CÁLCULO 3
21/MAR/2019

Hoje: introdução ao curso!

Página do curso:
http://angg.twu.net/2019.1-C3.html

Ou procure no Google por "Eduardo Ochs", vá para qualquer subpágina do http://angg.twu.net/ e clique em "C3" na barra de navegação à esquerda.

Coisas mais importantes da página:

- Link pro livro que eu vou usar pra preparar as aulas: "APEX Calculus". Vantagens: ele é melhor que os livros comerciais como Thomas, Stewart, etc, e pode ser baixado e copiado livremente. Desvantagens: é em inglês.
- Fotos dos quadros
- Programa do curso

Cálculo 3 é uma versão mais detalhada de alguns assuntos que a gente vê rapidamente em C1, GA e em C2 (C2 precisa de algumas idéias de C3 e aí elas são vistas bem rápido e superficialmente em C2).

(1) Funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$, e de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^3$

Exemplos:

$f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$

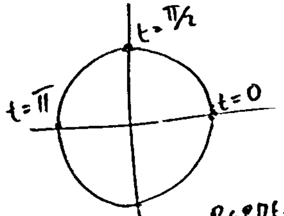
$g(t) = (t, t^2)$

$h(t) = (t, \operatorname{sen} t)$

A gente aprender algumas poucas coisas novas sobre funções assim e a gente vai aprender a visualizar tudo.

(0) O assunto (1) é chamado de "funções vetoriais" e a gente vai fazer uma mini-revisão de vetores.

Vamos representar funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos t, \operatorname{sen} t)$ como trajetórias...



$\boxed{1}$ Exerc: Represente graficamente as funções abaixo anotando o valor de t em alguns pontos.

a) $g(t) = (t, t^2)$
b) $h(t) = (t, \operatorname{sen} t)$
c) $p(t) = (2+t, t)$

Dicas:

(1) Não esqueça de escrever anotações como "$t=2$" e "$t=\pi$" do lado dos pontos adequados.

(2) Escolha valores de t fáceis. No item b os valores fáceis são os múltiplos de $\pi/2$.

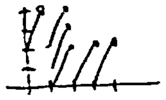
(2) Exercício (extra): Pra cada um dos valores fáceis de t calcule a derivada da função naquele t. Monte tabelas. Ex:

t	$f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$	$f'(t) = (\cos' t, \operatorname{sen}' t)$
$t=0$	$(1,0)$	$(0,1)$
$t=\frac{\pi}{2}$	$(0,1)$	$(-1,0)$
$t=\pi$	$(-1,0)$	$(0,-1)$

Revisão de como visualizar vetores

Em Geometria Analítica a gente distingue pontos e vetores: $(2,3) \neq \overrightarrow{(2,3)}$ e a gente representa pontos e vetores de forma diferente — vetores são setas indicando deslocamentos.

Lembre que cada vetor — p.ex. $\overrightarrow{(1,2)}$ — pode ser representado como várias setas diferentes — com origens diferentes, mas com o mesmo comprimento, direção e sentido...



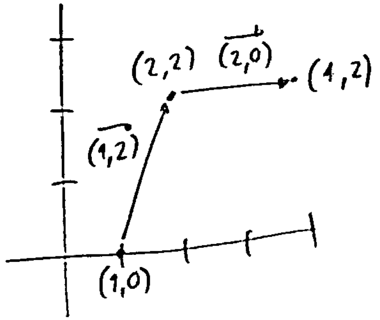
Truque importante:

Quando representamos $(a,b) + \overrightarrow{(c,d)}$ nós desenhamos o vetor $\overrightarrow{(c,d)}$ "apoiado" em (a,b), isto é, como uma seta indo de (a,b) para $(a+c, b+d)$.

origem

Exemplo:

$$\underbrace{(\underbrace{(1,0) + \overrightarrow{(1,2)}}_{(2,2)}) + \overrightarrow{(2,0)}}_{(4,2)}$$



CALCULO 3
21/MAR/2019

$\boxed{3}$ REPRESENTE GRAFICAMENTE AS CONTAS COM PONTOS E VETORES ABAIXO. LEMBRE QUE VOCÊ SÓ VAI REPRESENTAR GRAFICAMENTE PONTOS E CONTAS TIPO PONTO + VETOR.

a) $(1,0) + (\overrightarrow{(1,2)} + \overrightarrow{(2,0)})$

SIM SIM NÃO

b) $(1,0) + (\overrightarrow{(2,0)} + \overrightarrow{(1,2)})$

c) $((1,0) + \overrightarrow{(2,0)}) + \overrightarrow{(1,2)}$

d) $(1,2) + \frac{1}{2}\overrightarrow{(2,0)}$

e) $(1,2) + 2\,\overrightarrow{(2,0)}$

f) $(1,2) + (-1)\cdot\overrightarrow{(2,0)}$

$\boxed{4}$ LEMBRE QUE AS FUNÇÕES DE $\mathbb{R}$ EM $\mathbb{R}^2$ QUE NÓS ESTAMOS USANDO NOS EXERCÍCIOS SÃO:

$f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$,
$g(t) = (t, t^2)$,
$h(t) = (t, \operatorname{sen} t)$,
$p(t) = (2+t, t)$.

REPRESENTE GRAFICAMENTE:

a) $f(0) + f'(0)$,

b) $f(\frac{\pi}{2}) + f'(\frac{\pi}{2})$,

c) $f(\pi) + f'(\pi)$,

d) $g(0) + g'(0)$,

e) $g(1) + g'(1)$,

f) $g(-1) + g'(-1)$,

g) $h(\pi/2) + h'(\pi/2)$,

h) $h(0) + h'(0)$,

i) $p(0) + p'(0)$,

j) $p(2) + p'(2)$.

DICA:
FAÇAM OS EXERCÍCIOS a, b, c NUM GRÁFICO SÓ,
OS EXERCÍCIOS d, e, f NUM GRÁFICO SÓ,
g, h NUM GRÁFICO SÓ,
i, j NUM GRÁFICO SÓ.

OOPS - ESQUECI - IMPORTANTE!!!

ESTÁVAMOS USANDO $f'(t) = (\cos' t, \operatorname{sen}' t)$
MAS O "CERTO" É $f'(t) = \overrightarrow{(\cos' t, \operatorname{sen}' t)}$
E IDEM PRAS OUTRAS FUNÇÕES DE $\mathbb{R}$ EM $\mathbb{R}^2$...

C3 28/mar/2019

Hoje:
Revisão de norma, ortogonalidade e paralelismo; retas.

$\boxed{1}$ Dentre os vetores abaixo alguns (pares) são ortogonais entre si e alguns são paralelos entre si... Quais?

$\overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{(2,1)}$

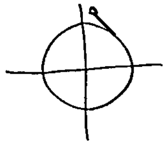
$\overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{(1,3)}$

$\overrightarrow{V_3} = \overrightarrow{(4,2)}$

$\overrightarrow{V_4} = \overrightarrow{(1,-2)}$

$\boxed{2}$ Digamos que a,b,c sejam fixos. Qual deve ser o valor de d para termos $\overrightarrow{(a,b)} \perp \overrightarrow{(c,d)}$? E para $\overrightarrow{(a,b)} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{(c,d)}$?

Obs: no final da aula vocês vão saber estimar certas derivadas no olhômetro - p.ex. $f'(\frac{\pi}{4})$ para $f(x)=(\cos x, \operatorname{sen} x)$.



$\boxed{3}$ Lembre que podemos calcular a norma (o comprimento) de um vetor fazendo $\|\overrightarrow{(a,b)}\| = \sqrt{a^2+b^2}$, i.e., $\|\overrightarrow{(a,b)}\| = \sqrt{\overrightarrow{(a,b)} \cdot \overrightarrow{(a,b)}}$.

(a) Calcule $\|\overrightarrow{(3,4)}\|$,

(b) Encontre $k \in \mathbb{R}$ tal que $\|k\overrightarrow{(3,4)}\| = 2$.

Dicas

Pra $\boxed{2}$: Qual é o d que faz $\overrightarrow{(3,4)} \perp \overrightarrow{(5,d)}$? E o que faz $\overrightarrow{(3,4)} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{(5,d)}$?

Pra $\boxed{3}$: Calcule:
$\|10\overrightarrow{(3,4)}\|$,
$\|-10\overrightarrow{(3,4)}\|$,
$\|2\overrightarrow{(3,4)}\|$,
$\|5\overrightarrow{(3,4)}\|$.

Retas

Estamos estudando funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$... elas representam trajetórias.

As da forma $f(t) = (a,b) + t\overrightarrow{(c,d)}$
$= (a+tc, b+td)$
nós vamos chamar de retas (mas seria mais honesto algo como "movimento retilíneo uniforme...").

Na aula passada nós pegamos algumas trajetórias curvas - p.ex. $f(x)=(\cos x, \operatorname{sen} x)$ - e criamos algumas retas tangentes a essas curvas.

Vamos precisar saber usar essas "retas" muito bem, então...

Exercícios

$\boxed{4}$ Qual é a reta $f(t) = (a,b) + t\overrightarrow{(c,d)}$ que passa por $(2,3)$ quando $t=0$ e por $(3,5)$ quando $t=1$?

$\boxed{5}$ Encontre duas outras retas - chame-as de $g(t)$ e $h(t)$ - que passem pelos mesmos pontos que a $f(t)$.

$\boxed{6}$ Calcule $f'(0)$, $f'(1)$, $g'(0)$, $h'(0)$.

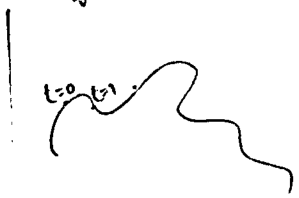
$\boxed{7}$ Dê uma reta $p(t)$ que passe pelo ponto $(0,4)$ e seja paralela a $f(t)$.

$\boxed{8}$ Dê uma reta $o(t)$ que passe pelo ponto $(0,4)$ e seja ortogonal a $p(t)$.

$\boxed{9}$ As retas $o(t)$ e $f(t)$ são ortogonais entre si?

$\boxed{10}$ Seja $m(t)$ uma reta que obedece: $m(0) = f(0)$, $m'(0) = \frac{1}{2} f'(0)$. Represente graficamente $f(t)$ e $m(t)$ num gráfico só.

Trajetória da mosca



29/MAR/2019

HOJE: MAIS SOBRE RETAS; RETAS SECANTES E TANGENTES.

EXERCÍCIOS DA AULA PASSADA:

$\boxed{4}$ QUEM É A RETA $f(t)=(a,b)+t\overrightarrow{(c,d)}$ QUE PASSA POR $(2,3)$ QUANDO $t=0$ E POR $(3,5)$ QUANDO $t=1$?

$\boxed{5}$ ENCONTRE OUTRAS DUAS RETAS – CHAME-AS DE $g(t)$ E $h(t)$ – QUE PASSEM PELOS MESMOS PONTOS QUE A $f(t)$.

$\boxed{6}$ CALCULE $f'(0)$, $f'(1)$, $g'(0)$, $h'(0)$.

$\boxed{7}$ DÊ UMA RETA $p(t)$ QUE PASSE PELO PONTO $(0,4)$ E SEJA PARALELA A $f(t)$.

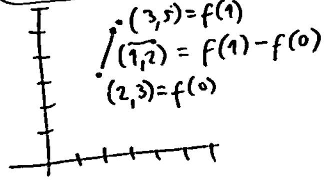
$\boxed{8}$ DÊ UMA RETA $o(t)$ QUE PASSE PELO PONTO $(0,4)$ E SEJA ORTOGONAL A $p(t)$.

$\boxed{9}$ AS RETAS $o(t)$ E $f(t)$ SÃO ORTOGONAIS ENTRE SI?

$\boxed{10}$ SEJA $m(t)$ UMA RETA QUE OBEDECE:
$m(0)=f(0)$,
$m'(0)=\frac{1}{2}f'(0)$.
REPRESENTE GRAFICAMENTE $f(t)$ E $m(t)$ NUM GRÁFICO SÓ.

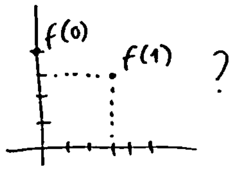
$\boxed{4}$ EM $t=0$?...

$f(0)=(a,b)$!
$f(0)=(2,3)$
$(a,b)=(2,3)$
$f(1)=(3,5)$
$f(1)=(2,3)+1\cdot\overrightarrow{(c,d)}$
$(c,d)=(1,2)$
$f(t)=(2,3)+t\overrightarrow{(1,2)}$



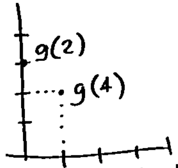
$f(1)-f(0)=$
$((\cancel{a,b})+1\cdot\overrightarrow{(c,d)})-$
$((\cancel{a,b})+\cancel{0\cdot\overrightarrow{(c,d)}})=$
$\overrightarrow{(c,d)}$

$\boxed{4b}$ E SE:



$f(t)=\underbrace{(a,b)}_{?}+t\underbrace{\overrightarrow{(c,d)}}_{?}$

$\boxed{4c}$ E SE

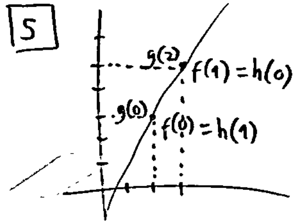


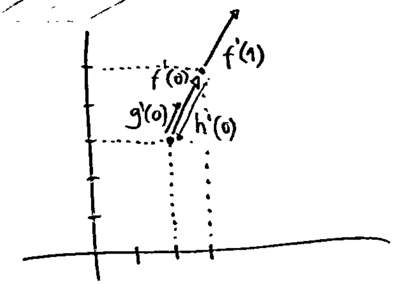
E $g(t)=(a,b)+t\overrightarrow{(c,d)}$?

DICA:
CALCULE/DESCUBRA:

$g(2)=(0,3)$
$g(4)=(1,2)$
$g(4)-g(2)=(1,-1)=\ldots=2\overrightarrow{(c,d)}$
$(c,d)=(0.5,-0.5)$
$(a,b)=(-1,4)$

$\boxed{5}$



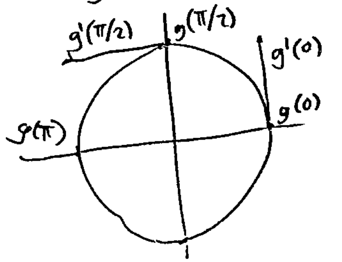


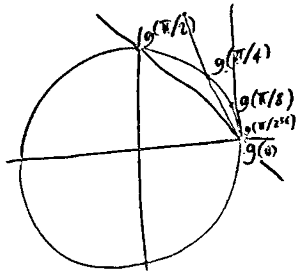
$g(0)=(2,3)$
$g(2)=(3,5)$
$h(0)=(3,5)$
$h(1)=(2,3)$
$g(t)=\underbrace{(a,b)}_{?}+t\underbrace{\overrightarrow{(c,d)}}_{?}$
$h(t)=\underbrace{(a,b)}_{?}+t\underbrace{\overrightarrow{(c,d)}}_{?}$

$\boxed{6}$ $f'(0)=$
$f'(1)=$
$g'(0)=$
$h'(0)=$

INTRODUÇÃO A RETAS SECANTES E TANGENTES

$g(t)=(\cos t, \operatorname{sen} t)$





C3 4/ABRIL/2019

Hoje: alguns truques pra visualizar a derivada de funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$...

Lembre que se $r(t) = (a,b) + t(c,d)$ e sabemos calcular $r(42)$ e $r(200)$ então é bem fácil calcular $\overrightarrow{(c,d)}$...

$r(200) = (a+200c,\ b+200d)$

$r(42) = (a+42c,\ b+42d)$

$r(200) - r(42) = \overrightarrow{(158c,\ 158d)}$

$= 158\ \overrightarrow{(c,d)}$

$= (200-42)\overrightarrow{(c,d)}$

$\overrightarrow{(c,d)} = \dfrac{r(200)-r(42)}{200-42}$

E dá pra generalizar, óbvio... isto vale "pra quaisquer valores de 200 e 42" !! !!.

Agora vamos ver como começar com uma função f qualquer, escolher dois instantes de tempo, e calcular uma reta r que coincide com f nesses dois instantes...

Exercícios

1) Seja $f(t) = (t, t^2)$.

a) Represente graficamente $f(0)$ e $f(\frac{1}{2})$ e $f(0) + \dfrac{f(\frac{1}{2}) - f(0)}{\frac{1}{2} - 0}$.

b) Idem, mas $f(\frac{1}{2}) + \dfrac{f(1) - f(\frac{1}{2})}{1 - \frac{1}{2}}$

c) Idem, mas $f(-1) + \dfrac{f(1) - f(-1)}{1-(-1)}$

d) Idem, mas $f(1) + \dfrac{f(-1) - f(1)}{(-1) - 1}$

2) Compare os desenhos anteriores com a derivada... Represente graficamente

a) $f(0) + f'(0)$,

b) $f(\frac{1}{2}) + f'(\frac{1}{2})$,

c) $f(-1) + f'(-1)$

d) $f(1) + f'(1)$.

3) Seja $g(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$.
Represente graficamente:

a) $g(0) + g'(0)$

b) $g(\frac{\pi}{2}) + g'(\frac{\pi}{2})$

c) $g(\pi) + g'(\pi)$

d) $g(0) + \dfrac{g(\frac{\pi}{2}) - g(0)}{\frac{\pi}{2} - 0}$

e) $g(0) + \dfrac{g(\frac{\pi}{4}) - g(0)}{\frac{\pi}{4} - 0}$

f) $g(0) + \dfrac{g(\frac{\pi}{8}) - g(0)}{\frac{\pi}{8} - 0}$

g) $g(\frac{\pi}{2}) + \dfrac{g(\pi) - g(\frac{\pi}{2})}{\pi - \frac{\pi}{2}}$

h) $g(\frac{\pi}{2}) + \dfrac{g(0) - g(\frac{\pi}{2})}{0 - \frac{\pi}{2}}$

4) Seja $f(t) = (t, t^2)$.
Em cada uma das situações abaixo compare $f(t_0) + f'(t_0)$ com $f(t_0) + \dfrac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}$.

a) $t_0 = 1,\ t_1 = 2.$
$t_0 = 1,\ t_1 = 1.5,$
$t_0 = 1,\ t_1 = 1.1.$

b) $t_0 = 1,\ t_1 = -1.$
$t_0 = 1,\ t_1 = 0,$
$t_0 = 1,\ t_1 = \frac{1}{2}.$
$t_0 = 1,\ t_1 = 0.9.$

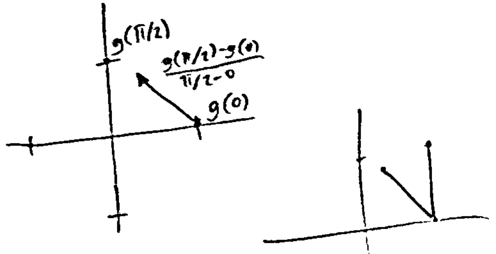
Na aula que vem nós vamos ver algumas coisas mais teóricas e estranhas e abstratas sobre derivadas de funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$, mas com o que a gente viu até agora já dá pra visualizar bastante bem algumas trajetórias mais complicadas...

5) Seja $h(t) = (\cos t, \operatorname{sen} 2t)$.

a) Represente graficamente $h(t) + h'(t)$ para os seguintes valores de t:

t	h(t)	h'(t)
0		
$\frac{1}{4}\pi$		
$\frac{2}{4}\pi$		
$\frac{3}{4}\pi$		
$\frac{4}{4}\pi$		
$5/4\ \pi$		
$6/4\ \pi$		
$7/4\ \pi$		
$8/4\ \pi$		

3d) $\underbrace{g(0)}_{(1,0)} + \underbrace{\Big(\underbrace{\underbrace{g(\tfrac{\pi}{2})}_{(0,1)} - \underbrace{g(0)}_{(1,0)}}_{\overrightarrow{(-1,1)}}\Big) \Big/ \underbrace{\Big(\underbrace{\tfrac{\pi}{2} - 0}_{\approx 1.5}\Big)}_{\approx 1.5}}_{\approx \overrightarrow{(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})}}$



C3 5/ABRIL/2019

Hoje: terminar os exercícios da aula passada (eu trouxe eles impressos) e...

⑥ A função do exercício 5 era:
$h(t) = (\cos t, \operatorname{sen} 2t)$.
Seja
$g(t) = (\cos \pi t, \operatorname{sen} 2\pi t)$.
Esta g é uma reparametrização da h do exercício anterior.
Represente graficamente esta g e a sua derivada.
Dicas: os valores "fáceis" de t são $0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \ldots$

Oops, faltou:
5b) Use os $h(t)+h'(t)$ que você descobriu no item 5a para representar graficamente a função h.

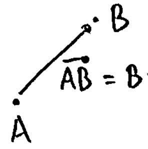
Lembre que a gente usa duas convenções diferentes para pontos e vetores...
Em GA pontos e vetores são coisas totalmente diferentes, em álgebra linear pontos e vetores são a mesma coisa.

O livro tem uns exemplos bem interessantes na seção 11.1, que usam uma "álgebra de funções" que faz mais sentido na convenção de álgebra linear. Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, então $(f+g): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

Notação $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$; compare com $P = (P_1, P_2)$ — P_1 e P_2 são as "componentes", ou "coordenadas", do ponto P.

Def: $(f+g)(t) = f(t)+g(t)$
$= (f_1(t)+g_1(t), f_2(t)+g_2(t))$.

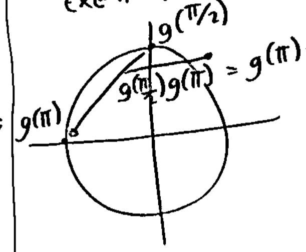
Dica:
Lembrem da notação $\overrightarrow{AB}$...



$\overrightarrow{AB} = B - A$

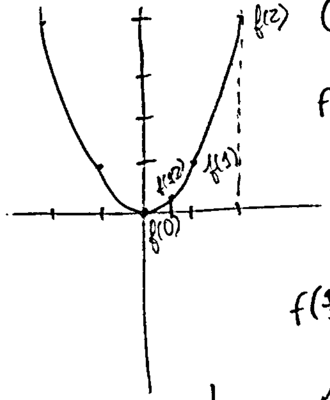
Reescrevam "$B-A$" como "$\overrightarrow{AB}$" em algumas fórmulas quando isso ficar mais claro.

Exemplo:



$\overrightarrow{g(\pi/2)g(\pi)} = g(\pi) - g(\pi/2)$

⑦ Sejam
$g(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$,
$r(t) = (t, 0)$,
$h(t) = g(t) + r(t)$.
Pra casa: tente representar graficamente a trajetória $h(t)$ usando os truques que nós vimos até agora.

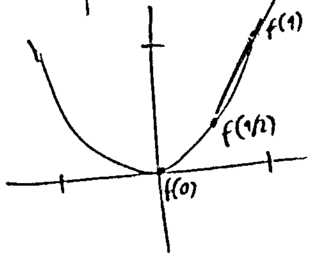


⑥ $\overrightarrow{f(\frac{1}{2})f(1)}$

$f(\frac{1}{2}) + \overrightarrow{f(\frac{1}{2})f(1)}$

$A + \underbrace{\overrightarrow{AB}}_{B-A}$

$f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}, \ldots)$



C3 11/ABRIL/2019

Na aula passada eu pedi pra vocês tentarem representar graficamente essa trajetória aqui...

Sejam $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$,
$r(t) = (t, 0)$.

Represente graficamente $g = f + r$. Obs: $(f+r)(t) = f(t) + r(t)$.

Truque: a gente vai começar calculando $g(t)$ e $g'(t)$ em alguns valores fáceis de t – os múltiplos de $\frac{\pi}{2}$. Dá pra calcular nos múltiplos de $\frac{\pi}{4}$ também, mas é um pouco mais difícil.

t	$f(t)$	$r(t)$	$g(t)$	$g'(t)$
0	$(1,0)$	$(0,0)$	$(1,0)$	$\overrightarrow{(1,1)}$
$\frac{\pi}{2}$	$(0,1)$	$(\frac{\pi}{2},0)$	$(\frac{\pi}{2},1)$	$\overrightarrow{(0,0)}$
π	$(-1,0)$	$(\pi,0)$	$(\pi-1,0)$	$\overrightarrow{(1,-1)}$
$\frac{3}{2}\pi$	$(0,-1)$	$(\frac{3}{2}\pi,0)$	$(\frac{3}{2}\pi,-1)$	$\overrightarrow{(2,0)}$
2π	$(1,0)$	$(2\pi,0)$	$(2\pi+1,0)$	$\overrightarrow{(1,1)}$

Obs: essa g vai ser uma desculpa pra gente começar a ver aproximações...

Ordem:

- $f(t+\varepsilon) \approx f(t) + \varepsilon f'(t)$ (aproximação por reta tangente)
- $f(t+\varepsilon) \approx f(t) + \varepsilon \underbrace{f'(t)}_{\text{velocidade}} + \frac{\varepsilon^2}{2} \underbrace{f''(t)}_{\text{aceleração!}}$
- diferenciais
- no final do curso (?) série de Taylor.

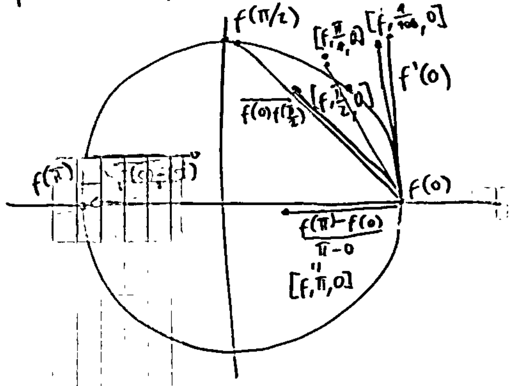
Voltando...

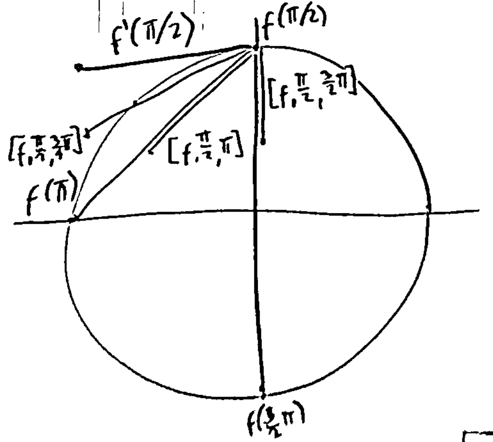
$$\underbrace{f(t_0)}_{\text{ponto}} + \underbrace{\frac{f(t_1)-f(t_0)}{t_1-t_0}}_{\text{vetor - aproximação pra } f'(t_0)}$$

Abreviação: $[f, t_1, t_0] = \dfrac{f(t_1)-f(t_0)}{t_1-t_0}$

Lembrem dos exercícios sobre o círculo...

$f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$





Introdução à fórmula

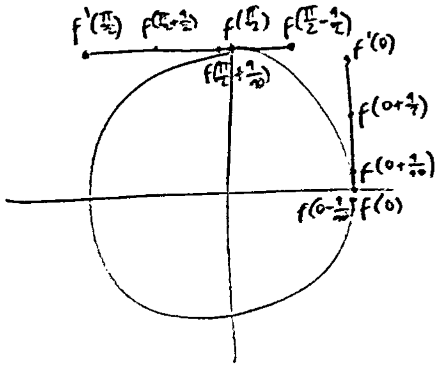
$$f(t+\varepsilon) \approx f(t) + \varepsilon f'(t) \qquad (*)$$

- Escolha t,
- escolha ε pequeno,
- use $f(t+\varepsilon)$ "=" $f(t) + \varepsilon f'(t)$ como se isso fosse óbvio.

Exercício:

Use a fórmula $(*)$ pra "calcular" – aliás, pra representar graficamente no olhômetro – os pontos:

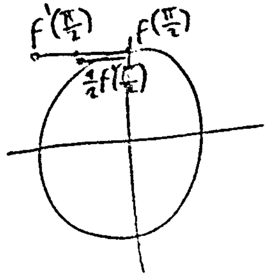
- $f(0)$, $f(\underbrace{0}_{t} + \underbrace{\tfrac{1}{10}}_{\varepsilon})$, $f(0 + \frac{1}{2})$, $f(\underbrace{0}_{t} \underbrace{- \tfrac{1}{10}}_{\varepsilon})$
- $f(\frac{\pi}{2})$, $f(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{10})$, $f(\underbrace{\tfrac{\pi}{2}}_{t} + \underbrace{\tfrac{1}{2}}_{\varepsilon})$, $f(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2})$



Exemplo:

pra calcular $f(\underbrace{\tfrac{\pi}{2}}_{t} + \underbrace{\tfrac{1}{2}}_{\varepsilon})$ fazemos:

$$f\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\right) \approx \underbrace{f\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{(0,1)} + \underbrace{\frac{1}{2} \underbrace{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{(-1,0)}}_{(-\frac{1}{2},0)}$$



C3 11/abril/2019

Na aula passada eu pedi pra vocês tentarem representar graficamente essa trajetória aqui...

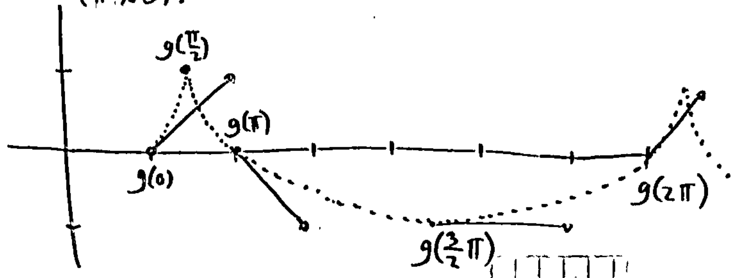
Sejam $f(t)=(\cos t, \operatorname{sen} t)$,
$r(t)=(t,0)$.

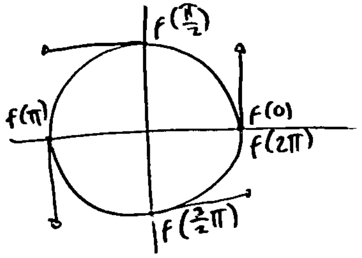
Represente graficamente $g=f+r$. Obs: $(f+r)(t) = f(t)+r(t)$.

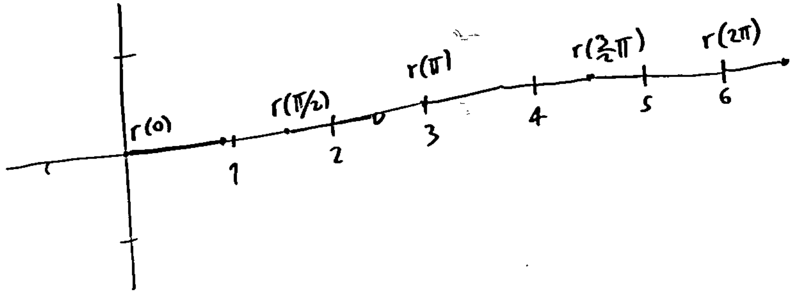
Truque: a gente vai começar calculando $g(t)$ e $g'(t)$ em alguns valores fáceis de t — os múltiplos de $\frac{\pi}{2}$. Dá pra calcular nos múltiplos de $\frac{\pi}{4}$ também, mas é um pouco mais difícil.

t	$f(t)$	$r(t)$	$g(t)$	$g'(t)$
0	$(1,0)$	$(0,0)$	$(1,0)$	$\overrightarrow{(1,1)}$
$\frac{\pi}{2}$	$(0,1)$	$(\frac{\pi}{2},0)$	$(\frac{\pi}{2},1)$	$\overrightarrow{(0,0)}$
π	$(-1,0)$	$(\pi,0)$	$(\pi-1,0)$	$\overrightarrow{(1,-1)}$
$\frac{3}{2}\pi$	$(0,-1)$	$(\frac{3}{2}\pi,0)$	$(\frac{3}{2}\pi,-1)$	$\overrightarrow{(2,0)}$
2π	$(1,0)$	$(2\pi,0)$	$(2\pi+1,0)$	$\overrightarrow{(1,1)}$

Representação gráfica da $g(t)$ $(\pi \approx 3)$:







Aceleração

Aceleração é "o quanto a velocidade muda"...

Mas: $f(t)$ = posição

$f'(t)$ = velocidade $= \frac{d}{dt} f(t)$

$f''(t)$ = aceleração $= \frac{d}{dt} f'(t)$

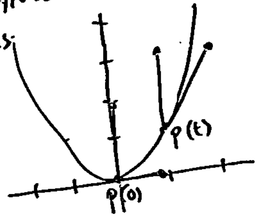
(derivada da velocidade).

Vamos começar visualizando a aceleração em algumas trajetórias simples.

$p(t) = (t, t^2)$

$p'(t) = \overrightarrow{(1, 2t)}$

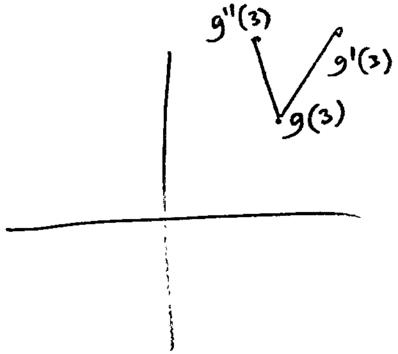
$p''(t) = \overrightarrow{(0, 2)}$



$f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$

$f'(t) = (\quad)$

$f''(t) = (\quad)$



C3 12/abril/2019

Hoje: um pouco mais sobre a primeira derivada, a segunda derivada, e aproximações...

Lembre da notação para as componentes de uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$:

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t)).$$

Repare:

$$f'(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t+\varepsilon) - f(t)}{(t+\varepsilon) - t}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(f_1(t+\varepsilon), f_2(t+\varepsilon)) - (f_1(t), f_2(t))}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(f_1(t+\varepsilon) - f_1(t),\ f_2(t+\varepsilon) - f_2(t))}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{f_1(t+\varepsilon) - f_1(t)}{\varepsilon}, \frac{f_2(t+\varepsilon) - f_2(t)}{\varepsilon} \right)$$

$$\overset{(☆)}{=} \left(\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f_1(t+\varepsilon) - f_1(t)}{\varepsilon}, \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f_2(t+\varepsilon) - f_2(t)}{\varepsilon} \right)$$

$$= (f_1'(t), f_2'(t))$$

OBS: o passo (☆) ficaria mais convincente se a gente já tivesse visto em detalhes limites de funções vetoriais... (que a gente só viu informalmente).

$$f''(t) = \frac{d}{dt} f'(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f'(t+\varepsilon) - f'(t)}{(t+\varepsilon) - t} = \ldots = (f_1''(t), f_2''(t)).$$

No fim da aula passada estávamos vendo esta aproximação:

$$f(t+\varepsilon) \approx f(t) + \varepsilon f'(t)$$

$$f'(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t+\varepsilon) - f(t)}{\varepsilon}$$

$$0 = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{f(t+\varepsilon) - f(t)}{\varepsilon} - f'(t) \right)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{f(t+\varepsilon) - f(t) - \varepsilon f'(t)}{\varepsilon} \right)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{f(t+\varepsilon) - (f(t) + \varepsilon f'(t))}{\varepsilon} \right)$$

Então:

$$\boxed{\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t+\varepsilon) - (f(t) + \varepsilon f'(t))}{\varepsilon} = 0\ !}$$

Vamos começar ~~usando~~ usando essa fórmula um pouco - e uma outra parecida com ela.

Idéia: aproximações polinomiais! Vamos ver isso em $\mathbb{R}$ primeiro e só depois voltar pra $\mathbb{R}^2$.

Se $f(t)$ é um polinômio de grau 1: $f(t) = a + bt$.

Então $f'(t) = b$, (pra qualquer t!)

$$f(t+\varepsilon) = a + b(t+\varepsilon) = a + bt + \varepsilon b = (a+bt) + \varepsilon b = f(t) + \varepsilon f'(t)$$

Quando $f(t)$ é um polinômio de grau 1 a aproximação $f(t+\varepsilon) \approx f(t) + \varepsilon f'(t)$ é exata!

$$f(t+\varepsilon) = f(t) + \varepsilon f'(t)$$

e isso vale pra qualquer ε, pequeno ou grande.

Aproximações de grau 2

Fórmula:

$$f(t+\varepsilon) \approx f(t) + \varepsilon f'(t) + \underbrace{\frac{\varepsilon^2}{2}}_{\text{porque "/2"?}} f''(t)$$

OBS: isso vai valer pra $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ também e vai nos permitir usar a aceleração pra fazer aproximações!

$p(t)$: posição
$p'(t)$: velocidade
$p''(t)$: aceleração.

Vamos fazer um exercício que é preparação pra algo bem mais geral.

1) Seja $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$.

a) Calcule
$f'(x) = b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3$
$f''(x) = 2c + 6dx + 12ex^2$
$f'''(x) = 6d + 24ex$
$f''''(x) = 24e$
$f'''''(x) = 0$

b) Calcule
$f(0) = a$
$f'(0) = b$
$f''(0) = 2c$
$f'''(0) = 6d$
$f''''(0) = 24e$
$f'''''(0) = 0$

17/ABRIL/2019

NOTAÇÃO:

$\text{derivs}(f) =$
$(f, f', f'', f''', f'''', \dots)$

$\text{derivs}_0(f) =$
$(f(0), f'(0), f''(0), f'''(0), \dots)$

$\text{derivs}_0(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4)$
$= (a, b, 2c, 6d, 24e, 0, 0, 0, \dots)$
$= (0!a, 1!b, 2!c, 3!d, 4!e, \dots)$

COMO É QUE A GENTE RECONSTRÓI A FUNÇÃO f A PARTIR DA SEQUÊNCIA $\text{derivs}_0(f)$?

(OBS: ISTO É SÉRIE DE TAYLOR!)

RESPOSTA COMPLETA:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \dots$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(0)}{k!} x^k$$

SÓ QUE HOJE A GENTE SÓ VAI USAR O INÍCIO DA SÉRIE:

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2},$$
$$f(\varepsilon) \approx f(0) + f'(0)\varepsilon + f''(0)\frac{\varepsilon^2}{2},$$
$$f(t+\varepsilon) \approx f(t) + f'(t)\varepsilon + f''(t)\frac{\varepsilon^2}{2}$$

ESSA FÓRMULA VAI VALER PRA FUNÇÕES DE $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ TAMBÉM...

NA AULA PASSADA NÓS REPRESENTAMOS GRAFICAMENTE A FUNÇÃO $g(t)$ DADA POR:

$f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$,
$r(t) = (t, 0)$,
$g(t) = f(t) + r(t)$

(2) (a) REPRESENTE GRAFICAMENTE $g(t), g'(t), g''(t)$ PARA ALGUNS VALORES FÁCEIS DE t.

(OBS: $t=0$, $t=\frac{\pi}{2}$, $t=\pi$, ...
$t=\frac{\pi}{4}$, $t=\frac{3}{4}\pi$, ...)

(b) ENCONTRE OS VALORES DE t PARA OS QUAIS ESSA TRAJETÓRIA TEM "BICOS".

(c) SEJA t_1 O PRIMEIRO DESTES VALORES.

USE A APROXIMAÇÃO
$f(t+\varepsilon) \approx f(t) + f'(t)\varepsilon + f''(t)\frac{\varepsilon^2}{2}$
PARA REPRESENTAR GRAFICAMENTE
$f(t+0.2)$, $f(t+0.5)$,
$f(t-0.2)$, $f(t-0.5)$.

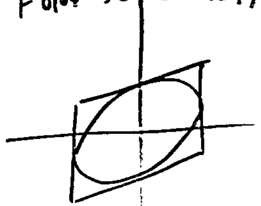
(3) SEJAM

$f(t) = (2\cos t, \cos t)$,
$g(t) = (0, \operatorname{sen} t)$
$h(t) = f(t) + g(t)$.

REPRESENTE GRAFICAMENTE A TRAJETÓRIA $h(t)$.

DICA: ELA VAI PERCORRER UMA ELIPSE...

FIGURA (TOTALMENTE FORA DE ESCALA):



C3 25/abril/2019

Hoje:

- Funções compostas,
- reparametrizações,
- aproximações por polinômios num caso um pouco mais abstrato,
- derivadas de funções compostas de várias variáveis,
- curvas de nível...

Na aula passada vimos que podemos pegar uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ e aproximá-la por uma função $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ de grau 2 tal que

$f(t_0)=g(t_0)$,

$f'(t_0)=g'(t_0)$,

$f''(t_0)=g''(t_0)$...

Exemplo:

$f(t)=(\cos t, \operatorname{sen} t)$

$f(0)=(1,0)$ $(=g(0))$

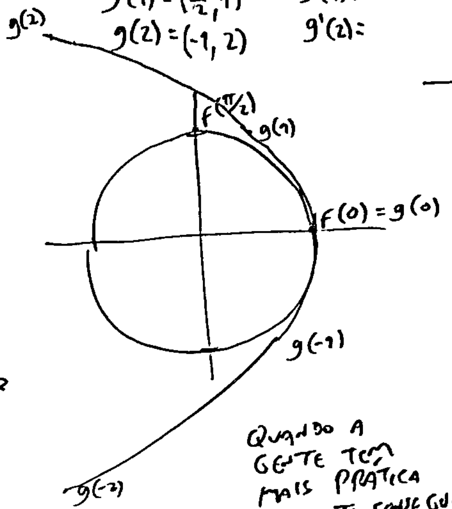
$f'(0)=\overrightarrow{(0,1)}$ $(=g'(0))$

$f''(0)=\overrightarrow{(-1,0)}$ $(=g''(0))$

$g(t)=(1,0)+t\overrightarrow{(0,1)}+\frac{t^2}{2}\overrightarrow{(-1,0)}$

Como a gente visualiza essa g?

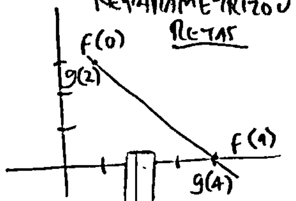
$g(-2)=(-1,-2)$	$g'(-2)=$
$g(-1)=(\frac{1}{2},-1)$	$g'(-1)=$
$g(0)=(1,0)$	$g'(0)=$
$g(1)=(\frac{1}{2},1)$	$g'(1)=$
$g(2)=(-1,2)$	$g'(2)=$



Quando a gente tem mais prática a gente consegue desenhar rapidamente parábolas desse tipo e até calcular no olhômetro $g(\frac{1}{10})$, $g(\frac{1}{100})$...

Reparametrizações

No início a gente reparametrizou retas



Obs: retas são de "grau 1", parábolas são "grau 2"...

$f(t)=(a,b)+t\overrightarrow{(c,d)}$

$=(\underbrace{a+tc}_{\text{foi de grau 1 em } t},\underbrace{b+td}_{\text{idem}})$

No caso acima,

$f(t)=(1,3)+t\overrightarrow{(3,-3)}$

$g(t)=f(-1)+t\,\frac{\overrightarrow{(3,-3)}}{2}$

Ou:

$g(0)=f(-1)=f(-1)$

$g(1)=f(-\frac{1}{2})=f(-1)+\frac{1}{2}\overrightarrow{(3,-3)}$

$g(2)=f(0)=f(-1)+1\overrightarrow{(3,-3)}$

$g(3)=f(\frac{1}{2})=f(-1)+\frac{3}{2}\overrightarrow{(3,-3)}$

$g(4)=f(1)=f(-1)+2\overrightarrow{(3,-3)}$

$g(t)=f(-1+\frac{t}{2})$

Seja $h(t)=-1+\frac{t}{2}$

(para a "reparametrização")...

$\underbrace{g(t)=f(h(t))}_{\text{função composta}}$

Exercício:

1) Esqueça temporariamente o caso concreto acima e sejam:

$f(u)=P+u\vec{v}$ (ou $(a,b)+u\overrightarrow{(c,d)}$ se você preferir)

$h(t)=\alpha+\beta t$

$g(t)=f(h(t))$

a) Digamos que $P=(2,3)$, $\vec{v}=(4,5)$, $\alpha=6$, $\beta=7$.

Calcule $g(0)$ e $g'(0)$.

$\Rightarrow$ $g(t)=((2,3)+6\overrightarrow{(4,5)})+t(7\overrightarrow{(4,5)})$

$=(2+6\cdot 4,3+6\cdot 5)+t\overrightarrow{(7\cdot 4,7\cdot 5)}$

b) Calcule $g(0)$ e $g'(0)$ no caso geral $P=(a,b)$, $\vec{v}=(c,d)$, $a,b,c,d,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ $g(t)=((a,b)+\alpha\overrightarrow{(c,d)})+t(\beta\overrightarrow{(c,d)})$

$=(a+\alpha c,b+\alpha d)+t\overrightarrow{(\beta c,\beta d)}$

c) Calcule $g(0)$ e $g'(0)$ no caso geral $P,\vec{v}\in\mathbb{R}^2$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ $g(t)=f(\underbrace{h(t)}_{u})$

$=P+\underbrace{u}_{h(t)}\vec{v}$

$=P+h(t)\vec{v}$

$=P+(\alpha+\beta t)\vec{v}$

$=P+\alpha\vec{v}+\beta t\vec{v}$

$=\underbrace{(P+\alpha\vec{v})}_{g(0)}+t\underbrace{(\beta\vec{v})}_{g'(0)}$

Pra casa: entenda esse modo de fazer as contas.

C.3 25/ABRIL/2019

HOJE:
- FUNÇÕES COMPOSTAS,
- REPARAMETRIZAÇÕES,
- APROXIMAÇÕES POR POLINÔMIOS NUM CASO UM POUCO MAIS ABSTRATO,
- DERIVADAS DE FUNÇÕES COMPOSTAS DE VÁRIAS VARIÁVEIS,
- CURVAS DE NÍVEL...

SEJAM:

$f(t) = g(h(t))$,

$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

LEMBRE DA NOTAÇÃO PARA "COMPONENTES": $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$, $g(u) = (g_1(u), g_2(u))$

ENTÃO

$g(h(t)) = (g_1(h(t)), g_2(h(t)))$,

E $\frac{d}{dt} g(h(t)) = \left(\frac{d}{dt} g_1(h(t)), \frac{d}{dt} g_2(h(t))\right)$

$= (g_1'(h(t))h'(t), g_2'(h(t))h'(t))$

(2) EXERCÍCIO:

SEJAM $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,

$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$f(t) = g(h(t))$.

DIGAMOS QUE $h(t) = a + bt + ct^2$.

CALCULE $f'(t)$. $(a, b, c \in \mathbb{R})$.

... AS MESMAS TÉCNICAS VÃO SE APLICAR A FUNÇÕES DE $\mathbb{R}^2$ EM $\mathbb{R}$!

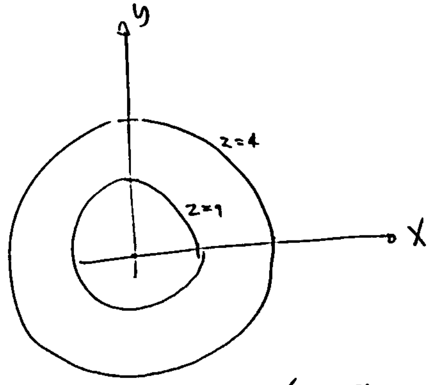
EXEMPLO:

$F(x,y) = x^2 + y^2$

OBS:

$\{(x, y, F(x,y)) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$

DÁ UM PARABOLÓIDE!

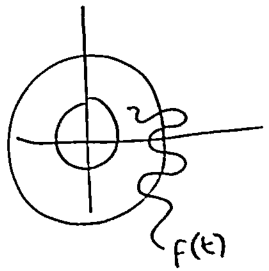


AS CURVAS DE NÍVEL DE UMA FUNÇÃO $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ SÃO AS CURVAS EM $\mathbb{R}^2$ "EM QUE F É CONSTANTE"... (x_0, y_0) E (x_1, y_1) ESTÃO NA MESMA CURVA DE NÍVEL SE E SÓ SE $F(x_0,y_0) = F(x_1,y_1)$.

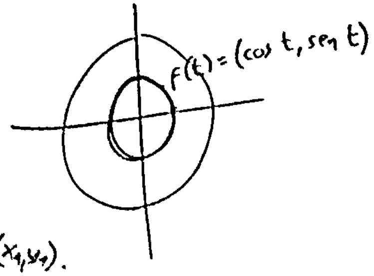
NESSE EXEMPLO AS CURVAS DE NÍVEL SÃO CÍRCULOS CENTRADOS NA ORIGEM...

SEJA $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

EXEMPLOS:



NESTE EXEMPLO, $F(f(t))$ ⇐ "A COORDENADA Z" NÃO É CONSTANTE...



NESTE EXEMPLO $F(f(t)) = 1$...

A COORDENADA Z É CONSTANTE, E A IMAGEM DA TRAJETÓRIA f ESTÁ TODA SOBRE UMA CURVA DE NÍVEL SÓ!

(3) EXERCÍCIO

SEJAM: $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$,

$F(x,y) = x^2 + y^2$.

VERIFIQUE QUE $F(f(t))$ SEMPRE DÁ 1.

C3 - 26/ABRIL/2019

NO FINAL DA AULA PASSADA NÓS VIMOS UMA FUNÇÃO

$$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto x^2+y^2,$$

AS CURVAS DE NÍVEL DELA, E A COMPOSTA DELA COM UMA FUNÇÃO $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$
$$t \mapsto (\cos t, \operatorname{sen} t)\ldots$$

REPARE: $F(g(t)) =$
$F(g_1(t), g_2(t)) =$
$F(\cos t, \operatorname{sen} t) =$
$(\cos t)^2 + (\operatorname{sen} t)^2 = 1.$

OU SEJA, A FUNÇÃO g PERCORRE UMA CURVA DE NÍVEL DA F!...

COMO É QUE A GENTE DERIVA F?

A GENTE JÁ VIU QUE $\frac{d}{dt} g(t) = \left(\frac{d}{dt} g_1(t), \frac{d}{dt} g_2(t)\right)$

PRA DERIVAR A F A GENTE VAI TER QUE APRENDER DERIVADAS PARCIAIS.

IDÉIA (INTUITIVA, GEOMÉTRICA):

$$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$\frac{\partial}{\partial x} F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$
$$\frac{\partial}{\partial y} F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

← DERIVADAS PARCIAIS.

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} F\right)(x_0, y_0) = ?$$

← PRIMEIRO ARGUMENTO

IDÉIA: "DERIVAR EM X MANTENDO y CONSTANTE"

SEGUNDO ARGUMENTO.

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} F\right)(x_0, y_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(x_0+\varepsilon, y_0) - F(x_0, y_0)}{\varepsilon}$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial y} F\right)(x_0, y_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(x_0, y_0+\varepsilon) - F(x_0, y_0)}{\varepsilon}$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial x} F\right)(99, 200) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(99+\varepsilon, 200) - F(99, 200)}{\varepsilon}$$

ESSA DEFINIÇÃO POR LIMITES NÃO É MUITO PRÁTICA PRA CALCULAR $\frac{\partial}{\partial x} F$ E $\frac{\partial}{\partial y} F$...

MAS ELA É EQUIVALENTE A OUTROS MODOS MAIS PRÁTICOS.

TRUQUE (BOM PRA QUANDO A GENTE TÁ PERDIDO):

DÁ PRA CALCULAR $\frac{\partial}{\partial x} F(x,y)$ "FINGINDO QUE O y É CONSTANTE"...

EXEMPLO:
$F(x,y) = x^3 y^4$
$F(x,42) = x^3 \cdot (42^4)$
$F(x,200) = x^3 \cdot (200^4)$

← EXPRESSÃO SEM y, QUE EU SEI DERIVAR EM X.

$\frac{d}{dx} F(x,42) = ?$ ← EXERC

$\frac{d}{dx} F(x,200) = ?$ ← EXERC

$\frac{d}{dx} F(x,y) = ?$

ISTO DEVE GENERALIZAR OS CASOS ANTERIORES!

OBS: DAQUI A POUCO A GENTE VAI VER COMO CALCULAR:

$\frac{d}{dx} F(x, e^x) = ?$ ← EXERC

$\frac{d}{dx} F(\operatorname{sen} x, e^x) = ?$ ← EXERC

$\frac{d}{dx} F(g(x), h(x)) = ?$

$$\frac{d}{dx} F(x,42) = \frac{d}{dx}(x^3 \cdot 42^4) = 3x^2 \cdot 42^4$$
$$\frac{d}{dx} F(x,200) = \frac{d}{dx}(x^3 \cdot 200^4) = 3x^2 \cdot 200^4$$
$$\frac{d}{dx} F(x,y) = \frac{d}{dx}(x^3 y^4) = 3x^2 y^4$$
$$\frac{d}{dx} F(x,e^x) = x^3 (e^x)^4 = 3x^2 (e^x)^4 + x^3 \frac{d}{dx}\left((e^x)^4\right)$$
$$= 3x^2 (e^x)^4 + x^3\left(4 (e^x)^3 \frac{d}{dx} e^x\right)$$
$$= 3x^2 (e^x)^4 + x^3\left(4 (e^x)^3 e^x\right)$$

C3 26/abril/2019

Datas das provas?...

Maio

Qui	Sex	
2	3	
~~9~~	~~10~~	← congresso
16	17	
23	24	P1
30	31	

Junho

Qui	Sex
6	7
13	14
20	21
27	28

Julho

Qui	Sex	
4	5	P2, VR
11	12	VS
~~18~~	~~19~~	← outro congresso

OBS: O livro tem uns exemplos bacanas em que ele calcula derivadas parciais por limites e não dá trabalho demais — mas não vamos ver isto em sala.

$$\frac{d}{dx} F(g(x), h(x)) =$$

$$\frac{d}{dx} \left(g(x)^3 h(x)^4\right) =$$

$$\frac{d}{dx}\left(g(x)^3\right) h(x)^4 + g(x)^3 \left(\frac{d}{dx} h(x)^4\right) =$$

$$\left(3 g(x)^2 g'(x)\right) h(x)^4 + g(x)^3 \left(4 h(x)^3 h'(x)\right)$$

Como é que a gente generaliza isso? (Dica: a gente vai chegar numa fórmula com derivadas parciais!)

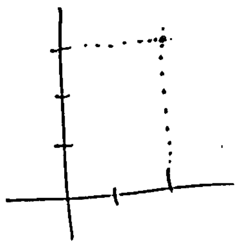
...Antes da gente ver essa fórmula é melhor a gente entender uma idéia geométrica — ou várias...

- plano tangente
- como aproximar $F(x,y)$ por algo de grau 1

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x_0,y_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(x_0+\varepsilon, y_0) - F(x_0,y_0)}{\varepsilon}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} F(x_0,y_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(x_0, y_0+\varepsilon) - F(x_0,y_0)}{\varepsilon}$$

Se $x_0 = 2$ e $y_0 = 3$,



Em $\frac{\partial}{\partial x} F$ a gente só varia o x,

em $\frac{\partial}{\partial y} F$ a gente só varia o y

Novidade:

$$F(x_0+\varepsilon, y_0+\delta) = ?$$

(ε e δ pequenos)

Lembre que a gente aprendeu a relacionar derivadas de funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ com aproximações por retas...

Agora vamos aprender aproximações por planos.

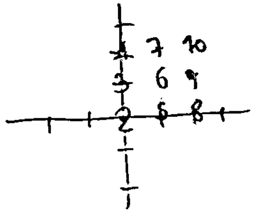
$$F(x_0+\varepsilon, y_0+\delta) = \underbrace{F(x_0,y_0)}_{a} + b\varepsilon + c\delta$$

Lembrem do truque pra visualizar funções $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — calculá-las em pontos com coordenadas inteiras...

Exemplo:

$F(x,y) = 2 + 3x + y$

$F(0,2)=4$	$F(1,2)=7$	$F(2,2)=10$
$F(0,1)=3$	$F(1,1)=6$	$F(2,1)=9$
$F(0,0)=2$	$F(1,0)=5$	$F(2,0)=8$



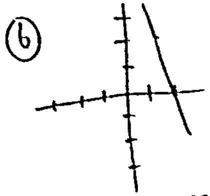
Exercício:

a) Represente nesse gráfico mais valores de $F(x,y)$

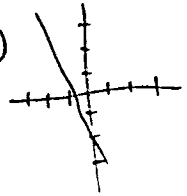
b) Represente graficamente a curva de nível do $z=8$, i.e., $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = 8\}$

c) Idem para $z=0$.

b)



c)



Pra casa: aprendam a visualizar funções do tipo $F(x,y) = a + bx + cy$!

C3 2/maio/2019

Na aula passada nós vimos, entre outras coisas:

- As derivadas parciais de uma função $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
- A derivada $\frac{d}{dt} F(g(t), h(t))$ em casos específicos
- Planos! Uma função $F(x,y)$ é um "plano" quando $F(x,y) = a + bx + cy$. (Compare com as retas parametrizadas $f(t) = (a+bt, c+dt)$, que também são "de 1º grau"...)

Hoje: aula sem limites e "ε"s, mas com um monte de coisas pra visualizar e um monte de

Exercícios!

Voltando aos exercícios da aula passada...

Exercício:

1. Para cada uma das "F"s abaixo descubra $F(x_0,y_0)$, $\frac{\partial}{\partial x} F(x_0,y_0)$, $\frac{\partial}{\partial y} F(x_0,y_0)$, e encontre — tanto calculando quanto no olhômetro — as curvas de nível $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = 0\}$ e $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = F(x_0,y_0)\}$.

a) $F(x,y) = 4 + 2x - 4y$, $(x_0,y_0) = (3,1)$

b) $F(x,y) = 6 - 2x - 3y$, $(x_0,y_0) = (0,4)$

Além disso visualizarem (ou representarem graficamente) o vetor $\left(\frac{\partial}{\partial x} F(x_0,y_0), \frac{\partial}{\partial y} F(x_0,y_0)\right)$... Qual é a relação dele com curvas de nível?

2. Agora faça uma "versão algébrica" do problema anterior.

Sejam $F(x,y) = a + bx + cy$, $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, $a,b,c \in \mathbb{R}$:

Calcule: $F(x_0,y_0)$, $\frac{\partial}{\partial x} F(x_0,y_0)$, $\frac{\partial}{\partial y} F(x_0,y_0)$, as retas $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = 0\}$ e $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = F(x_0,y_0)\}$ (parametrizadas ou por equação cartesiana),

e compare o vetor diretor destas retas com o vetor $\left(\frac{\partial}{\partial x} F(x_0,y_0), \frac{\partial}{\partial y} F(x_0,y_0)\right)$. Eles são paralelos? Eles são ortogonais?

Um jeito da gente entender retas e planos tangentes é começar pela ideia de funções que coincidem até grau 1.

Duas funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, coincidem até grau 1 em $x = 42$ quando $f(42) = g(42)$ e $f'(42) = g'(42)$.

Duas funções $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $G: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ coincidem até grau 1 em (x_0,y_0) se $F(x_0,y_0) = G(x_0,y_0)$, $\frac{\partial}{\partial x} F(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial x} G(x_0,y_0)$, $\frac{\partial}{\partial y} F(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial y} G(x_0,y_0)$.

3. Digamos que $F(x,y) = x^2 + y^3$ e que $G(x,y) = a + bx + cy$ (mas esses $a,b,c \in \mathbb{R}$ vão variar em cada exercício — isto é só um modo de dizer "G é um plano").

a) Encontre a,b,c que façam F e G coincidirem até grau 1 no ponto $(x_0,y_0) = (4,2)$.

b) Idem, mas para $(x_0,y_0) = (5,-2)$.

4. Digamos que $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja derivável e que $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$.

As funções f e g coincidem até grau 1 no ponto x_0? Esta g é uma reta? Porquê?

5. Obtenha uma fórmula parecida com a do item 4 (mas mais complicada!...) que dê um plano que coincide com uma função $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ até grau 1 no ponto (x_0,y_0).

6. Usando a fórmula que você obteve no item 5 encontre planos tangentes à função $F(x,y) = x^2 + y^2$ em:

a) (x_0,y_0) qualquer

b) $(x_0,y_0) = (1,0)$

c) $(x_0,y_0) = (2,2)$

C3 2/maio/2019

NA AULA PASSADA NÓS VIMOS, ENTRE OUTRAS COISAS:

- AS DERIVADAS PARCIAIS DE UMA FUNÇÃO $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$
- A DERIVADA $\frac{d}{dt}F(g(t),h(t))$ EM CASOS ESPECÍFICOS

SEJA $F(x,y)=(\operatorname{sen} x)(\cos y)$.

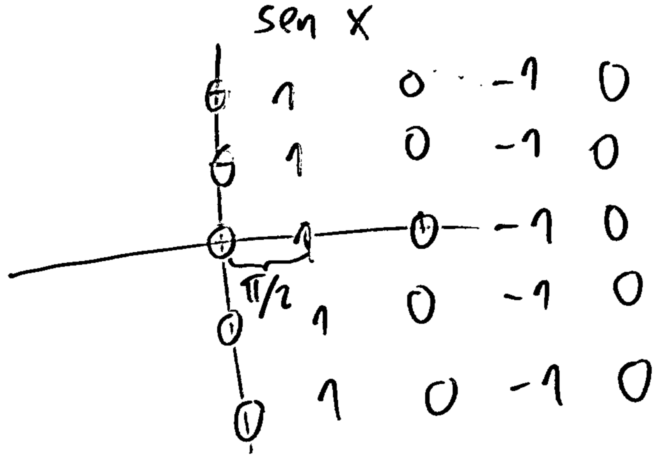
⑦ ENCONTRE UMA FÓRMULA PARA O PLANO TANGENTE A F NUM PONTO $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ (QUALQUER).

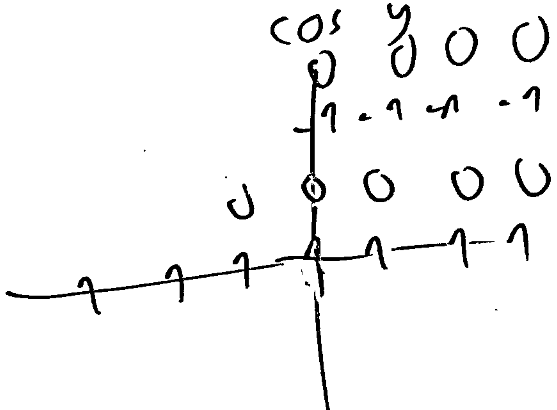
ⓐ QUAIS SÃO OS PONTOS (x_0,y_0) NOS QUAIS ESSE PLANO TANGENTE É HORIZONTAL?

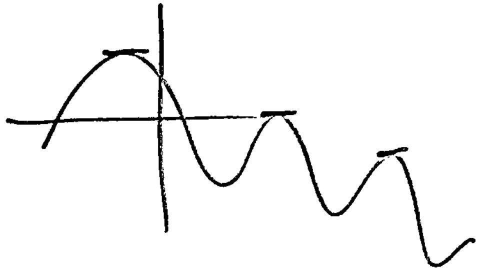
ⓑ QUAIS DESTES PONTOS SÃO MÁXIMOS DA F?

ⓒ QUAIS SÃO MÍNIMOS DA F?

x	sen x	cos
0	0	1
$\pi/2$	1	0
π	0	-1
$\frac{3}{2}\pi$	-1	0
2π	0	1







Duas ...
F: ...
G: ...
Coinc...
Grau...
Se...

③ ...

[C3 3/maio/2019]

Hoje:
A fórmula da "derivada total" $\frac{d}{dt}F(g(t),h(t))$, e uma motivação pra ela;
Máximos e mínimos em curvas parametrizadas;
E só.

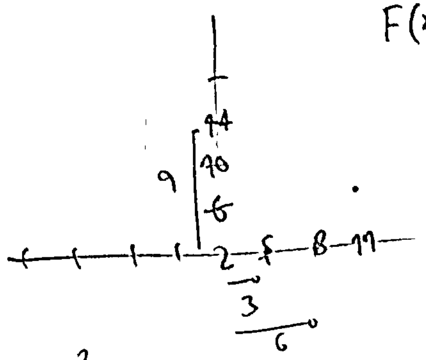
Se $F(x,y)$ é um plano, a gente viu que...

$$F(x,y)=a+bx+cy$$
$$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y)= b$$
$$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y)= c$$

Se $F(x,y)$ é um plano, então

$$F(x+\varepsilon,y+\delta)=F(x,y)+\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}F(x,y)+\delta\frac{\partial}{\partial y}F(x,y)$$

Isso é fácil de visualizar e vale tanto pra ε,δ pequenos ("infinitesimais") quanto pra ε,δ grandes...



Exemplo: $F(x,y)=2+3x+4y$

$$\begin{aligned}F(x+10,y+20) &= 2+3(x+10)+4(y+20)\\ &= 2+3x+3\cdot10+4y+4\cdot20\\ &= 2+3x+4y+3\cdot10+4\cdot20\\ &= F(x,y)+10\frac{\partial}{\partial x}F(x,y)+20\frac{\partial}{\partial y}F(x,y)\end{aligned}$$

Truque: Pegue $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ qualquer, derivável, e $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$; se $\varepsilon,\delta\in\mathbb{R}$ forem "infinitesimais" então

$$F(x_0+\varepsilon,y_0+\delta)\cong F(x_0,y_0)+\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}F(x_0,y_0)+\delta\frac{\partial}{\partial y}F(x_0,y_0)$$

2ª parte do truque:
Escolha $t_0\in\mathbb{R}$, ε pequeno.
Então $g(t_0+\varepsilon)\cong g(t_0)+\varepsilon g'(t_0)$,
$h(t_0+\varepsilon)\cong h(t_0)+\varepsilon h'(t_0)$

$$F(g(\underbrace{t_0+\varepsilon}_{t_1}),h(t_0+\varepsilon))\cong$$
$$F(g(t_0)+\varepsilon g'(t_0),\ h(t_0)+\varepsilon h'(t_0))\cong$$
$$\underbrace{F(\underbrace{g(t_0)}_{x_0},\underbrace{h(t_0)}_{y_0})}_{z_0}+\varepsilon g'(t_0)\frac{\partial}{\partial x}F(g(t_0),h(t_0))+h'(t_0)\frac{\partial}{\partial y}F(g(t_0),h(t_0))\ldots$$

Como deixar essas contas menores?
Variáveis: t,x,y,z
$x=g(t)$, $y=h(t)$, $z=F(x,y)$
$t_0 \Rightarrow x_0=g(t_0)$, $y_0=h(t_0)$, $z=F(x_0,y_0)$
$t_1 \Rightarrow \ldots$
Escolha ε, e faça $t_1=t_0+\varepsilon$...
Com essas definições/abreviações,

$$z_1\cong z_0+\varepsilon\underbrace{g'(t_0)\frac{\partial}{\partial x}F(g(t_0),h(t_0))}_{\frac{dy}{dt}(t_0)\frac{\partial}{\partial x}z}+\ldots$$
$$+\ldots$$

Pulando muitos passos, e escrevendo $F_x=\frac{\partial}{\partial x}F$, $F_y=\frac{\partial}{\partial y}F$, etc,

$$\frac{d}{dt}F(g(t),h(t))=$$
$$\frac{d}{dt}F=F_x g'(t)+F_y h'(t)$$

(1) Exercícios: em cada um dos casos abaixo defina F,g,h pra você poder usar a fórmula acima e calcule:

(a) $\frac{d}{dt}e^{2t}\cos 3t$ (Aqui: $g(t)=2t$, $h(t)=\cos 3t$, $F(x,y)=e^x\cdot y$)

(b) $\frac{d}{dt}(e^x+\operatorname{sen} y)^4$

(c) $\frac{d}{dt}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos y}$

C3 3/MAIO/2019

LEMBREM (?!?) DA NOTAÇÃO PARA SUBSTITUIÇÃO...

$$\left(f(g(x))\right)\begin{bmatrix} x:=42 \\ g(x):=e^x \\ f(u):=\sqrt{u} \end{bmatrix}$$

$$=\sqrt{e^{42}}$$

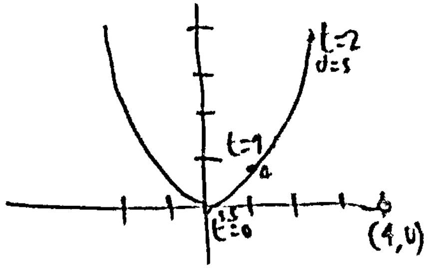
DICA:

$$\left(F(g(t),h(t))\right)\begin{bmatrix} g(t):=2t \\ h(t):=\cos 3t \\ F(x,y):=e^x\cdot y \end{bmatrix} = \quad ?$$

$$\left(F(g(t),h(t))\right)\begin{bmatrix} F(x,y):=\frac{y}{x} \\ g(t):=\cos t \\ h(t):=\sqrt{t} \end{bmatrix} = \quad ?$$

$$\left(F(g(t),h(t))\right)\begin{bmatrix} F(x,y):= \\ g(t):= \\ h(t):= \end{bmatrix} = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}$$

EXERCÍCIO (GRANDE):
QUE PONTO DESTA PARÁBOLA ESTÁ MAIS PRÓXIMO DO PONTO (4,0) ?



$$p(t)=(t,t^2)$$

$$F(x,y)=\sqrt{(x-4)^2+y^2}$$

DICA: CALCULE $\frac{d}{dt}F(p(t))$ ...

$$\left(F(\underbrace{g(t)}_{2t},\underbrace{h(t)}_{\cos 3t})\right)\begin{bmatrix} g(t):=2t \\ h(t):=\cos 3t \\ F(x,y):=e^x\cdot y \end{bmatrix}$$

$$=(e^{2t}\cdot y, e^{2t}\cdot\cos 3t)$$

$$\underbrace{\underbrace{\left(F(g(t),h(t))\right)\begin{bmatrix} g(t):=2t \\ h(t):=\cos 3t \end{bmatrix}}_{F(2t,\cos 3t)}\begin{bmatrix} F(x,y):=e^x\cdot y \end{bmatrix}}_{e^{2t}\cdot\cos 3t}$$

C3 15/maio/2019

Nos vídeos vocês viram como encontrar, por exemplo, em que direção o lago fica mais fundo mais rápido, e vocês aprenderam a calcular o gradiente e aprenderam um bocado de notação... mas tudo usando derivadas de 1ª ordem e planos tangentes.

Hoje a gente vai começar a ver (direito) derivadas de segunda ordem de uma função $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Vamos usar este exemplo:

$F(x,y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y.$

Exercícios:

ⓐ Represente graficamente $F(x,y)$ para vários valores de x e y múltiplos de $\frac{\pi}{2}$.

Notação:

$F_x = \frac{\partial}{\partial x} F$

$F_y = \frac{\partial}{\partial y} F$

Então:

$\vec{\nabla} F = (F_x, F_y)$

ⓑ Calcule o $\vec{\nabla} F$ (o gradiente de F) em cada um dos pontos do grid do item (a).

ⓒ Visualize o plano tangente à superfície $S = \{(x,y,F(x,y)) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ em cada um dos pontos do grid.

ⓓ Use $F(\frac{\pi}{2},\pi)$ e $\vec{\nabla} F(\frac{\pi}{2},\pi)$ pra calcular uma aproximação para $F(\frac{\pi}{2}+0.1, \pi+0.2)$.

Pra esta $F(x,y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$,

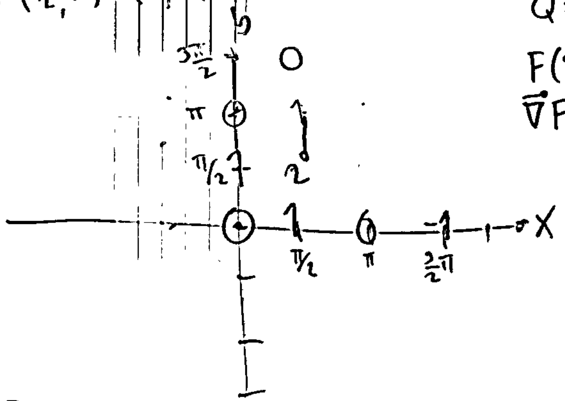
$F_x(x,y) = \cos x$

$F_y(x,y) = \cos y$

$\vec{\nabla} F = (F_x, F_y)$

$\vec{\nabla} F(x,y) = (\cos x, \cos y)$

$\vec{\nabla} F(\frac{\pi}{2},\pi) = \overrightarrow{(0,-1)}$



ⓔ Encontre alguns valores de $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ nos quais $\vec{\nabla} F(x,y) = \overrightarrow{(0,0)}$ mas que não são nem máximos locais nem mínimos locais.

Dica para a ⓓ:

Tente lembrar as notações que os vídeos usam!

No problema ⓓ,

$P = (x_0, y_0) = (\_, \_)$

$Q = (x, y) = (\_, \_)$

$F(P) =$

$\vec{\nabla} F(P) =$

} P é o ponto em que tudo é fácil de calcular

$x = x_0 + a$

$y = y_0 + b$

$\overrightarrow{PQ} =$

$F(Q) \underset{\text{aproximação}}{\cong} ????$

É difícil calcular valores exatos em Q...

Dica:

Quase tudo em Cálculo 3 vai ser baseado em aproximações de 1ª ordem (por retas e planos) e aproximações de 2ª ordem (que a gente vai começar a ver em detalhes na aula que vem).

Se você aprender a encontrar as fórmulas pra essas aproximações tudo em C3 fica bem fácil — comece a treinar isto em casa!

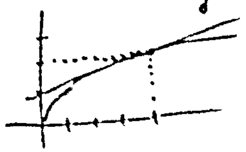
Um exemplo de Cálculo 1:

$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$

$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(4) = 2$

$f'(4) = \frac{1}{4}$



Reta tangente:

$g(x) = f(4) + (x-4) f'(4)$

$= (f(4) - 4f'(4)) + x f'(4)$

C3 17/maio/2019

No final da aula passada nós revimos uma fórmula para aproximação de primeira ordem...

Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x_0+a) \cong f(x_0) + a f'(x_0)$

$f(x) \cong f(x_0) + (x-x_0) f'(x_0)$ (2)

$= (f(x_0) - x_0 f'(x_0)) + x f'(x_0)$ (3)

As três são equivalentes. Às vezes alguma delas é mais conveniente que as outras.

Na aula passada eu pedi pra vocês encontrarem fórmulas como (1), (2), (3) para funções $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ - e que vocês experimentassem usar notações que vocês aprenderam no vídeo - em especial $\vec{\nabla} F$ -

A notação mais adequada faz as contas ficarem mais claras e mais curtas.

Hoje: Aproximações de segunda ordem!

$F_x = \frac{\partial}{\partial x} F$

$F_y = \frac{\partial}{\partial y} F$

(1) $F_{xy} = (F_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} F\right)$

Exercício: Seja $F(x,y) = x^2 y^3$.

1. Calcule:

a) $F(3,4)$
b) $F_x(x,y)$
c) $F_y(x,y)$
d) $F_{xx}(x,y)$
e) $F_{xy}(x,y)$
f) $F_{yx}(x,y)$
g) $F_{yy}(x,y)$

b') $F_x(3,4)$
c') $F_y(3,4)$
d') $F_{xx}(3,4)$
e') $F_{xy}(3,4)$
f') $F_{yx}(3,4)$
g') $F_{yy}(3,4)$

2. Encontre uma função $G: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que seja uma aproximação de 1ª ordem da F no ponto $(3,4)$.

3. Seja $H: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função suave qualquer. Encontre uma aproximação de 1ª ordem para a H no ponto $(3,4)$.

4. Seja $\vec{u} = \overrightarrow{(a,b)}$. Encontre uma aproximação de primeira ordem para:

a) $F((3,4) + t\overrightarrow{(5,6)})$
b) $H((x_0,y_0) + t\vec{u})$

O grande tema da aula de hoje é: o que a aproximação de 2ª ordem para $H((x_0,y_0) + t\vec{u})$ "enxerga"? (Quais das derivadas parciais de H importam para o resultado?)

Trabalho para casa, valendo 1.0 ponto na P1: façam os exercícios de hoje pra entregar. Ordem sugerida (do mais fácil pro mais difícil): 2, Da, 3, 4a, 4b, Db, Dc.

Dica: o problema (d) da aula passada era:

Seja $F(x,y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$. Use $F(\frac{\pi}{2}, \pi)$ e $\vec{\nabla} F(\frac{\pi}{2}, \pi)$ pra calcular uma aproximação para $F(\frac{\pi}{2} + 0.1, \pi + 0.2)$.

Nesse problema é bem fácil distinguir o ponto onde sabemos calcular tudo sem calculadora - $(x_0,y_0) = (\frac{\pi}{2}, \pi)$ - da "variação" deste ponto: $(\frac{\pi}{2}, \pi) + \overrightarrow{(0.1, 0.2)} = (\frac{\pi}{2} + 0.1, \pi + 0.2)$.

Se você estiver se enrolando nos problemas de hoje tente:

a) Encontrar uma aproximação de primeira ordem para $F((\frac{\pi}{2}, \pi) + t\overrightarrow{(1,2)})$,

b) Encontrar uma aproximação de segunda ordem para $F((\frac{\pi}{2}, \pi) + t\overrightarrow{(1,2)})$,

c) ... de 2ª ordem para $F((\frac{\pi}{2}, \pi) + t\overrightarrow{(a,b)})$.

Vou chamar isto de "exercício (D)".

Dica de como testar suas fórmulas

O exercício (d) da aula passada te pedia pra calcular $F(\frac{\pi}{2} + 0.1, \pi + 0.2)$, e implicitamente pedia pra vocês compararem o resultado disso com $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} + 0.1) + \operatorname{sen}(\pi + 0.2)$ (dá pra calcular na calculadora).

$\vec{\nabla} H = (H_x, H_y)$

C3 23/maio/2019

Como fazer a questão 3?

Idéia: ela vai ser uma versão em $\mathbb{R}^2$ disto:

$$f(x_0+a) \cong f(x_0) + a f'(x_0)$$
$$f(x) \cong f(x_0) + (x-x_0) f'(x_0)$$

x_0 é o "ponto base"

Seja $H: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função suave.
Seja (x_0,y_0) o "ponto base".

$$H((x_0,y_0)+\overrightarrow{(a,b)}) \cong H(x_0,y_0) + \vec{\nabla} H(x_0,y_0)\cdot\overrightarrow{(a,b)}$$
$$= H(x_0,y_0) + H_x(x_0,y_0)\cdot a + H_y(x_0,y_0)\cdot b$$

$H(x,y)$
$$\cong H(x_0,y_0) + \vec{\nabla} H(x_0,y_0)\cdot(x-x_0, y-y_0)$$
$$= H(x_0,y_0) + H_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + H_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

Obs: o enunciado da (3) pede $x_0=3$, $y_0=4$,

Obs 2: $x = x_0+a$, $y = y_0+b$

Uma abreviação comum: quando a gente omite os argumentos para as funções H, H_x, H_y, $\vec{\nabla} H$, etc, o default é calculá-las no ponto-base... Se está claro que o ponto-base é (x_0,y_0),

$$H(x,y) \cong H + H_x\cdot(x-x_0) + H_y\cdot(y-y_0)$$

Dica: essa abreviação vai ser bem útil quando você fizer os exercícios 5a e 5b:

5a) $\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx} f(g(x))\right)$

5b) $\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt} F(g(t),h(t))\right)$

Obs: se $F(x,y) = x^2+y^2$ então
$$S = \{(x,y,F(x,y)) \mid (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$$
$$= \{(x,y,x^2+y^2) \mid (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$$

(0, 0, 0) (0,0)
(3, 4, 25) (3,4)
(1, 2, 5) (1,2)

(Db) Encontre uma aproximação de 2ª ordem para $F((\frac{\pi}{2},\pi)+t\overrightarrow{(0.1,0.2)})$.

Obs: $F(x,y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$.

Jeito fácil:

$$g(t) = F((\tfrac{\pi}{2},\pi)+t\overrightarrow{(0.1,0.2)})$$
$$= F(\tfrac{\pi}{2}+0.1t,\ \pi+0.2t)$$
$$= \operatorname{sen}(\tfrac{\pi}{2}+\tfrac{t}{10}) + \operatorname{sen}(\pi+\tfrac{t}{5})$$

$$g'(t) = \tfrac{1}{10}\cos(\tfrac{\pi}{2}+\tfrac{t}{10}) + \tfrac{1}{5}\cos(\pi+\tfrac{t}{5})$$
$$g''(t) = \tfrac{1}{100}(-\operatorname{sen}(\tfrac{\pi}{2}+\tfrac{t}{10})) + \tfrac{1}{25}(-\operatorname{sen}(\pi+\tfrac{t}{5}))$$
$$g(0) = 1$$
$$g'(0) = -\tfrac{1}{5}$$
$$g''(0) = -\tfrac{1}{100}$$

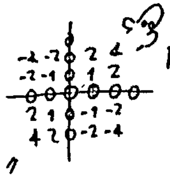
5a) $\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx} f(g(x))\right)$
$$= \frac{d}{dx}\left(f'(g(x))g'(x)\right)$$
$$= \left(\frac{d}{dx} f'(g(x))\right)g'(x) + f'(g(x))g''(x)$$
$$= (f''(g(x))g'(x))g'(x) + f'(g(x))g''(x)$$

Com a abreviação:
$$= f''g'g' + f'g''$$

5b) $\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt} F(g(t),h(t))\right)$
$$= \frac{d}{dt}\left(F_x(g(t),h(t))g'(t) + F_y(g(t),h(t))h'(t)\right)$$

Com a abreviação:
$$= \frac{d}{dt}\left(F_x g' + F_y h'\right)$$

$$F(P_0+\Delta P) \cong F(P_0) + \vec{\nabla} F(P_0)\cdot\Delta P$$
$$= F(P_0) + (F_x(P_0), F_y(P_0))\cdot\Delta P$$
$$=$$



$F(x,y) = x \cdot y$

IMPORTANTE:
SEJA $f(t) = F(g(t), h(t))$.
CALCULE $f'(t)$
e $f''(t)$.

$f'(t) = F_x g' + F_y h'$
$f''(t) =$

C3 - AULA EXTRA DE DÚVIDAS, 23/MAIO/2019

$F(x) \cong F(x_0) + F_x \Delta x + F_x' \frac{(\Delta x)^2}{2}$

$F(x,y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$

$\Rightarrow$ Visualize o plano tangente à superfície $S = \{(x, y, F(x,y)) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

$\Rightarrow$ Use $F(\frac{\pi}{2}, \pi)$ e $\vec{\nabla} F(\frac{\pi}{2}, \pi)$ para calcular uma aproximação para $F(\frac{\pi}{2} + 0{,}1, \pi + 0{,}2)$

$\Rightarrow$ Seja $F(x,y) = \operatorname{sen} x \cdot \cos y$. Encontre uma fórmula para o plano tangente a F num ponto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ (qualquer).

a) Quais os pontos (x_0, y_0) nos quais esse plano tangente é horizontal?

b) Quais destes pontos são máx da F.

c) Quais são min da F.

e) Encontre alguns valores de $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ nos quais $\vec{\nabla} F(x,y) = (0,0)$, mas que não são máximos, nem mínimos locais.

$\left(\frac{d}{dt}\right)^2 f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^2 F(g(t), h(t))$
$= \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt} F\right)$
$= \frac{d}{dt}\left(F_x g' + F_y h'\right)$
$= \left(\frac{d}{dt} F_x\right) g' + F_x g'' + \left(\frac{d}{dt} F_y\right) h' + F_y h''$

$\frac{d}{dt} F_x = F_{xx} g' + F_{xy} h'$
$\frac{d}{dt} F = F_x g' + F_y h'$

$F_{xy} = F_{yx}$

$\left[\frac{d}{dt} F = F_x g' + F_y h'\right] \left[F(x,y) := F_y(x,y)\right]$

C3 24/maio/2019

Hoje: mais sobre derivadas parciais de 2ª ordem:

A gente vai começar com um exercício grande.

Sejam $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções suaves.

Sejam $x_0, y_0, a, b, t \in \mathbb{R}$;

Convenções: $(x,y) = (x_0, y_0) + t\overrightarrow{(a,b)}$,

$f(t) = F(g(t), h(t))$.

① Calcule (de novo) $f'(t)$, $f''(t)$.

② Defs: $t = t_0 + \Delta t$, $x = g(t)$, $x_0 = g(t_0)$, $y = h(t)$, $y_0 = h(t_0)$;

Com isto $f(t) = F(x,y) = F(g(t), h(t))$.

Além disso suponha $t_0 = 0$, $g(t) = a\Delta t$, $h(t) = b\Delta t$.

Calcule $f'(t)$ e $f''(t)$ com estas suposições.

③ Agora, com todas as suposições da ②, defina $g(t) = g(t_0 + \Delta t)$ como uma aproximação de 2ª ordem pra $f(t)$ em torno de t_0:

$$g(t_0 + \Delta t) := f(t_0) + \Delta t\, f'(t_0) + \frac{(\Delta t)^2}{2} f''(t_0)$$

Encontre uma fórmula para a g.

④ Agora suponha $\Delta t = 1$ e reescreva a sua fórmula para a g.

⑤ Verifique que a fórmula que você obteve te dá uma aproximação de 2ª ordem para $F(a,b)$ em torno do ponto $(0,0)$.

① Ponto base:

$$f(\underbrace{t}_{t_0}) = F(g(\underbrace{t}_{t_0}), h(\underbrace{t}_{t_0}))$$

$$f' = F_x g' + F_y h'$$

$$f'' = \left(\tfrac{d}{dt} F_x\right) g' + F_x g'' + \left(\tfrac{d}{dt} F_y\right) h' + F_y h''$$

$$= (F_{xx} g' + F_{xy} h') g' + F_x g'' + (F_{yx} g' + F_{yy} h') h' + F_y h''$$

$$= F_{xx} g' g' + \underbrace{F_{xy} h' g' + F_x g'' + F_{yx} g' h'}_{} + F_{yy} h' h' + F_y h''$$

Depois a gente vai ver que $F_{xy} = F_{yx}$ (Teorema de Young)

② $t = t_0 + \Delta t$

$\Delta t = t - t_0$

$= t$

$g(t) = a\Delta t = at$

$h(t) = bt$

$g'(t) = a$ $\quad h'(t) = b$

$g''(t) = 0$ $\quad h''(t) = 0$

Com isso:

$$f' = F_x g' + F_y h'$$

$$= F_x a + F_y b$$

$$f'' = F_{xx} g' g' + F_{xy} h' g' + \underbrace{F_x g''}_{0} + F_{yx} g' h' + F_{yy} h' h' + \underbrace{F_y \underbrace{h''}_{0}}_{0}$$

$$= F_{xx} a^2 + F_{xy} ab + F_{yx} ab + F_{yy} bb$$

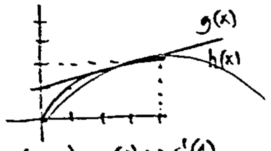
③ $$g(\underbrace{t_0}_{0} + \underbrace{\Delta t}_{t}) := f(\underbrace{t_0}_{0}) + \underbrace{\Delta t}_{t} f'(\underbrace{t_0}_{0}) + \frac{(\overbrace{\Delta t}^{t})^2}{2} f''(\underbrace{t_0}_{0})$$

$$g(t) := f(0) + t f'(0) + \frac{t^2}{2} f''(0)$$

Voltando ao exemplo da $\sqrt{\ }$ em torno de $x = 4$...

$g(4) = f(4)$

$g'(4) = f'(4)$



$f(x) = \sqrt{x}$

$f'(4) = 1/4$

$f''(x) =$

$f''(4) =$

$g(4+a) = f(4) + a f'(4)$

$h(4+a) = f(4) + a f'(4) + \frac{a^2}{2} f''(4)$

$f(x) = x^{1/2}$

$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$

$f''(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}$

$= -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}}$

$f''(4) = -\frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{64}}$

$= -\frac{1}{32}$

$\boxed{\text{C3 30/MAIO/2019}}$

(AULA DE DÚVIDAS)

$\boxed{\text{C3 30/MAIO/2019}}$

ATENDIMENTO E
DÚVIDAS

$(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$ 1ª ORDEM $f_{(x,y)} \cong f(x_0,y_0) + F_x \cdot (x-x_0) + F_y \cdot (y-y_0)$

$F_{xy} = F_{yx}$

$(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$ 2ª ORDEM $f_{(x,y)} \cong f(x_0,y_0) + F_x \cdot (x-x_0) + F_y \cdot (y-y_0) + \frac{F_{xx} \cdot (x-x_0)^2}{2} + \frac{F_{yy} \cdot (y-y_0)^2}{2} + \cancel{1/2}\, F_{xy} \cdot (x-x_0)(y-y_0)$

$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} F$

$$F(\overbrace{x_0+\varepsilon}^{x}, \overbrace{y_0+\delta}^{y}) = F(x_0,y_0) + \varepsilon \frac{\partial F}{\partial x} + \delta \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{1}{2!}\left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 F}{\partial^2 x} + 2\varepsilon\delta \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} + \delta^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y}\right)$$

$x = x_0 + \varepsilon$

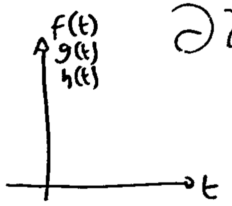
$\varepsilon = x - x_0$

$y_0 + \delta = y$

$\delta = y - y_0$

$f(t) = F\left(\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) + t(0.1, 0.2)\right)$

$= sen\left(\frac{\pi}{2} + 0.1t\right) + sen(\pi + 0.2t)$



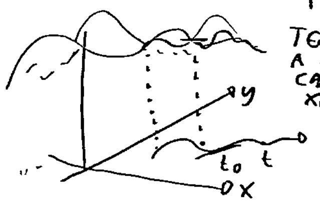
$f(t) = -\frac{t^2}{2} - t + 1$

$f(0)$
$f'(0)$
$f''(0)$

$\cancel{d} f(t)$

2ª ORDEM $h(t) = f(0) + f'(0)t + f''(0) \cdot \frac{t^2}{2}$

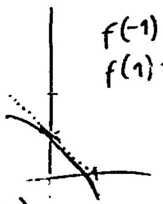
1ª ORDEM $g(t) = f(0) + f'(0)t$



$f(0) = 1$
$f'(0) = -1$

TENDO t_0
A GENTE
CALCULA
x_0 E y_0

t
$z_0 = F(x_0,y_0)$
$z = F(x,y)$



$f(-1) = -\frac{1}{2} + 1 + 1$
$f(1) = -\frac{1}{2} \cancel{-1} \cancel{+1}$

C3 6/jun/2019

Hoje: Introdução a abertos, fechados e continuidade em $\mathbb{R}^n$...

$\boxed{\text{E quando é que as nossas aproximações funcionam bem}}$

O livro do Humberto José Bortolossi, Cálculo Diferencial a Várias Variáveis, tem uma seção muito boa sobre isto – a seção 4.

Hoje a gente vai fazer principalmente um montão de exercícios pra preparar todo mundo pra ler essa seção.

Uma das definições de aberto em $\mathbb{R}$ é a seguinte: (☆)

$U \subset \mathbb{R}$ é aberto se e só se

$\forall x \in U.$
$\exists \varepsilon > 0.$
$B_\varepsilon(x) \subset U.$

$\boxed{B_\varepsilon(x) \text{ é a "bola de raio } \varepsilon \text{ centrada em } x\text{"}}$

Defs: (ou $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots$)

$B_\varepsilon(A) = \{P \in \mathbb{R} \mid d(P,A) < \varepsilon\}$ ← Bola aberta

$\overline{B}_\varepsilon(A) = \{P \in \mathbb{R} \mid d(P,A) \leq \varepsilon\}$ ← Bola fechada

Em $\mathbb{R}$ essas "bolas" são intervalos!

$B_{0.1}(5) = (4.9, 5.1)$

$\overline{B}_{0.1}(5) = [4.9, 5.1]$

Como usar a definição (☆) pra ver que alguns conjuntos não são abertos?

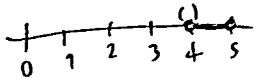
Exemplos:

a) $C = [4,5]$ (obs: $4 \in C$)

Se $x = 4$ então $\nexists \varepsilon > 0$ com $B_\varepsilon(x) \subset C$

Porquê?

Visualmente:



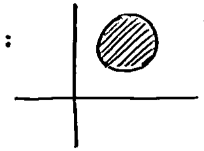
$B_{0.1}(4) = (3.9, 4.1) \not\subset C$

$\boxed{\text{Porquê? Casa!}}$

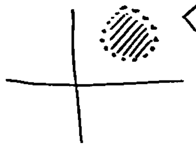
Hoje:

Preparação pra entender e visualizar essas coisas todas! Exercícios de desenhar subconjuntos de $\mathbb{R}^2$!

Dica:



← Tudo dentro da bola incluindo a fronteira



← Tudo dentro da bola excluindo a fronteira

Exercícios:

1) Representem graficamente:

a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 < y \leq 3\}$

b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 < y \leq 3 \text{ e } 1 \leq x < 4\}$

c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x,y),(1,2)) \leq 2\}$

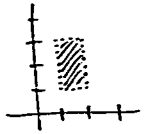
d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < d((x,y),(1,2)) \leq 2\}$

e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x,y),(1,2)) \leq 2 \text{ e } x > 0\}$

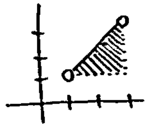
f) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x\}$

2) Encontre alguma representação em notação de conjunto para os conjuntos abaixo:

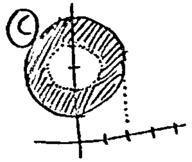
a)



b)



c)



3) Pra este exercício você vai ter que ser capaz de visualizar bolas sobre desenhos que você já fez sem desenhar estas bolas.

Diga se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa.

a) $B_{0.1}((0,2.5)) \subset \boxed{1a}$

b) $B_{0.5}((0,2.5)) \subset \boxed{1a}$

c) $\overline{B}_{0.5}((0,2.5)) \subset \boxed{1a}$

d) $B_{0.1}((1,3)) \subset \boxed{1b}$

e) $B_{0.1}((2.5,2.5)) \subset \boxed{1b}$

f) $B_1((2,2)) \subset \boxed{1c}$

g) $\overline{B}_1((2,2)) \subset \boxed{1c}$

h) $B_{0.5}((1,0.5)) \subset \boxed{1d}$

i) $B_{0.1}((0.5,2)) \subset \boxed{1e}$

j) $B_{0.001}((1.1,1.01)) \subset \boxed{2b}$

C3 7/JUN/2019

HOJE: ABERTOS, FECHADOS, TEOREMA DE WEIERSTRASS EM $\mathbb{R}^2$...

UM <u>PONTO INTERIOR</u> DE UM CONJUNTO $A \subseteq \mathbb{R}^2$ É UM PONTO (x,y) PARA O QUAL EXISTE <u>ALGUM</u> $\varepsilon > 0$ PARA O QUAL $B_\varepsilon((x,y)) \subset A$.

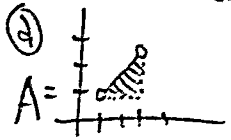
UM <u>PONTO DE FRONTEIRA</u> DO CONJUNTO $A \subseteq \mathbb{R}^2$ É UM PONTO $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ QUE OBEDECE O SEGUINTE:

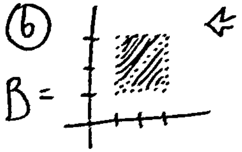
$\forall \varepsilon > 0.\ (B_\varepsilon((x,y)) \cap A \neq \emptyset$

E $B_\varepsilon((x,y)) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus A) \neq \emptyset)$.

EXERCÍCIO:

1 ENCONTRE OS PONTOS INTERIORES E OS PONTOS DE FRONTEIRA DOS SEGUINTES CONJUNTOS:

a $A=$ 

b $B=$  ← O QUADRADO SEM A DIAGONAL.

NOTAÇÃO:

$\mathrm{Int}(A) = \{(x,y) \in A \mid (x,y)$ É UM PONTO INTERIOR DE $A\}$

$\mathrm{Fr}(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y)$ É UM PONTO DE FRONTEIRA DE $A\}$

2 REPRESENTE GRAFICAMENTE:

a $\mathrm{Int}(A)$

b $\mathrm{Fr}(A)$

c $\mathrm{Int}(B)$

d $\mathrm{Fr}(B)$

MAIS UMA DEFINIÇÃO:

O <u>FECHO</u> DE UM CONJUNTO A É O CONJUNTO DOS PONTOS $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ QUE OBEDECEM ESTA CONDIÇÃO:

$\forall \varepsilon > 0.\ B_\varepsilon((x,y)) \cap A \neq \emptyset$.

NOTAÇÃO: ESCREVEMOS $\bar{A}$ PARA O FECHO DE A.

3 REPRESENTE GRAFICAMENTE:

a $\bar{A}$,

b $\bar{B}$.

PRA CASA:

XEROQUEM E LEIAM TODA A SEÇÃO 4 DO BORTOLOSSI

EXERCÍCIO PRA CASA (COM DICAS):

$B_{0.1}(2)$ ← É UMA "BOLA" EM $\mathbb{R}$

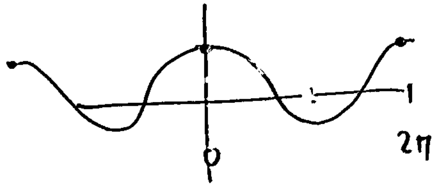
$\subset \mathbb{R}$

$B_{0.1}((2,3)) \subset \mathbb{R}^2$

SE $f: A \to B$, ENTÃO $f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}$.

SE $f(x) = \cos x$

ENTÃO $f^{-1}(1) = \{\ldots, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, \ldots\}$



ALÉM DISSO:

SE $C \subset B$,

$f^{-1}(C) = \{a \in A \mid f(a) \in C\}$.

PRA CASA:

SEJA $F(x,y) = x^2 + y^2$.

REPRESENTE GRAFICAMENTE:

a $F^{-1}(1)$,

b $F^{-1}(0.5, 1.5)$

c $F^{-1}(B_{0.1}(1))$.

C3 13/Junho/2019

O livro começa falando de continuidade POR sequências...

Se $D \subset \mathbb{R}^2$,
$p \in D$,
$f: D \to \mathbb{R}$

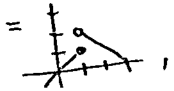
então f é contínua em p se e só se toda sequência $q_1, q_2, q_3, \ldots \to p$ "vai numa sequência cujo limite é $f(p)$"...

E o livro dá alguns exemplos de funções descontínuas.

Um outro modo, equivalente a esse, de definir continuidade usa "bolas" e função inversa - nós começamos a ver isto no fim da aula passada.

Se a gente souber visualizar $f^{-1}(B_\delta(f(p)))$ esse segundo modo fica bem fácil de entender.

Em funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$...

Sejam $g(x) = x^2$,
$h(x) =$ 

isto é: $h(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 1, \\ 3-x & \text{se } 1 < x. \end{cases}$

Obs: $g(x)$ é contínua, $h(x)$ é descontínua (em $x=1$)

Exercício: Represente graficamente $f^{-1}(B_\delta(f(p)))$ nos casos:

(a) $f=g$, $p=1$, $\delta=0.5$
(b) $f=g$, $p=1$, $\delta=2$
(c) $f=h$, $p=1$, $\delta=2$
(d) $f=h$, $p=1$, $\delta=0.5$

Obs: f^{-1} não é uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ ou de $D \subset \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$!

Exemplos: $g^{-1}(4) = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 4\}$
$= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 4\}$
$= \{-2, 2\}$

$g^{-1}([0,4]) = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \in [0,4]\}$
$= [-2, 2]$.

E lembrem que $B_\delta(p)$ é a bola aberta de raio δ:
$B_{0.1}(4) = (3.9, 4.1)$

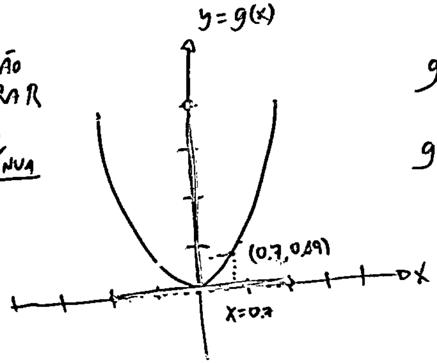
Algumas definições usando bolas

Obs: elas vão ser equivalentes às definições usando sequências!

Se $p \in D \subset \mathbb{R}^n$
e $f: D \to \mathbb{R}$
então f é contínua em p se e só se $\forall \varepsilon > 0.\ \exists \delta > 0.\ B_\delta(p) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(p)))$. (☆)

Exercício muito importante

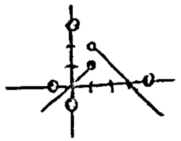
Use a definição (☆) pra mostrar que a função h é descontínua em $p=1$.

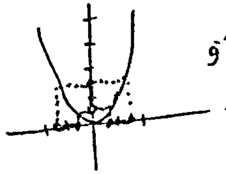


$g^{-1}([0,4]) = ?$

$g(x) \in [0,4]$

$[-2,2]$





$g^{-1}([0.5, 1.5])$

$\{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \in [0.5, 1.5]\}$

C3 27/Jun/2019

Hoje: Revisão do cap. 5 do Bortolossi e algumas coisas novas!

Nós vimos:

- Bolas abertas: $B_\varepsilon(P)$, $B_\varepsilon((x,y))$
- Bolas fechadas: $\overline{B_\varepsilon}(P)$
- Pontos interiores
- Pontos de fronteira
- Interior de um conjunto: $Int(A)$
- Fronteira de um conjunto: $Fr(A)$
- Fecho de um conjunto: $\overline{A}$
- Imagem de um conjunto por uma função: $F(A)$
- Imagem inversa de pontos e de conjuntos: $F^{-1}(b)$, $F^{-1}(B)$

E nós começamos a ver as duas definições (equivalentes!) de continuidade...

Digamos que $F: A \to B$.

(Você pode pensar que $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e $B \subseteq \mathbb{R}$, mas a definição é mais geral).

(I) F é contínua no ponto $a \in A$ quando ela leva toda sequência que converge para a numa sequência que converge para $F(a)$.

Formalmente: se $a_1, a_2, a_3, \ldots$ é uma sequência de pontos de A com $\lim_{i\to\infty} a_i = a$ então $\lim_{i\to\infty} F(a_i) = F(a)$.

(II) F é contínua no ponto $a \in A$ se e só se

(a) Para toda bola $B_\varepsilon(F(a))$ existe alguma bola $B_\delta(a)$ com $F(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(F(a))$

Isto é equivalente a:

(b) $\forall \varepsilon > 0.\ \exists \delta > 0.\ B_\delta(a) \subset F^{-1}(B_\varepsilon(F(a)))$.

A nossa primeira desculpa pra querer entender tudo isso é o Teorema de Weierstrass — que precisa de algumas definições a mais...

Faltou!

(c) $\forall \varepsilon > 0$ o conjunto $F^{-1}(B_\varepsilon(F(a)))$ contém alguma bola aberta centrada em a.

Teorema de Weierstrass

Se $F: A \to B$ é contínua e A é compacto ← novidade!

Então $F(A)$ é um compacto.

Uma consequência disso é:

Se $F: A \to \mathbb{R}$ é contínua e A é compacto então F é limitada, tem mínimo global e máximo global.

Definições que faltavam:

- Um conjunto A é fechado se $A = \overline{A}$.
- Um conjunto A é aberto se $A = Int(A)$.
- Um conjunto A é limitado se $\exists R \in \mathbb{R}$ (finito!) com $A \subset B_R(0)$.
- Um conjunto A é compacto se ele é fechado e limitado.

Obs: essas definições valem pra $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots$ e pra uns espaços mais gerais que não interessam agora.

(1) Exercício

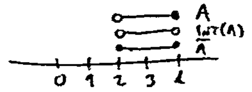
Para cada um dos conjuntos abaixo diga se ele é fechado (ou não), aberto (ou não), limitado (ou não), compacto (ou não).

(a) $A = [2,4]$
(b) $A = (2,4)$
(c) $A = (2,4]$
(d) $A = \mathbb{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}$
(e) $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots\}$
(f) $A = \mathbb{R}$
(g) $A = \emptyset$
(h) $A = (0, +\infty)$
(i) $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(2) Sejam $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $B = \mathbb{R}$, $f: A \to B$, $x \mapsto \frac{1}{x}$.

(a) f é contínua no ponto 4?
(b) O limite $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe?
(c) f é contínua?
(d) Calcule $f(A)$.
(e) A é compacto?
(f) $f(A)$ é compacto?
(g) f é limitada?
(h) f tem máximo global?

(c) $A = (2,4]$



$x \in Int(A)$ se e só se $\exists \varepsilon > 0.\ B_\varepsilon(x) \subset A$

$x \in \overline{A}$ se e só se $\forall \varepsilon > 0.\ B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$

C3 28/JUN/2019

HOJE:

- EU TROUXE CÓPIAS DO QUADRO DA AULA PASSADA... FAÇAM OS EXERCÍCIOS QUE VOCÊS AINDA NÃO TINHAM FEITO!
- SEJA $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ESTA FUNÇÃO:

$f =$  $f(x) = x$

SEJA $a = 1$.

(a) VISUALIZE $f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$ PARA VÁRIOS VALORES DE ε.

TRABALHO PRA CASA VALENDO PONTOS EXTRAS NA P2:

(1) EXERCÍCIO 14 DA P. 153. TODOS OS ITENS - E ENTREGUEM UMA REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE CADA UM DOS DOMÍNIOS (O CONJUNTO DOS PONTOS QUE OBEDECEM A RESTRIÇÃO).

VALE 0,5 PTS NO TOTAL

(2) EXERCÍCIO 19 DA P.156. SÓ O ITEM a! JUSTIFIQUE A SUA RESPOSTA! DICA: ESCOLHA SEQUÊNCIAS (NO PLURAL) $(x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3), \ldots \to (0,0)$ (TENDENDO A ZERO). LEMBRE QUE VOCÊ PODE USAR DESENHOS E PORTUGUÊS.

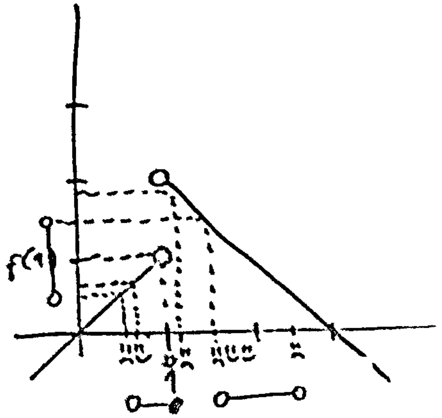
TAMBÉM VALE 0.5

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \le 1 \\ 3 - x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$\underbrace{f^{-1}(\underbrace{B_1(\underbrace{f(1)}_{1})}_{(0,2)})}_{?\, = (0,3)}$$

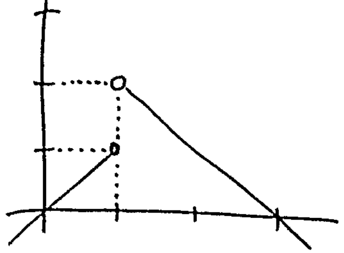
$$f^{-1}((0,2)) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in (0,2)\}$$

$$\underbrace{f^{-1}(\underbrace{B_{0.5}(\underbrace{f(1)}_{1})}_{(0.5,\, 1.5)})}_{(0.5,1] \cup (1.5,\, 2.5)}$$

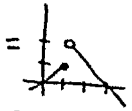


C3 3/JULHO/2019

DÚVIDAS



$F^{-1}(B_\varepsilon(F(a)))$

SEJA $g =$  $g(x) = \begin{cases} x & \text{PARA } x \leq 1 \\ 3-x & \text{PARA } 1 < x \end{cases}$

MOSTRE QUE $\lim_{x \to 1} g(x)$ NÃO EXISTE.

OU:

ENCONTRE DUAS SEQUÊNCIAS, $a_1, a_2, a_3, \ldots \to 1$ E $b_1, b_2, b_3, \ldots \to 1$

COM $\lim_{i \to \infty} f(a_i) \neq \lim_{i \to \infty} f(b_i)$.

2) $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $B = \mathbb{R}$, $f: A \to B$ $x \to \frac{1}{x}$

$f: A \to B$

$x \mapsto \frac{1}{x}$

a) f É CONTÍNUA NO PONTO 4?

b) O $\lim_{x \to 0} f(x)$ EXISTE?

c) f É CONTÍNUA?

D) CALCULE $f(A)$.

E) A É COMPACTO?

F) $f(A)$ É COMPACTO?

G) f É LIMITADA?

H) f TEM MAX GLOBAL?

ESCREVA UMA SEQUÊNCIA INFINITA (QUALQUER):

0.9, 0.91, 0.92, 0.93, ...

1, 2, 3, 4 ...

13, 14, 15, ...

1, 3, 5, 7, ...

2, 4, 6 ...

... 1.00001, 1.0001, 1.001

0.9, 0.99, 0.999, 0.9999...

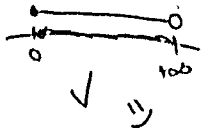
0.8, 0.81, 0.82, ...

10, 20, 30, ...

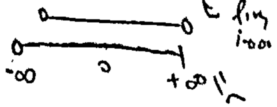
1000, 2000, 3000, ...

$\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

$A = [0, +\infty)$



$B = (-\infty, +\infty)$



Seja $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$

$(-0{,}01, -0{,}001, -0{,}0001, \ldots)$

$(b_1, b_2, b_3, \ldots)$.

$(0{,}1, 0{,}01, 0{,}001, \ldots)$

$(f(a_1), f(a_2), f(a_3), \ldots) = (-100, -1000, -10000, \ldots)$ $\lim_{i \to 0} = -\infty$

$\lim_{i \to 0} g(a_i) = -\infty$

ANALOGAMENTE:

$\lim_{i \to 0} g(b_i) = +\infty$

SEJA $(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (0.9, 0.99, 0.999, \ldots)$.

SEJA $(b_1, b_2, b_3, \ldots) = (1.1, 1.01, 1.001, \ldots)$.

ENTÃO $(g(a_1), g(a_2), g(a_3), \ldots) = (0.9, 0.99, 0.999, \ldots)$

E $(g(b_1), g(b_2), g(b_3), \ldots) = (1.9, 1.99, 1.999, \ldots)$

E $\lim_{i \to \infty} g(a_i) = 1$

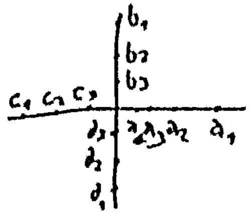
E $\lim_{i \to \infty} g(b_i) = 2$

Pelo Lucas, temos que como a função é $f(x) = \frac{1}{x}$, quanto menor o denominador, maior o resultado, assim, tende ao infinito.

C3 3/JULHO/2017

DÚVIDAS

SEQUÊNCIAS DE PONTOS EM $\mathbb{R}^2$:



$(a_1, a_2, a_3, \dots) \to (0,0)$

$(a_1, a_2, a_3, \dots) = ((\frac{1}{n},0),(\frac{1}{n+1},0),(\frac{1}{n+2},0),\dots)$ para $n>0$.

$((\frac{1}{1},0),(\frac{1}{2},0),(\frac{1}{3},0),\dots)$

$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots) = ((\frac{1}{1},0),(\frac{1}{2},0),(\frac{1}{3},0),\dots,(\frac{1}{n},0),\dots)$

$(b_1, b_2, b_3 \dots, b_n, \dots) = ((0,\frac{1}{1}),(0,\frac{1}{2}),(0,\frac{1}{3}),\dots,(0,\frac{1}{n}),\dots)$

$(c_1, c_2, c_3 \dots, c_n, \dots) = ((-\frac{1}{1},0),(-\frac{1}{2},0),(-\frac{1}{3},0))$

$(D_1, D_2, D_3, \dots, D_n) = ((0,-\frac{1}{1}),(0,-\frac{1}{2}),(0,-\frac{1}{3}),\dots,(0,-\frac{1}{n}),\dots)$

Seja $F(x,y) = \frac{x^2y+y^3}{x^2+y^2} = \frac{y(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \overset{?}{=} y$

$a_1 = (\frac{1}{1},0)$

$a_n = (\frac{1}{n},0)$

$F(a_n) = F(\frac{1}{n},0) = \frac{(\frac{1}{n})^2 \cdot 0 + 0^3}{(\frac{1}{n})^2 + 0^2} = \frac{0}{\frac{1}{n^2}} = 0 \cdot n^2 = 0$

$F(b_n) = F(0,\frac{1}{n}) = \frac{0^2 \cdot (\frac{1}{n}) + (\frac{1}{n})^3}{0^2 + (\frac{1}{n})^2} = \frac{1}{n} = 0$

$\lim_{n\to\infty} F(a_n) = 0$

$\lim_{n\to\infty} F(b_n) = 0$

14) c) $f(x,y) = x \cdot y$

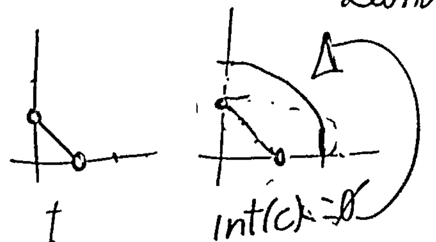
$x \geq 0, y \geq 0$ e

$x + y = 1$

$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x+y=1\} =$

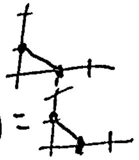
$\bar{C} = C$

$\text{Int}(C) = ?$



$C =$

$\text{FR}(C) =$



$\text{Int}(C) = \emptyset$

Pelo teorema W. temos que o conjunto C é compacto e $f(x,y)$ é contínua no conjunto C. Dessa forma, existe um máximo e mínimo global.

C3 3/JULHO/2019

DÚVIDA:

SEQUÊ
DE P

R^3

g $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$

$x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$ e

$x + y + z \leq 1$

$x+y+z=1$

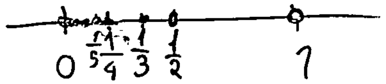
$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=1\}$

D É UM PLANO

$(1,0,0) \in D$

$(0,1,0) \in D$

$(0,0,1) \in D$



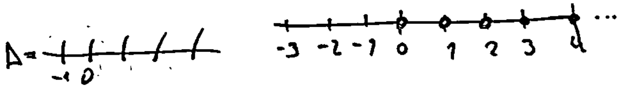
$\bar{A} = A \cup \{0\}$

$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z < 1\}$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2 \ldots\}$

$A = \{1, \frac{3}{2}, 2, \ldots\}$

A: $[0,1]$



FR = 0

$f(x,y) = x^2 + y^2$

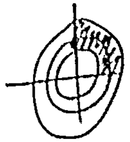
$f^{-1}(B_{0.5}(1))$

$f^{-1}(1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$

$f^{-1}([0.5, 1.5])$

$f^{-1}(0.5)$

$f^{-1}(1.5)$



$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 1 \\ 3-x & \text{se } 1 < x \end{cases}$

$f^{-1}(B_{0.5}(1))$

$f^{-1}((0.5, 1.5))$