neq \frac{\partial}{\partial x} F(x, h(x))!$

$\Uparrow$

"DERIVADA TOTAL" !!

$\frac{d}{dx} F(x, h(x)) = 0$

$\quad \shortparallel$

$F_x + F_y h'(x)$

AGORA VAMOS IMAGINAR QUE $y = h(x) \ldots$

AÍ $h'(x) = \frac{dy}{dx}$,

E A NOSSA EDO

$F_x + F_y h'(x) = 0$

VIRA:

$F_x + F_y \frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow F_x \, dx + F_y \, dy = 0$

EDOS EXATAS COSTUMAM SER ESCRITAS NUM FORMATO COMO:

$F_x \, dx + F_y \, dy = 0$

VAMOS PEGAR UM EXEMPLO:

$F(x,y) = x^3 y^5$

EXERCÍCIO:

DIGAMOS QUE $F(x,y) = 4$.

EXPRESSE y COMO FUNÇÃO DE x.

A GENTE CONTINUA NA AULA QUE VEM!

AGORA: MINI-TESTE!

C2 13/nov/2019

TURMA PEQUENA

Hoje: EDOs exatas - continuação!

Na aula passada nós vimos algumas coisas sobre derivadas parciais e derivadas totais...

$\frac{d}{dt} F(g(t), h(t)) =$

$F_x(g(t), h(t))\, g'(t)$

$+ F_y(g(t), h(t))\, h'(t)$

...e neste exemplo o "$\frac{d}{dt}$..." é uma derivada total e os F_x e F_y são derivadas parciais.

Outra notação para derivadas parciais:

$\frac{\partial}{\partial x}F, \frac{\partial}{\partial y}F.$

Abreviando um pouco,

$\frac{d}{dt} F(g(t), h(t)) =$

$F_x g' + F_y h'$

e se $g(t) = t$ então

$g'(t) = 1$ e

$\frac{d}{dt} F(g(t), h(t)) =$

$F_x + F_y h'$.

Vocês em geral vão ver isto escrito nos livros deste jeito:

$\frac{d}{dx} F(x, h(x)) =$

$F_x + F_y h'(x)$

derivada total

derivadas parciais

E se quisermos encontrar uma função $y = h(x)$ que percorra uma curva de nível da F essa $h(x)$ vai obedecer:

$F(x, h(x)) = \text{constante}$

$\frac{d}{dx} F(x, h(x)) = 0$

$F_x + F_y h'$

$F_x + F_y \frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow F_x + F_y \frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow \boxed{F_x dx + F_y dy = 0}$

EDOs exatas costumam ser escritas deste jeito, ou como

$G dx + H dy = 0$

quando ainda não conhecemos a F.

Exemplos:

(a) $F(x,y) = x^3 y^5$

As curvas de nível disto vão ser:

$F(x,y) = x^3 y^5 = C$

$x^3 y^5 = C$

$y^5 = C/x^3$

$y = \sqrt[5]{C/x^3}$

$= \sqrt[5]{C x^{-3}}$

$F_x(x,y) = 3x^2 y^5$

$F_y(x,y) = 5x^3 y^4$

$\Rightarrow (3x^2 y^5)dx + (5x^3 y^4)dy = 0$ (☆)

Vamos dizer que as soluções da EDO (☆) são as curvas de nível de $F(x,y) = x^3 y^5$.

Nem sempre é possível começar de uma EDO desta forma,

$G dx + H dy = 0$

e obter uma F com $F_x = G$ e $F_y = H$

pra resolver esta EDO...

Exemplo:

$(3xy^2)dx + (4x^2 y)dy = 0.$

Vamos ver um truque pra gente conseguir encontrar a F rápido quando:

1) A nossa EDO é da forma $G dx + H dy = 0$ com G e H sendo polinômios em x e y,

2) Quando a F existe.

O truque é uma variação da notação de caixinhas pra polinômios...

$4x^3 + 5x^2 + 6 =$

4	5	0	6

coef. do x^3

coef. do x^0

Aviso
Essas notações com caixinhas não são padrão!!!

Variação 2D:

Se $F(x,y) = 4x^3 y^5$

=

			4

=

0	0	0	4
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

Outro exemplo:

2	3	4
5	6	7
8	9	10

$= \begin{pmatrix} 2x^0y^2 + 3x^1y^2 + 4x^2y^2 \\ + 5x^0y^1 + 6x^1y^1 + 7x^2y^1 \\ + 8x^0y^0 + 9x^1y^0 + 10x^2y^0 \end{pmatrix}$

... agora a gente precisa aprender a visualizar o que as derivadas parciais "querem dizer" nessa notação 2D!

Exercício:
Calcule e represente o resultado na notação de caixinhas 2D:

(a) $\frac{\partial}{\partial x}$

		1	10
		2	3

, $\frac{\partial}{\partial y}$ disto.

C2 13/nov/2019

TURMA PEQUENA

HOJE: EDOS EXATAS - CONTINUAÇÃO!

P2: 11/dez

VR: 13/dez

VS: 18/dez

ⓑ CALCULE $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial y}$ DE

			10
2			
3	4		

ⓒ CALCULE $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial y}$ DE

			10
2			
42	4		

② OUTRO EXERCÍCIO:

ⓐ DIGAMOS QUE

$$F(x,y)=(y-2)^3(3+x^4+x^5)+x^2.$$

DIGAMOS QUE QUEREMOS UMA FUNÇÃO $y=h(x)$ QUE PERCORRE A CURVA DE NÍVEL $F(x,y)=\alpha$.

DESCUBRA COMO ESCREVER ESTA CURVA DE NÍVEL - OU: O y, OU: O $h(x)$ - COMO FUNÇÃO DE x.

ⓑ ESCREVA A $F(x,y)$ ACIMA NA NOTAÇÃO DE CAIXINHAS 2D.

ⓒ ESCREVA A EDO EXATA CUJAS SOLUÇÕES SÃO AS CURVAS DE NÍVEL DA $F(x,y)$ ACIMA NA FORMA $F_x\,dx+F_y\,dy=0$ - MAS ESCREVA ESSE F_x E F_y NA NOTAÇÃO DE CAIXINHAS.

OBS/DICA:

$$\begin{array}{|c|}\hline 3\\\hline 2\\\hline\end{array}\cdot\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 10\\\hline\end{array}=\,?$$

$$\begin{array}{|c|}\hline 4\\\hline 3\\\hline 2\\\hline\end{array}\cdot\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&10&100\\\hline\end{array}=\,?$$

$$\begin{array}{|c|}\hline 4\\\hline 3\\\hline 2\\\hline\end{array}\cdot\begin{array}{|c|c|c|}\hline \;&\;&100\\\hline\end{array}=\,?$$

ⓐ $(y-2)^3(3+x^4+x^5)=\alpha-x^2$

$$(y-2)^3=\frac{\alpha-x^2}{3+x^4+x^5}$$

$$y=2+\sqrt[3]{\frac{\alpha-x^2}{3+x^4+x^5}}$$

ⓑ $(y-2)=\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline -2\\\hline\end{array}$

$$(y-2)^3=\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline -6\\\hline 12\\\hline -8\\\hline\end{array}$$

$$(3+x^4+x^5)=\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 3&&&&1&1\\\hline\end{array}$$

$(y-2)^3(3+x^4+x^5)+x^2=$

$F(x,y)$

3				1	1
-18				-6	-6
36				12	12
-24		1		-8	-8

$F_x=$

			4	5
			-24	-30
			48	60
	2		-32	-40

$F_y=$

9				3	3
-36				-12	-12
36				12	12

PROBLEMA DE VALOR INICIAL

DIGAMOS QUE $F(x,y)=x^3y^5$

E A NOSSA EDO É:

$$F_x\,dx+F_y\,dy=0 \quad (\star\star)$$

$$\Rightarrow (3x^2y^5)\,dx+(5x^3y^4)\,dy=0$$

$$\Rightarrow (3x^2y^5)\quad+(5x^3y^4)\frac{dy}{dx}=0$$

ENCONTRE UMA SOLUÇÃO DE $(\star\star)$ QUE PASSE POR $(3,4)$...

OU SEJA, QUANDO $x=3$ TEMOS $y=4$, OU SEJA, SE $y=g(x)$ ENTÃO $4=g(3)$.

③ EXERCÍCIO:

ⓐ ENCONTRE UM MODO DE ESCREVER $F(x,y)=x^3y^5=\alpha$ EM QUE y É FUNÇÃO DE x (E DE α).

ⓑ ENCONTRE O VALOR DE α QUE FAZ COM QUE EM $x=3$ A GENTE TENHA $y=4$.

④ ENCONTRE UMA SOLUÇÃO DA EDO ABAIXO QUE PASSE PELO PONTO $(4,5)$:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline \;&\;&6\\\hline \;&\;&\;\\\hline\end{array}dx+\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \;&\;&\;&1\\\hline \;&\;&\;&\;\\\hline\end{array}dy=0$$

ⓐ DESCUBRA $F(x,y)$.

ⓑ ESCREVA y EM FUNÇÃO DE x (E α)

ⓒ DESCUBRA A SOLUÇÃO QUE PASSA PELO PONTO $(4,5)$.

⑤ ENCONTRE UMA SOLUÇÃO DA EDO ABAIXO QUE PASSA PELO PONTO $(4,5)$:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \;&\;&\;&3\\\hline \;&\;&\;&\;\\\hline\end{array}dx+\begin{array}{|c|c|c|}\hline \;&\;&4\\\hline \;&\;&\;\\\hline \;&\;&\;\\\hline\end{array}dy=0.$$

$\underset{\sim}{||}$

C2 14/NOV/2019

TURMA GRANDE

HOJE:
EDOS EXATAS!

MINI-TESTE NOS ÚLTIMOS 30 MINUTOS DA AULA!
MARCAR P2, VR, VS!

P2: 12/DEZ
VR: 13/DEZ
VS: 19/DEZ

OBS: EU COSTUMO APRESENTAR EDOs EXATAS DE UM JEITO QUE EU ACHO MAIS SIMPLES DO QUE O USUAL DOS LIVROS - EU COMEÇO PELO CASO POLINOMIAL E EM GERAL NÃO TENHO TEMPO DE PASSAR PRO CASO GERAL...

(AH, EU PUS UM LINK PRAS NOTAS DE AULA DA CRISTIANE HERNÁNDEZ NA PÁGINA, E, VOCÊS PODEM TENTAR PIRATEAR O POYCE-DIPRIMA!)

LEMBRE QUE NÓS RESOLVÍAMOS EDOS COM VARIÁVEIS SEPARÁVEIS ASSIM:

$$g(y)\,dy = h(x)\,dx$$
$$\int g(y)\,dy = \int h(x)\,dx$$
$$G(y)+C_1 \qquad H(x)+C_2$$
$$G(y)-H(x) = C_2-C_1 = C_3$$

A SOLUÇÕES DE UMA EDO COM VARIÁVEIS SEPARÁVEIS SÃO AS CURVAS DE NÍVEL DA FUNÇÃO $\underbrace{G(y)-H(x)}_{M(x,y)} = \text{const}$

EM EDOS SEPARÁVEIS A GENTE SEMPRE OBTINHA UMA $M(x,y)$ QUE PODIA SER "SEPARADA" EM $M(x,y) = G(y)-H(x)$...

VAMOS VER AGORA O CASO GERAL - AS EDOS CUJAS SOLUÇÕES SÃO AS CURVAS DE NÍVEL DE UMA FUNÇÃO $M(x,y)$ QUALQUER

NÃO! VAMOS COMEÇAR COM O CASO EM QUE $M(x,y)$ É UM POLINÔMIO EM x E y!

LEMBREM QUE EM EDO A GENTE SEMPRE COMEÇA PELO MEIO...

SE A GENTE TEM UMA FUNÇÃO $M(x,y)$ AS SOLUÇÕES DA EDO VÃO SER AS CURVAS DE NÍVEL DELA...

MAS QUAL EDO??? !!

FIXE UMA $M(x,y)$.
QUAL É A EDO CUJAS SOLUÇÕES SÃO AS CURVAS DE NÍVEL DA $M(x,y)$?

ALGUMAS IDÉIAS DE CÁLCULO 3:
- DERIVADAS PARCIAIS
- DERIVADA TOTAL
- TEOREMA DE YOUNG / CRITÉRIO DE (ESQUECI QUEM).

EXEMPLO:
$M(x,y) = x^3y^5$

PRA GENTE CALCULAR $\frac{\partial}{\partial x}M(x,y)$ A GENTE TRATA O y COMO CONSTANTE E CALCULA $\frac{d}{dx}M(x,y)$.

PRA GENTE CALCULAR $\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)$ A GENTE TRATA O x COMO CONSTANTE E CALCULA $\frac{d}{dy}M(x,y)$.

NOTAÇÕES MAIS CURTAS:
$$M_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}M(x,y),$$
$$M_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}M(x,y).$$

1) EXERCÍCIO: CALCULEM:
(a) $\frac{\partial}{\partial x}(x^3y^5)$
(b) $\frac{\partial}{\partial y}(x^3y^5)$
(c) $\frac{\partial}{\partial x}(x^3+x^2y^4+y^5)$
(d) $\frac{\partial}{\partial y}(x^3+x^2y^4+y^5)$

REGRA DA CADEIA EM $\mathbb{R}^2$

DIGAMOS QUE
$F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,
$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x=g(t)$,
$y=h(t)$,
$z=F(x,y) = F(g(t),h(t))$

$$\frac{d}{dt}F(g(t),h(t)) = F_x(g(t),h(t))\,g'(t) + F_y(g(t),h(t))\,h'(t)$$

EM CASOS BEM CONCRETOS A GENTE SABE CALCULAR $\frac{d}{dt}F(g(t),h(t))$ MESMO SEM ESSA REGRA NOVA...

2) EXERCÍCIO:
DIGAMOS QUE
$F(x,y) = x^2y^3$,
$g(t) = \text{sen}\, t$,
$h(t) = e^{4t}$.

$$\frac{d}{dt}F(g(t),h(t)) = \frac{d}{dt}\left((\text{sen}\, t)^2(e^{4t})^3\right) = ?$$

$$F(g(t),h(t)) \quad \left[\begin{array}{l} F(x,y)=x^2y^3 \\ g(t)=\text{sen}\, t \\ h(t)=e^{4t}\end{array}\right]$$
$$= (\text{sen}\, t)^2(e^{4t})^3$$
$$= (2(\text{sen}\, t)(\cos t))(e^{4t})^3 + (\text{sen}\, t)^2(12e^{12t})$$

3) CALCULE $\frac{d}{dt}F(g(t),h(t))$ USANDO A REGRA DA CADEIA EM $\mathbb{R}^2$.

$$\frac{d}{dt}F(g(t),h(t)) = F_x(g(t),h(t))\,g'(t) + F_y(g(t),h(t))\,h'(t) =$$

$$\left[\begin{array}{l} F(x,y)=x^2y^3 \\ F_x(x,y)=2xy^3 \\ F_y(x,y)=x^2\cdot 3y^2 \\ g(t)=\text{sen}\, t \\ h(t)=e^{4t} \\ g'(t)=\cos t \\ h'(t)=4e^{4t}\end{array}\right]$$

C2 14/nov/2019

Turma grande

Hoje:
EDOs exatas!

Mini-teste nos últimos 30 minutos da aula!
Marcar P2, VR, VS!

P2: 12/dez
VR: 13/dez
VS: 19/dez

Abreviando, e considerando que $z=F(x,y)$,
$x=g(t)$,
$y=h(t)$,

$$\frac{d}{dt}F(g(t),h(t)) = \frac{dz}{dt}$$

$$F_x(g(t),h(t))\,g'(t) = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}$$

$$F_y(g(t),h(t))\,h'(t) = \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \quad !!!$$

Se $g(t)=t$

$$\frac{d}{dt}F(g(t),h(t)) = F_x(g(t),h(t)) + F_y(g(t),h(t))\,h'(t)$$

Como é que a gente caracteriza as curvas de nível da F?

Uma curva de nível da F "é" uma função $y=h(x)$ tal que

$$F(x,h(x)) = \text{constante}\ldots$$

Mais precisamente, uma função $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ "percorre uma curva de nível da F" quando $F(x,h(x)) = \text{constante}\ldots$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}F(x,h(x)) = 0$$

OBS: $\frac{d}{dx}F(x,h(x)) = \frac{d}{dt}F(g(t),h(t))$ com $g(t)=t$

Queremos

$$\frac{d}{dx}F(x,h(x)) = 0$$
$$\parallel$$
$$F_x + F_y h'(x)$$
$$\parallel$$
$$F_x + F_y\frac{dy}{dx}$$

A gente normalmente vai escrever EDOs exatas assim:

$$\boxed{F_x\,dx + F_y\,dy = 0}$$

Agora: mini-teste!

C2 22/Nov/2019

Turma Grande

Hoje:
Dúvidas, exercícios,
Revisão!

Variáveis separáveis - meio:

$$\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx$$

$g(y) = y^2$ $\quad$ $f(x) = \cos x$

1) $\int y^2\,dy = \frac{y^3}{3}$ $\quad$ $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$

2) $y = \sqrt[3]{3\operatorname{sen} x}$

3) $y^2\,dy = \cos x\,dx$

$\frac{y^2\,dy}{dx} = \cos x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{y^2}$ ← EDO

4) $\frac{\cos x}{(\sqrt[3]{3\operatorname{sen} x})^2}$

1. Escolham $g(y)$ e $f(x)$ fáceis de integrar
2. "Resolva" a EDO, no sentido de: escreva y em função de x
3. Descubra qual é a EDO
4. Teste se a sua solução do 2 é solução do 3

1) $g(y) = \cos y$ $\quad$ $f(x) = x^2$

2) $y = \operatorname{arcsen} \frac{x^3}{3}$

3) $\cos y\,dy = x^2\,dx$

$\frac{\cos y}{x^2} = \frac{dx}{dy}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{\cos y}$ ← EDO: $h'(x) = \frac{x^2}{\cos(h(x))}$

4) $\frac{d}{dx}\left(\operatorname{arcsen} \frac{x^3}{3}\right) = \operatorname{arcsen}'\left(\frac{x^3}{3}\right) \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x^3}{3}\right)^2}} \cdot x^2$

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-\frac{x^6}{9}}} = \frac{x^2}{\cos\left(\operatorname{arcsen} \frac{x^3}{3}\right)} = \frac{x^2}{\cos y}$$

$\frac{dy}{dx} = \left(\sqrt[3]{3\operatorname{sen} x}\right)'$

$= \frac{1}{3} \cdot (3\operatorname{sen} x)^{-\frac{2}{3}} \cdot 3\cos x$

$= (3\operatorname{sen} x)^{-\frac{2}{3}} \cdot \cos x$

$= \frac{\cos x}{(3\operatorname{sen} x)^{\frac{2}{3}}} = \frac{\cos x}{\sqrt[3]{(3\operatorname{sen} x)^2}} = \frac{\cos x}{y^2}$

$\boxed{\text{Se } f(g(x)) = x \text{ então } g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}}$ $\quad$ $f(u) =$, $g(x) =$, $f'(u) =$

$\boxed{\frac{d}{dx} \operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

$\boxed{\cos \operatorname{arcsen} x = \sqrt{1-x^2}}$

$\cos y =$

$\cos \operatorname{arcsen} \frac{x^3}{3} =$

$y = \sqrt[3]{3\operatorname{sen} x}$ $\quad$ $\left(\sqrt[3]{8}\right)^2 =$

$y^2 = \sqrt[3]{(3\operatorname{sen} x)^2}$ $\quad$ $\sqrt[3]{8^2} =$

$f'' + 7f' + 10f = 0$

$H(t) = \{$

C2 22/nov/2019

TURMA PEQUENA

HOJE: DÚVIDAS!

$$f'' + 3f' - 18f = 0$$

$$(D^2 + 3D - 18)f$$

$$(D+6)(D-3)f$$

$$f_1 = e^{-6x}$$

$$f_2 = e^{3x}$$

$$f = \alpha f_1 + \beta f_2$$

$$f(0) =$$

$$f'(0) =$$

$$\int s \cdot \sqrt{1-s^2}\, ds = \left[\begin{array}{l} s = \operatorname{sen} \theta \\ \sqrt{1-s^2} = \cos\theta \\ ds = \cos\theta\, d\theta \end{array}\right]$$

$$\int$$

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 4,\ y^2+z^2 \leq x\}$$

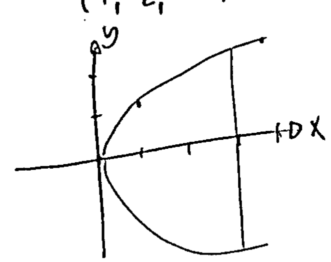
$$C' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 4,\ y^2+z^2 = x\}$$

ENCONTRE ALGUNS PONTOS DE C':

$(0,0,0)$

$(1,1,0)$, $(1,\_,\_)$, $(1,\_,\_)$, $(1,\_,\_)$

$(4,2,0)$, $(4,-2,0)$, $(4,0,2)$, $(4,0,-2)$



$y = \pm\sqrt{x}$

VISUALIZE E DESCREVA $C \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=3\}$.

QUAL É O RAIO DESSE CÍRCULO?

QUAL É A ÁREA DELE?

$$\text{VOLUME}(C) = \int_{x=0}^{x=4} \left(\begin{array}{c}\text{ÁREA DO} \\ \text{CORTE} \\ \text{EM } x\end{array}\right) dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=4} \pi x \, dx$$

$$F_x\, dx + F_y\, dy = 0$$

$$G\, dx + H\, dy = 0$$

C2 27/nov/2019

TURMA PEQUENA

HOJE:

- QUANDO É QUE UMA EDO É EXATA?
- COMO CONVERTER EDOS NÃO EXATAS EM EXATAS? ("FATOR INTEGRANTE")
- LIVRO: TRENCH

LEMBREM QUE UMA EDO É EXATA QUANDO ELA É DA FORMA

$F_x dx + F_y dy = 0$

PARA ALGUMA $F(x,y)$... DÁ PRA CONVERTER ISTO PRA UMA EDO QUE DÁ PRA TESTAR FAZENDO:

$$F_x + F_y \frac{dy}{dx} = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

E GERALMENTE OS PROBLEMAS DE EDOS EXATAS DÃO PRA GENTE UMA EDO NA FORMA

$M dx + N dy = 0$,

E A GENTE TEM QUE ENCONTRAR A F COM

$F_x = M$ E $F_y = N$ ...

COMO A GENTE DESCOBRE RÁPIDO SE A F EXISTE OU NÃO?

TRUQUE: (CÁLCULO 3) TEOREMA DE YOUNG

$F_{xy} = F_{yx}$

(EXCETO NUMAS FUNÇÕES MUITO ESTRANHAS E DIFÍCEIS DE DEFINIR)

ALÉM DISSO, SE EM

$M dx + N dy = 0$

TEMOS

F_{xy} F_{yx}

$M_y = N_x$

ENTÃO EXISTE F TAL QUE

$F_x = M$ E $F_y = N$

(EXCETO EM CASOS MUITO ESTRANHOS E DIFÍCEIS DE DEFINIR).

DÁ PRA OBTER F A PARTIR DE M E N POR INTEGRAÇÃO – MAS A GENTE VAI ENCONTRAR A F NO CHUTE MESMO.

REPARE QUE

$F_x dx + F_y dy = 0$

É EQUIVALENTE A

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

E PRA "QUALQUER" $G(x,y)$ (OBS: $G(x,y) = 0$ NÃO FUNCIONA)

A EDO ACIMA VAI SER EQUIVALENTE A

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{GF_x}{GF_y}$$

E TAMBÉM A:

$GF_y dy = -GF_x dx$

$GF_x dx + GF_y dy = 0$

QUE "EM GERAL" NÃO VAI SER EXATA.

EXERCÍCIO:

1. QUAL É A EDO EXATA CUJAS SOLUÇÕES SÃO AS CURVAS DE NÍVEL DE $F(x,y) = x^2 y^3$?
2. VERIFIQUE QUE A EDO ACIMA OBEDECE A CONDIÇÃO $M_y = N_x$.
3. TRANSFORME ESSA EDO EM OUTRAS EQUIVALENTES QUE TALVEZ NÃO SEJAM EXATAS USANDO:
   a) $G(x,y) = 4$,
   b) $G(x,y) = x$,
   c) $G(x,y) = x + y$
4. TESTE SE CADA UMA DAS EDOS ACIMA É EXATA OU NÃO – CONSULTE O QUE O TRENCH CHAMA DE "EXACTNESS CONDITION" NO TEOREMA 2.5.2.
5. LEIA O INÍCIO DA SEÇÃO 2.6 ("INTEGRATING FACTORS") E TRADUZA O EXEMPLO 2.6.1 PARA A NOTAÇÃO DE CAIXINHAS.
6. FAÇA O EXERCÍCIO 1a DA P.91.
7. FAÇA O 2a DA P.91.
8. FAÇA O 3 DA P.91.
9. FAÇA O 4 DA P.91.

C2 28/nov/2019
Turma grande

Hoje: mais sobre EDOs exatas!!!

Na última aula nós fomos até aqui... Uma EDO exata cujas soluções são as curvas de nível de $F(x,y)$ costuma ser escrita deste jeito:

$$F_x\,dx + F_y\,dy = 0$$

Repare que dá pra "traduzir" isto para

$$F_y \frac{dy}{dx} = -F_x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

Exemplo: Digamos que

$F(x,y) = x^2y^3$

$F_x(x,y) = 2xy^3$

$F_y(x,y) = x^2 \cdot 3y^2$

No exemplo,

$$\boxed{(2xy^3)dx + (3x^2y^2)dy = 0}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy^3}{3x^2y^2}$$

$$\boxed{f'(x) = -\frac{2x f(x)^3}{3x^2 f(x)^2}} \quad (*)$$

(1) Exercício:

(a) Escreva a equação $F(x,y)=4$, isto é, $x^2y^3=4$, "em função de x".

(b) Idem, mas para $F(x,y)=C$.

(c) Verifique que a sua "solução da EDO" $y=f(x)$ que você obteve no (b) obedece $(*)$.

(b)
$$x^2y^3 = C$$
$$y^3 = C/x^2$$
$$y = \sqrt[3]{C/x^2}$$
$$= \underbrace{\sqrt[3]{C}}_{\alpha}\sqrt[3]{x^{-2}}$$
$$= \alpha x^{-2/3}$$
$$f(x) = y = \alpha x^{-2/3}$$

(c)
$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\alpha x^{-\frac{2}{3}}\right)$$
$$= \alpha\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-5/3}$$
$$f'(x) \overset{?}{=} -\frac{2x f(x)^3}{3x^2 f(x)^2}$$
$$= -\frac{2f(x)}{3x}$$
$$= -\frac{2(\alpha x^{-2/3})}{3x}$$
$$= -\frac{2}{3}\cdot\alpha\cdot x^{-5/3}$$

Dá pra gente fazer exemplos bem mais complicados... P.ex.:

$$(y+2)^3 + 4 = x^5 + 6x^2 + 7$$
$$(y+2)^3 = x^5 + 6x^2 + 3$$
$$y+2 = \sqrt[3]{x^5+6x^2+3}$$
$$y = \sqrt[3]{x^5+6x^2+3} - 2$$

A gente vai tentar trabalhar com exemplos simples, com $F(x,y)$ polinômio em x e y...

Dica: eu pus no site um link pra um livro de EDOs "livre" muito bom - o do Trench.

Em geral quando derem um problema de EDOs exatas pra gente ele vai ser dado nesta forma:

$$M\,dx + N\,dy = 0$$

ao invés de

$$F_x\,dx + F_y\,dy = 0$$

e a gente vai ter que descobrir qual é a F...

Truque: uma notação visual (não-padrão!!!) pra polinômios em duas variáveis

Antes:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 6 & & 7 & 8 & \\ \hline\end{array} = 6x^4+0x^3+7x^2+8x+0$$

Agora:

$$\begin{array}{r|c|c|c|}
\cline{2-4} \text{coef } y^2 \rightarrow & 2 & 3 & 4 \\
\cline{2-4} \text{coef } y^1 \rightarrow & 5 & 6 & 7 \\
\cline{2-4} \text{coef } y^0 \rightarrow & 8 & 9 & 10 \\
\cline{2-4} & \text{coef } x^0 & \text{coef } x^1 & \text{coef } x^2
\end{array}
= \begin{array}{l} 2x^0y^2 + 3x^1y^2 + 4x^2y^2 \\ +5x^0y^1 + 6x^1y^1 + 7x^2y^1 \\ +8x^0y^0 + 9x^1y^0 + 10x^2y^0 \end{array}$$

$$= \begin{array}{l} 2y^2 + 3xy^2 + 4x^2y^2 \\ +5y + 6xy + 7x^2y \\ +8 + 9x + 10x^2 \end{array}$$

(2) Exercícios: Faça as contas abaixo e dê o resultado na notação de caixinhas 2D.

(a) $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline & 3 \\ \hline\end{array} + \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & 6 \\ \hline & 4 & 5 \\ \hline\end{array}$

(b) $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline & 3 \\ \hline\end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 10 \\ \hline\end{array}$

(c) $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline & 3 \\ \hline\end{array} \cdot \begin{array}{|c|}\hline 10 \\ \hline \\ \hline\end{array}$

(d) $\frac{\partial}{\partial x}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 5 & 6 & 7 \\ \hline 8 & 9 & 10 \\ \hline 11 & 12 & 13 \\ \hline\end{array}$

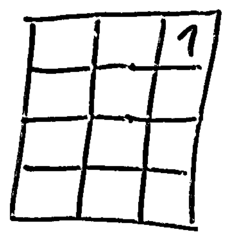
(e) $\frac{\partial}{\partial y}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 5 & 6 & 7 \\ \hline 8 & 9 & 10 \\ \hline 11 & 12 & 13 \\ \hline\end{array}$

C2 28/NOV/2019

TURMA GRANDE

HOJE: MAIS SOBRE EDOS EXATAS!!!

NOSSO EXEMPLO DO INÍCIO DA AULA ERA:

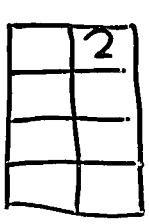
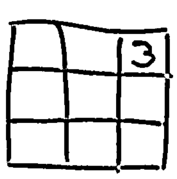
$F(x,y) = x^2y^3 =$ 

A EDO CUJAS SOLUÇÕES ERAM AS CURVAS DE NÍVEL DE F ERA:

$$F_x\,dx + F_y\,dy = 0$$

ISTO É,

$$(2xy^3)\,dx + (3x^2y^2)\,dy = 0,$$

 dx +  $dy = 0$

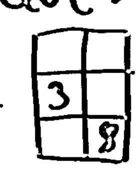
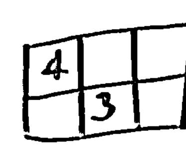
LEMBRE QUE ÀS VEZES A NOSSA EDO ~~EXATA PODE SER~~ DADA NA FORMA

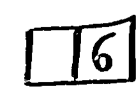
$$F_x\,dx + F_y\,dy = 0,$$

MAS VOCÊ VAI TER QUE DESCOBRIR A F...

FORMALMENTE: "ENCONTRE F TAL QUE $F_x = M$ E $F_y = N$", ONDE M E N SÃO FUNÇÕES CONHECIDAS.

(3) ENCONTRE F TAL QUE:

(a) $F_x =$ , $F_y =$ .

(b) $F_x =$ , $F_y =$ .

C2 29/NOV/2019

Hoje: mais coisas sobre EDOs exatas! Fatores integrantes!

Ontem nós vimos que uma EDO da forma

$$F_x\,dx + F_y\,dy = 0$$

(que pode ser reescrita como

$$F_x + F_y \frac{dy}{dx} = 0)$$

tem como soluções as curvas de nível $F(x,y)=C$...

Em geral essas EDOs vão ser dadas nesta forma aqui,

$$M\,dx + N\,dy = 0$$

e a gente vai ter que descobrir o F.

Vamos usar uma notação de caixinhas 2D pra polinômios em duas variáveis:

$$\begin{array}{r}y_4\to\\y_3\to\\y_2\to\\y_1\to\\y_0\to\end{array}\begin{array}{|c|c|c|}\hline & 5 & 6\\\hline & & 7\\\hline & & \\\hline & & \\\hline & & \\\hline \end{array} = 5xy^4 + 6x^2y^4 + 7x^2y^3$$

$$\begin{array}{ccc}\uparrow&\uparrow&\uparrow\\x^0&x^1&x^2\end{array}$$

E terminamos a aula passada com estes dois exercícios:

1) Digamos que $M\,dx + N\,dy = 0$ seja

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 5 & \\\hline & 12\\\hline\end{array}\,dx + \begin{array}{|c|c|}\hline 8 & \\\hline & 5\\\hline\end{array}\,dy = 0.$$

Encontre F tal que $F_x = M$ e $F_y = N$.

2) Idem, mas $M\,dx + N\,dy = 0$ é

$$\begin{array}{|c|c|}\hline & 5\\\hline & \\\hline & \\\hline\end{array}\,dx + \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & 6\\\hline & & \\\hline\end{array}\,dy = 0.$$

Pra quem precisa aprender ou relembrar isso correndo:

3) $$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2\\\hline & 3\\\hline\end{array} + \begin{array}{|c|c|c|}\hline & 4 & \\\hline & 3 & 6\\\hline\end{array} = ?$$

4) $$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2\\\hline & 3\\\hline\end{array} \cdot \begin{array}{|c|}\hline 10\\\hline \\\hline\end{array} = ?$$

5) $$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2\\\hline & 3\\\hline\end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 10\\\hline\end{array} = ?$$

6) Seja $$F = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & 10\\\hline & & \\\hline & & \\\hline & & \\\hline\end{array}.$$

Calcule $\frac{\partial}{\partial x}F$ e $\frac{\partial}{\partial y}F$

Se $$F = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 4 & & \\\hline & 5 & \\\hline & & 6\\\hline\end{array}$$ então F_x obedece ⇒

p/ que $F_y = \begin{array}{|c|c|}\hline 8 & \\\hline & 5\\\hline\end{array}$

$$\hookrightarrow F = \begin{array}{|c|c|}\hline 4 & \\\hline & 5\\\hline & \\\hline\end{array}$$

1) Digamos que

$$F_x = \begin{array}{|c|c|}\hline 5 & \\\hline & 12\\\hline\end{array} \quad e$$

$$F_y = \begin{array}{|c|c|}\hline 8 & \\\hline & 5\\\hline\end{array}.$$

Descubra F.

$$F = \begin{array}{|c|c|c|}\hline a & b & c\\\hline d & e & f\\\hline g & h & i\\\hline\end{array}\begin{array}{l}y_2\\y_1\\y_0\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}x_0 & x_1 & x_2\end{array}$$

$$F_x = by^2 + 2cxy^2 + ey + 2fxy + h + 2xi$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline b & 2c\\\hline e & 2f\\\hline h & 2i\\\hline\end{array}$$

$$F = a x^0y^2 + b x^1y^2 + c x^2y^2 + d x^0y^1 + e x^1y^1 + f x^2y^1 + g x^0y^0 + h x^1y^0 + i x^2y^0$$

$$= ay^2 + bxy^2 + cx^2y^2 + dy + exy + fx^2y + g + hx + ix^2$$

$$F_x = by^2 + 2cxy^2 + ey + 2fxy + h + 2ix$$

$$F_y = 2ay + 2bxy + 2cx^2y + d + ex + fx^2$$

$$F_x: \begin{array}{|c|c|}\hline b & 2c\\\hline e & 2f\\\hline h & 2i\\\hline\end{array} \qquad F_y: \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2a & 2b & 2c\\\hline d & e & f\\\hline\end{array}$$

C2 29/NOV/2019
TURMA PEQUENA

HOJE:
CONTINUAÇÃO DO QUE NÓS VIMOS NA ÚLTIMA AULA SOBRE FATOR INTEGRANTE, E TALVEZ EDOS HOMOGÊNEAS (ÚLTIMA COISA DA MATÉRIA, ACHO).

NÓS VAMOS FAZER EXERCÍCIOS DE FATOR INTEGRANTE DO TRENCH.

TENTEM FAZER OS EXERCÍCIOS 1,2,3,4 DO TRENCH (P. 99).

DICA: ESCREVA
$M_y - N_x$,
$\frac{M_y - N_x}{M}$,
$\frac{M_y - N_x}{N}$
NA NOTAÇÃO DE CAIXINHAS.

3) $\underbrace{y}_{M}\,dx \underbrace{- x}_{N}\,dy$

Isso é exato?

$M_y \overset{?}{=} N_x$

$M_y = 1$, $N_x = -1$

$1 \neq -1$ NÃO

$$p(x) = \frac{M_y - N_x}{N} = \frac{1-(-1)}{-x} = -\frac{2}{x}$$

$$\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}$$
$$= e^{\int -\frac{2}{x}\,dx}$$
$$= e^{\left(-2\int \frac{1}{x}\,dx\right)}$$
$$= e^{(-2\ln|x|)}$$
$$= \left(e^{\ln|x|}\right)^{-2}$$
$$= |x|^{-2}$$
$$= x^{-2}$$
$$= \frac{1}{x^2}$$

EDO NOVA:
$$\mu M\,dx + \mu N\,dx = 0$$
$$\frac{1}{x^2}y\,dx + \frac{1}{x^2}(-x)\,dx = 0$$
$$\underbrace{x^{-2}y}_{M}\,dx \underbrace{- x^{-1}}_{N}\,dx = 0$$

A EDO $\underbrace{x^{-2}y}_{M}\,dx \underbrace{- x^{-1}}_{N}\,dx = 0$ é exata?

$M_y \overset{?}{=} N_x$

$M_y = x^{-2}$, $N_x = x^{-2}$

SIM! :)

$$e^{a+b} = e^a e^b$$
$$e^{ab} = (e^a)^b$$

$$x^2 = |x|^2$$

C2 4/DEZ/2019

TURMA PEQUENA

REVISÃO E DÚVIDAS

1ª parte da Solução. 4

$$P = \frac{m_y - m_x}{m} =$$

$$P = \frac{(8xy + 10x^2) - (16xy + 15x^2)}{8x^2y + 5x^3}$$

$$= \frac{-8xy - 5x^2}{8x^2y + 5x^3} = \frac{-(8xy + 5x^2)}{x(8xy + 5x^2)} = -\frac{1}{x}$$

5

$$\pm e^{\int P\,dx}$$

$$= \pm e^{\int -\frac{1}{x}dx}$$

$$= \pm e^{-\ln x}$$

$$= e^{(-1)\ln x}$$

$$= (e^{\ln x})^{-1}$$

$$e^{3\cdot 6} = (e^3)^6$$

$$\boxed{\text{exato: } m_y \overset{?}{=} m_x}$$ 3

$$m_y = 8xy + 10x^2$$

$$m_x = 16xy + 15x^2$$

2ª Parte

$$= (e^{\ln x})^{-1}$$

$$= x^{-1}$$

$$= \frac{1}{x}$$ 6

Seja (A) essa edo:

$$\frac{1}{x}(4xy^2 + 10x^2y)\,dx + \frac{1}{x}(8x^2y + 5x^3)\,dy = 0$$

Já que m_y é diferente de m_x não é exato!

$m_y \mathrel{!}= m_x$

$m_y \neq m_x$

1

$$F = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & 4 & \\ \hline & & 5 \\ \hline & & \\ \hline\end{array} = 4xy^2 + 5x^2y$$

$$F_x = \begin{array}{|c|c|}\hline 4 & \\ \hline & 10 \\ \hline & \\ \hline\end{array} \qquad F_y = \begin{array}{c|c|c|c|} 1 & & 8 & \\ \hline 0 & & & 5 \\ \hline & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

$F_x\,dx + F_y\,dy = 0$ (EXATA)

$HF_x\,dx + HF_y\,dy = 0$

TESTES: $H(x,y) = x$ (a)

$H(x,y) = \frac{1}{x}$ (b)

2

$$F_x = 4y^2 + 10xy$$

$$F_y = 8xy + 5x^2$$

$(4y^2 + 10xy)\,dx + (8xy + 5x^2)\,dy = 0$ (exato)

$$H(4y^2 + 10xy)\,dx + H(8xy + 5x^2)\,dy = 0$$

(a) $$\underbrace{(4xy^2 + 10x^2y)}_{m}\,dx + \underbrace{(8x^2y + 5x^3)}_{n}\,dy = 0$$

$\boxed{\text{C2 } 4/\text{DEZ}/2019}$

TURMA PEQUENA

REVISÃO E DÚVIDAS

(☆)

$$F = 6x^2y^2 + 7x^3y$$

$$F_x = 12xy^2 + 21x^2y$$

$$F_y = 12x^2y + 7x^3$$

$$F_x\,dx + F_y\,dy = 0$$

$$F_{xy} \overset{?}{=} F_{yx}$$

$$F_{xy} = 24xy + 21x^2$$

$$F_{yx} = 24xy + 21x^2$$

$$F_{xy} = F_{yx}$$

(☆☆)

$$\frac{1}{x}\left(\left(12xy^2 + 21x^2y\right)dx + \left(12x^2y + 7x^3\right)dy\right) = 0$$

$$\underbrace{\left(12y^2 + 21xy\right)}_{M}dx + \underbrace{\left(12xy + 7x^2\right)}_{N}dy$$

$$M_y \overset{?}{=} N_x$$

$$M_y = 24y + 21x$$

$$N_x = 12y + 14x$$

COMO $M_y \neq N_x$:

↳ PRECISO ACHAR FATOR INTEGRANTE (P)

↳ $P = \dfrac{M_y - N_x}{N}$

$$= \frac{24y + 21x - (12y + 14x)}{12xy + 7x^2}^{*}$$

$$* = \frac{12y + 7x}{12xy + 7x^2}$$

$$= \frac{12y + 7x}{x(12y + 7x)}$$

$$= \frac{1}{x}$$

$$\mu = e^{\int P\,dx}$$

$$= e^{\int \frac{1}{x}dx}$$

$$= e^{\ln x}$$

$$= x$$

SEJA (☆☆☆) A EDO

$$\mu M\,dx + \mu N\,dx = 0.$$

OUTRO EXEMPLO:
(NÃO SEI COMO AS CONTAS VÃO FICAR!)

SEJAM $F = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & 6 & \\ \hline & & & 7 \\ \hline & & & \\ \hline\end{array}$, $H = \frac{1}{x}$.

SEJA (☆) A EDO $F_x\,dx + F_y\,dy = 0$ (EXATA),

SEJA (☆☆) A EDO $HF_x\,dx + HF_y\,dy = 0$ (NÃO-EXATA).

ENCONTRE O FATOR INTEGRANTE PARA (☆☆).

$$M = -2x + 6$$

$$N = 2y + 8$$

$$M_y \overset{?}{=} N_x$$

$$M_y = 0$$

$$N_x = 0$$

$$M\,dx + N\,dy = 0$$

$$M + N\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N}$$

EDO: $(-2x+6)\,dx + (2y+8)\,dy = 0$

a) Esta EDO é exata?

b) Encontre a solução geral desta EDO

c) Encontre a solução que passa no ponto (a, b) desta EDO.

$\boxed{\text{Solução geral é achar o } y.}$

$$-x^2 + 6x + y^2 + 8y = F(x,y) = C$$

$-2x+6$ $\quad 2y+8$

$$-x^2 + 6x + y^2 + 8y = C$$

$$-x^2 + 6x + (y^2 + 8y + 16) - 16 = C$$

$$-x^2 + 6x + (y+4)^2 - 16 = C$$

$$(y+4)^2 = C + x^2 - 6x + 16$$

$$y = \pm\sqrt{C + x^2 - 6x + 16} - 4$$

C2 5/dez/2019
TURMA GRANDE

Dúvidas e Revisão!

Sugestões:

1. Revejam EDOs com variáveis separáveis
2. EDOs exatas e fatores integrantes
3. Questões de área do APEX Calculus
4. Questões sobre volume
5. Revisem integração por substituição

Sugestão pra (2):

(a) Escolha uma função $F(x,y)$ polinomial
(b) Encontre a EDO $M dx + N dy = 0$ (*) cujas soluções vão ser as curvas de nível da $F(x,y)$
(c) Resolva (*) fingindo que você não conhece a F
(d) Escolha uma função $H(x,y)$ não trivial.
Seja $\underbrace{(HF_x)}_{M}dx + \underbrace{(HF_y)}_{N}dy = 0$ (**)
uma nova EDO - repare que o "M" e o "N" dela vão ser diferentes dos anteriores.
(e) Verifique se (**) é exata.
(f) Se ela não for exata resolva ela encontrando fatores integrantes pra ela (TRENCH).

$F_x dx + F_y dy = 0$
$F_{xy} = F_{yx}$

(a) $F(x,y) = x^2y^3$

(b) $\underbrace{2xy^3}_{F_x} dx + \underbrace{3x^2y^2}_{F_y} dy = 0 \Rightarrow 2xy^3 + 3x^2y^2 \frac{dy}{dx} \overset{?}{=} 0$

$2x\left(\frac{c}{x^2}\right)^{\frac{3}{3}} + 3x^2\left(\frac{c}{x^2}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{dy}{dx} = 0$

$2x\left(\frac{c}{x^2}\right)^{\frac{3}{3}} + x^2\left(\frac{c}{x^2}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{c}{x^2}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{-2xc}{x^4}\right) = 0$

$2x\left(\frac{c}{x^2}\right)^{\frac{3}{3}} + \frac{-2c}{x} \overset{x=1}{\Rightarrow} 2c^{\frac{3}{3}} = 2c$

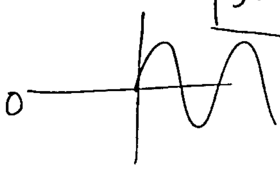
(c) 1º (curvas de nível) $x^2y^3 = c$
$y^3 = \frac{c}{x^2}$
$\boxed{y = \sqrt[3]{\frac{c}{x^2}}}$

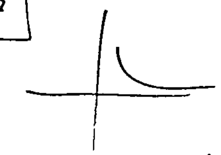
2º $F(x,y) = \int 2xy^3\, dx = \int 3x^2y^2\, dy$

$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{c}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\left(\frac{c}{x^2}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{-2xc}{x^4}\right)$

$y^3 = cx^{-2}$
$y = (cx^{-2})^{1/3} = c^{1/3}x^{-2/3} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}c^{-\frac{2}{3}} \cdot x^{-\frac{2}{3}} + c^{\frac{1}{3}} \cdot \left(-\frac{2}{3}x\right)^{-\frac{5}{3}}$

$F(x,y) = 99$
$x^2y = 99$
$\boxed{y = \frac{99}{x^2}}$

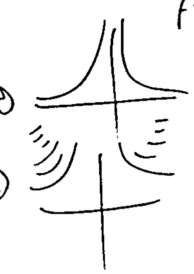




$\boxed{F(x,y) = x^2y}$
$\boxed{y = \frac{99}{x^2}}$

$f(x)\frac{d}{dx}g(x) = f(x)g'(x)$ $y = \frac{1}{x^2} \Rightarrow$

$y = \frac{4}{x^2} \Rightarrow$



Será que $y = \frac{99}{x^2} = 99x^{-2}$ é solução disto?
$(2xy) + x^2\frac{dy}{dx} = 0$?
$(2x \cdot 99x^{-2}) + x^2(-198x^{-3}) \overset{?}{=} 0$
$\frac{dy}{dx} = -198x^{-3}$

$(D-2)(D+5)f = 0$
$f'' + 3f' - 10f = 0$
$f_1 = e^{2x}$
$f_2 = e^{-5x}$

$y^3 = cx^{-2}$
$y = (cx^{-2})^{1/3}$
$y = cx^{-2/3}$
$\frac{dy}{dx} = c\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-5/3}$

C2 6/DEZ/2019
TURMA GRANDE

Revisão e dúvidas

$[F := D]$

EDO: $f'' + 3f' - 18f = 0$

a) Achar a forma $(D-a)(D-b)f = 0$

$D^2 + 3D - 18 = 0$

$D_1 = 3 \qquad D_2 = -6$

$(D-3)(D+6)f = 0$

b) Soluções básicas

$f_1 = e^{3x} \qquad f_2 = e^{-6x}$

$f = \alpha f_1 + \beta f_2$

$f(0) = \alpha + \beta = 1$

$f'(0) = 3\alpha - 6\beta = 0$

$3 - 3\beta - 6\beta = 0$

$9\beta = 3 \quad \beta = 3$

c) $f = \frac{2}{3} e^{3x} + \frac{1}{3} e^{-6x}$

2,0 PTS

EDO: $f'' - 6f' + 25f = 0$

$[f := D]$ $\quad D^2 - 6D + 25 = 0$

$\Delta = -64$

$\frac{6 \pm 8i}{2} = D$

$D_1 = 3 + 4i \qquad D_2 = 3 - 4i$

a)

$(D - (3+4i))(D - (3-4i))f = 0$

b) $f_1 = e^{(3+4i)x} \qquad f_2 = e^{(3-4i)x}$

$= e^{3x+4ix}$

$= e^{3x} e^{4ix}$

$= e^{3x}(\cos 4x + i \operatorname{sen} 4x)$

$= \underbrace{e^{3x}\cos 4x}_{f_3} + i\,\underbrace{e^{3x}\operatorname{sen} 4x}_{f_4}$

$f_3 = e^{3x}\cos 4x$

$f_4 = e^{3x}\operatorname{sen} 4x$

$\frac{f_1 + f_2}{2} = f_3$

$\frac{f_1 - f_2}{2i} = f_4$

$= e^{3x - 4ix}$

$= e^{3x} e^{-4ix}$

$= e^{3x}(\cos -4x + i \operatorname{sen} -4x)$

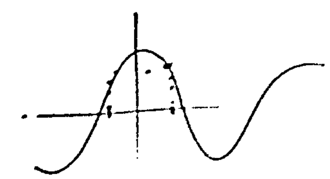
$= e^{3x}\cos(-4x) + i\, e^{3x}\operatorname{sen}(-4x)$

$f_5 = e^{3x}\cos(-4x) = e^{3x}\cos 4x$

$f_6 = e^{3x}\operatorname{sen}(-4x) = -e^{3x}\operatorname{sen} 4x$

$\cos(-4x) = \cos(4x)$

$\operatorname{sen}(-4x) = -\operatorname{sen}(4x)$



C2 6/DEZ/2019
TURMA GRANDE

REVISÃO E DÚVIDAS

$F_x = 3y^2 + 8xy + 15x^2$

$F_y = 6y^2 + 6yx + 4x^2$

$\int F_x \, dx = 3y^2x + 4x^2y + 5x^3 + C$

$\int F_y \, dy = 2y^3 + 3y^2x + 4x^2y + C$

SEJA $F = \begin{array}{c} h(y) \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & & & \\ \hline & 3 & & \\ \hline & & 4 & \\ \hline & & & 5 \\ \hline \end{array} \leftarrow g(x)$

ENTÃO $F_x = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline 3 & & & \\ \hline & 8 & & \\ \hline & & 15 & \\ \hline \end{array}$

$F_y = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline 6 & & & \\ \hline & 6 & & \\ \hline & & 4 & \\ \hline \end{array}$

$\int F_x \, dx = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & 3 & & \\ \hline & & 4 & \\ \hline & & & 5 \\ \hline \end{array}$

$\int F_y \, dy = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & & & \\ \hline & 3 & & \\ \hline & & 4 & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array}$

$h(y) = \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} = 2y^3$

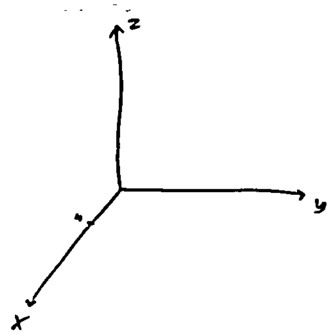
$g(x) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & 5 \\ \hline \end{array} = 5x^3$

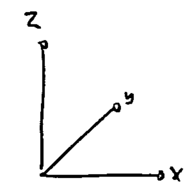
$F = \int F_x \, dx + h(y)$

$F = \int F_y \, dy + g(x)$

F_x

$\frac{d}{dx}\left(y^2 + 4y^5\right) = 0$





$f'(x) + \frac{1}{f(x)} + 2 = 0$

$f(x) = y = \sqrt[5]{\frac{5}{3}x^3 + 15x + C'}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+3}{y^4}$

$f'(x) = \frac{x^2+3}{f(x)^4}$

$y = f(x)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} y = \frac{d}{dx} f(x) = f'(x)$

C2 6/DEZ/2019
TURMA GRANDE

Revisão e Dúvidas

a) Ver se é exata
b) Solução Geral
c) Solução (a,b)

EDO: $\underbrace{(2xy^3)}_{M}dx + \underbrace{3(x^2+3)y^2}_{N}dy = 0$

a) Ser exata: $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$

$\frac{dM}{dy} = 6xy^2$ $N = 3x^2y^2 + 9y^2$

$\frac{dN}{dx} = 6xy^2$

EDO é exata

b) Encontre F obedecendo $F_x = M$ e $F_y = N$

$$F = \int M\,dx + g(y) = \int N\,dy + h(x)$$

$$F = \int 2xy^3\,dx + g(y) = \int 3x^2y^2 + 9y^2\,dy + h(x)$$

$$F = x^2y^3 + g(y) = x^2y^3 + 3y^3 + h(x)$$

$$\begin{bmatrix} g(y) := 3y^3 \\ h(x) := 0 \end{bmatrix} \Rightarrow F = x^2y^3 + 3y^3 \Rightarrow F_x = 2xy^3 = M \Rightarrow F_y = 3x^2y^2 + 9y^2 = N$$

Achando a solução geral através das curvas de nível da F da EDO:

$$C = y^3(x^2+3)$$

$$y^3 = \frac{C}{(x^2+3)}$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{C}{x^2+3}}$$

$$y = (C(x^2+3)^{-1})^{1/3} = C^{1/3}(x^2+3)^{-1/3} \quad (A)$$

c) Substituindo y (solução geral) na EDO:

$$2x\frac{C}{x^2+3}dx + \left(3x^2\left(\frac{C}{x^2+3}\right)^{\frac{2}{3}} + 9\left(\frac{C}{x^2+3}\right)^{\frac{2}{3}}\right)dy = 0$$

$$F_x\,dx + F_y\,dy = 0$$

$$F_x + F_y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3}(C(x^2+3))^{-\frac{4}{3}}(2xC)$$

$$\frac{2xC}{x^2+3} + \left(\frac{C}{x^2+3}\right)^{\frac{2}{3}}(3x^2+9)\left(\frac{2xC}{-\frac{1}{3}(C(x^2+3))^{\frac{4}{3}}}\right) = 0$$

Temos:

$y = C^{1/3}(x^2+3)^{-1/3}$

$\frac{dy}{dx} = C^{1/3}(-\frac{1}{3})(x^2+3)^{-4/3}\cdot 2x$

Vamos testar se $F_x + F_y\frac{dy}{dx} = 0$...

ou seja, se $(2xy^3) + (3(x^2+3)y^2)\frac{dy}{dx} = 0$,

ou seja, se $(2x(C^{1/3}(x^2+3)^{-1/3})^3) + (3(x^2+3)(C^{1/3}(x^2+3)^{-1/3})^2)(C^{1/3}(-\frac{1}{3})(x^2+3)^{-4/3}\cdot 2x) \overset{?}{=} 0$

$(2x\cdot C(x^2+3)^{-1}) + (3(x^2+3)C^{2/3}(x^2+3)^{-2/3})(C^{1/3}(-\frac{1}{3})(x^2+3)^{-4/3}\cdot 2x)$

$(2x\cdot C(x^2+3)^{-1}) + (3(-\frac{1}{3})C^{2/3}\cdot C^{1/3}(x^2+3)(x^2+3)^{-2/3}(x^2+3)^{-4/3}\cdot 2x)$

$2x\cdot C(x^2+3)^{-1} + (-1)\;C\;(x^2+3)^{-1}\;2x$

c) Solução (a, b)

$$\left(y = (C(x^2+3)^{-1})^{\frac{1}{3}}\right)\begin{bmatrix} x := a \\ y := b \end{bmatrix} =$$

Substitui y e x por b e a $\rightarrow$ $b = C(a^2+3)^{-\frac{1}{3}}$

Isola a constante $\rightarrow$ $C = \frac{b}{(a^2+3)^{-\frac{1}{3}}}$

Substitui a constante na solução geral (A)

$$y = \left(\frac{b}{(a^2+3)^{-1/3}}(x^2+3)^{-1}\right)^{1/3}$$

C2 6/DEZ/2019

TURMA PEQUENA

HOJE: REVISÃO E DÚVIDAS!

SUGESTÃO:
RESOLVA

$$\int (\operatorname{sen} x)^3 (\cos x)^2 \, dx$$

USANDO INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO (E NÃO O TRUQUE DO $E = C + iS$).

SEJAM:

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 4, \; y^2 + z^2 \leq x\}$$
$$C' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 4, \; y^2 + z^2 = 4\}$$