CÁLCULO 2
20/MAR/2019

HOJE: INTRODUÇÃO AO CURSO!

TEMAS:

- INTEGRAÇÃO (QUE TEM ALGO A VER COM:
  - CALCULAR ÁREAS SOB CURVAS, E
  - "ANTI-DERIVAÇÃO")
- EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

PÁGINA DO CURSO:

http://angg.twu.net/2019.1-C2.html

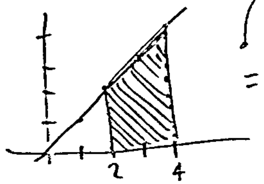
OU PROCURE POR "EDUARDO OCHS" NO GOOGLE, VÁ PRA QUALQUER SUBPÁGINA DO http://angg.twu.net/ E CLIQUE EM "C2" NA BARRA DE NAVEGAÇÃO À ESQUERDA.

SABEMOS CALCULAR "ÁREAS SOB CURVAS" DE ALGUMAS CURVAS SIMPLES...

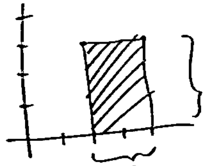
$f(x) = x$

$\int_{x=2}^{x=4} f(x)\,dx$ ← ÁREA SOB A CURVA DA FUNÇÃO $f(x)$ ENTRE $x=2$ E $x=4$

ESTAS DUAS FIGURAS TÊM A MESMA ÁREA.



=



ALTURA: 3

BASE: $4-2=2$

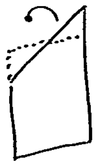
ÁREA: $2\cdot 3 = 6$

OU: $(4-2)\cdot 3$

ALTURA

EXTR. DIREITA DA BASE

EXTR. ESQUERDA DA BASE



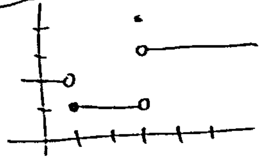
TRUQUE: SE NÓS ESCREVERMOS NOSSOS RETÂNGULOS COMO $(4-2)\cdot 3$ (OBS: $(x_1 - x_0)\cdot y$)

... FICA FÁCIL VISUALIZAR AS NOSSAS CONTAS!

IMPORTANTE: EM CÁLCULO 2 A GENTE VAI USAR MUITO FUNÇÕES DEFINIDAS POR CASOS, QUE VOCÊS USAVAM POUCO EM CÁLCULO 1...

EXEMPLO:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x<1 \\ 1 & \text{se } 1\le x<3 \\ 4 & \text{se } x=3 \\ 3 & \text{se } 3<x \end{cases} =$$



EXERCÍCIOS:

CONVERTA AS FUNÇÕES ABAIXO ENTRE AS DUAS REPRESENTAÇÕES - A DEFINIÇÃO FORMAL POR CASOS E A REPRESENTAÇÃO GRÁFICA.

PAUSA PRA HISTORINHA

MEU CURSO DE C2 NA GRADUAÇÃO...

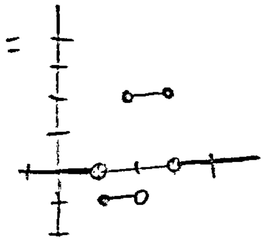
NOSSO CURSO VAI SER O MENOS ABSTRATO POSSÍVEL, I.E.:

- VAMOS SABER TESTAR TUDO
- VAMOS USAR MUITO O "CHUTAR E TESTAR" CASOS SIMPLES ("ARQUETÍPICOS") VISUALIZAÇÕES, EXRCS EM GRUPO

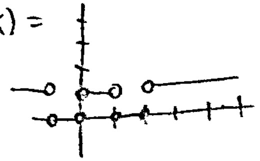
$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x<2 \\ 3 & \text{se } x=2 \\ x & \text{se } 2<x \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x<1 \\ 2 & \text{se } 1\le x\le 2 \\ 0 & \text{se } 2<x \end{cases}$$

$f_3(x) =$



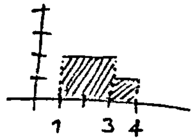
$f_4(x) =$



CÁLCULO 2
20/MAR/2019

MAIS EXERCÍCIOS!!!
REPRESENTE AS SOMAS ABAIXO GRAFICAMENTE. EXEMPLO:

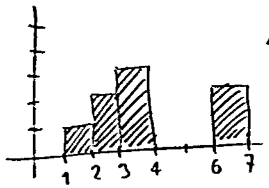
$(3-1)\cdot 2 + (4-3)\cdot 1$

= 

$= f_5(x)$

(OBS: $f_5(1)$ É INDEFINIDA!)

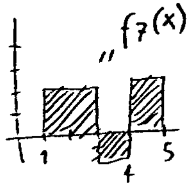
a) $(2-1)\cdot 1 +$
$(3-2)\cdot 2 +$
$(4-3)\cdot 3 +$
$(6-4)\cdot 0 +$
$(7-6)\cdot 2$

= 

$= f_6(x)$

ÁREA: 8

b) $(3-1)\cdot 2 +$
$(4-3)\cdot(-1) +$
$(5-4)\cdot 2$



"$f_7(x)$"

ÁREA $= 4+(-1)+2 = 5$

ÁREA ENTRE A CURVA E O EIXO HORIZONTAL: $4+\underbrace{1}_{\text{POSITIVO!}}+2 = 7$

ÁREA SOB A CURVA: $4\underbrace{-1}_{\text{NEGATIVO!}}+2 = 5$

O QUE É A "ÁREA SOB UMA CURVA" QUANDO A CURVA ESTÁ ABAIXO DO EIXO X?

(OBS: NOSSAS "CURVAS" SÃO FUNÇÕES DESCONTÍNUAS! !!)

$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$

É A ÁREA SOB A CURVA $f(x)$ ENTRE $x=a$ (EXTREMIDADE ESQUERDA) E $x=b$ (EXTREMIDADE DIREITA).

OBS: $a \leq b$.

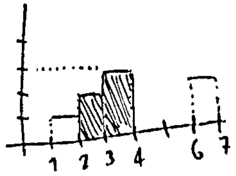
POR ENQUANTO $\int_{x=5}^{x=2} f(x)\,dx$ = ERRO.

EXERCÍCIO:
CALCULEM (NO OLHO!):

a) $\int_{x=2}^{x=3} f_3(x)\,dx$

b) $\int_{x=2}^{x=4} f_3(x)\,dx$

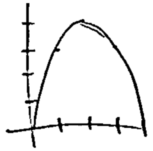
c) $\int_{x=-2}^{x=5} f_4(x)\,dx$

d) $\int_{x=2}^{x=4} f_6(x)\,dx$ = 

$= 5$

MORAL:
A GENTE SABE CALCULAR INTEGRAIS DE "FUNÇÕES-ESCADA" (CUJOS GRÁFICOS SÃO FEITOS DE SEGMENTOS HORIZONTAIS).

NAS PRÓXIMAS AULAS VAMOS APRENDER A CALCULAR INTEGRAIS DE FUNÇÕES MAIS COMPLICADAS...

EX: $f(x) = 4-(x-2)^2$ = 

$\int_{x=0}^{x=4} f(x) = ?$

A GENTE VAI USAR APROXIMAÇÕES E LIMITES DESSAS APROXIMAÇÕES.

Uma aproximação (ruim):

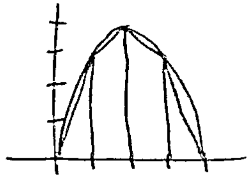
$x_0=0$,
$x_1=1$,
$x_2=2$,
$x_3=3$,
$x_4=4$,

$$\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx \approx (x_1-x_0)\cdot f(x_0) + (x_2-x_1)\cdot f(x_1) + (x_3-x_2)\cdot f(x_2) + (x_4-x_3)\cdot f(x_3)$$

"APROXIMADAMENTE IGUAL"

= 

Uma aproximação melhor:
(ÁREAS DE PARALELOGRAMOS!)



$$=(1-0)\cdot\frac{0+3}{2} + (2-1)\cdot\frac{3+4}{2} + (3-2)\cdot\frac{4+3}{2} + (4-3)\cdot\frac{3+0}{2}$$

$= 1.5+3.5+3.5+1.5$
$= 10$

CÁLCULO 2
PROF: EDUARDO OCHS
PURO/UFF
27/MARÇO/2019

EXERCÍCIOS

[1] RELEMBRE COMO DESENHAR CERTAS COISAS EM GRÁFICOS "NO OLHÔMETRO".

FAÇA UM CÓPIA DO GRÁFICO ABAIXO NO SEU CADERNO E REPRESENTE GRAFICAMENTE:

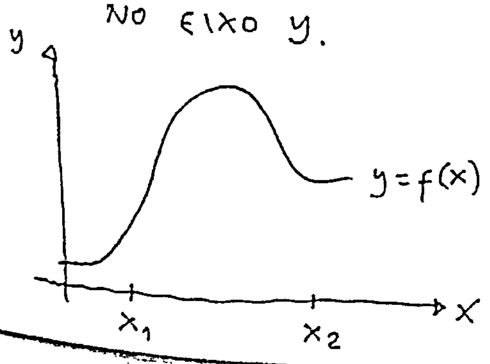
a) O PONTO MÉDIO $x_3 := \frac{x_1+x_2}{2}$

b) OS PONTOS $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, $(x_3, f(x_3))$

c) OS VALORES DE $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$ NO EIXO y,

d) OS RETÂNGULOS CUJAS ÁREAS SÃO DADAS POR $f(x_1)\cdot(x_2-x_1)$, $f(x_2)\cdot(x_2-x_1)$, $f(x_3)\cdot(x_2-x_1)$,

e) O VALOR DE $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ NO EIXO y.



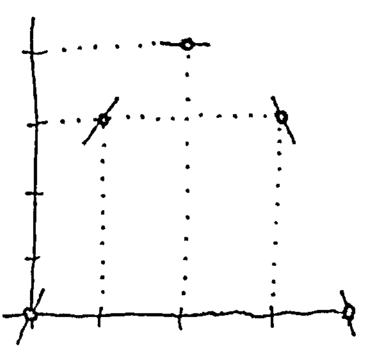
[2] A NOSSA FUNÇÃO PREFERIDA PRA DISCUTIR A DEFINIÇÃO DE INTEGRAL COMO LIMITE DE SOMATÓRIOS É ESTA:

$f(x) = 4-(x-2)^2$

a) VERIFIQUE QUE ELA PASSA PELOS PONTOS $(0,0)$, $(1,3)$, $(2,4)$, $(3,3)$, $(4,0)$.

b) VERIFIQUE QUE $f'(0)=4$, $f'(1)=2$, $f'(2)=0$, $f'(3)=-2$, $f'(4)=-4$.

c) RELEMBRE COMO DESENHAR O GRÁFICO DA f ENTRE $x=0$ E $x=4$ A PARTIR DESTES PONTOS E TANGENTES:



CÁLCULO 2
PROF: EDUARDO OCHS
PURO/UFF
27/MARÇO/2019

EXERCÍCIOS
(CONTINUAÇÃO)

$\boxed{3}$ SEJA "P_1" A SEGUINTE ESCOLHA DE VALORES PARA OS PONTOS x_0, x_1, x_2, x_3:

$x_0 = 1$,
$x_1 = 2.5$,
$x_2 = 3$,
$x_3 = 4$.

SEJA "P_2" ESTA ESCOLHA:

$x_0 = 0$,
$x_1 = 1$,
$x_2 = 3$,
$x_3 = 4$.

(a) REPRESENTE NUM GRÁFICO SÓ A FUNÇÃO $f(x) = 4 - (x-2)^2$ E OS RETÂNGULOS CORRESPONDENTES À SOMA

$$f(x_0)\cdot(x_1 - x_0) +$$
$$f(x_1)\cdot(x_2 - x_1) +$$
$$f(x_2)\cdot(x_3 - x_2)$$

NO "CASO P_1".

(b) REPRESENTE NUM SEGUNDO GRÁFICO A FUNÇÃO $f(x)$ E A SOMA ACIMA NO "CASO P_2".

(c) REPRESENTE NUM TERCEIRO GRÁFICO A FUNÇÃO $f(x) = 4 - (x-2)^2$ E A SOMA

$$\sum_{i=1}^{3} f(x_i)\cdot(x_i - x_{i-1})$$

NO "CASO P_1".

(d) REPRESENTE NUM QUARTO GRÁFICO A FUNÇÃO $f(x) = 4 - (x-2)^2$ E A SOMA

$$\sum_{i=1}^{3} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)\cdot(x_i - x_{i-1})$$

NO "CASO P_1".

(e) REPRESENTE NUM QUINTO GRÁFICO A FUNÇÃO $f(x) = 4 - (x-2)^2$ E A SOMA

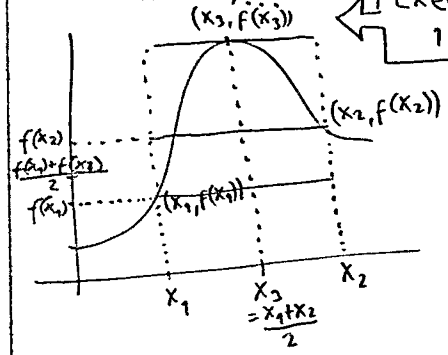
$$\sum_{i=1}^{3} \frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}\cdot(x_i - x_{i-1})$$

NO "CASO P_1".

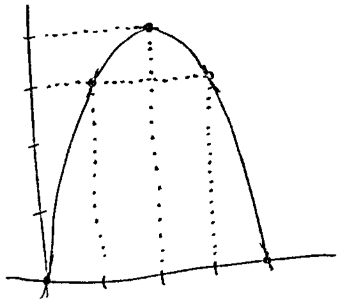
CÁLCULO 2
29/março/2019

HOJE: REVISÃO DOS EXERCÍCIOS, PARTIÇÕES, OUTRAS APROXIMAÇÕES POR RETÂNGULOS (E POR TRAPÉZIOS)

EXERCÍCIO 1

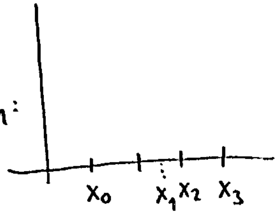


2c

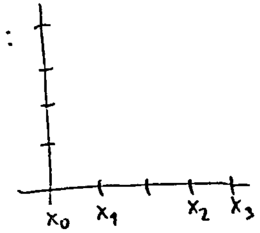


3

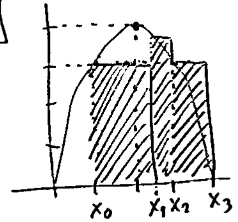
P1:



P2:



3a

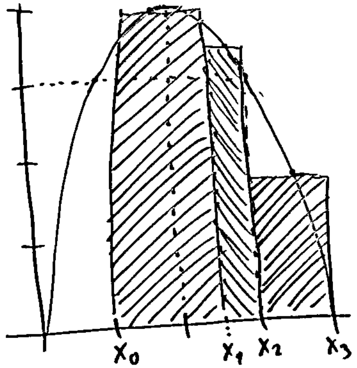


3c $\sum_{i=1}^{3} f(x_i)\cdot(x_i - x_{i-1}) =$
$f(x_1)\cdot(x_1 - x_0) +$
$f(x_2)\cdot(x_2 - x_1) +$
$f(x_3)\cdot(x_3 - x_2)$

3d $\sum_{i=1}^{3} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)\cdot(x_i - x_{i-1})$

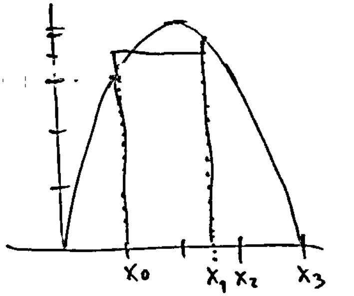
$= f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)\cdot(x_1 - x_0)$
$+ f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\cdot(x_2 - x_1)$
$+ f\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)\cdot(x_3 - x_2)$

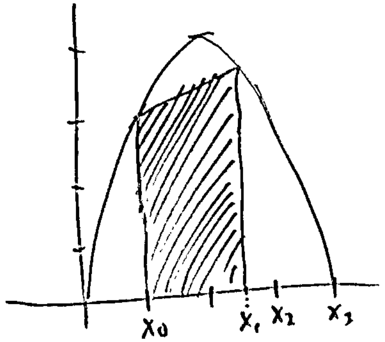
$=$



3e $\sum_{i=1}^{3} \frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}\cdot(x_i - x_{i-1})$

$= \frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}\cdot(x_1 - x_0)$
$+ \dots$





PARTIÇÕES

ESTAMOS SEMPRE DESENHANDO SOMAS DESTA FORMA:

$\sum_{i=1}^{3} \left(\text{ALGUMA COISA}\right)\cdot(x_i - x_{i-1})$

COMO A GENTE GENERALIZA ISSO?

IDÉIA: UMA PARTIÇÃO DE UM INTERVALO $[a,b]$ É UMA DIVISÃO DE $[a,b]$ EM (N) SUBINTERVALOS CONSECUTIVOS.

EXEMPLO:

$[a,b] = [1,5]$

$[a,b] = [1,2.5] \cup [2.5,3] \cup [3,4] \cup [4,5]$

$[a_1,b_1]$ $[a_2,b_2]$ $[a_3,b_3]$ $[a_4,b_4]$

$a = a_1$, $b_4 = b$

$N = 4$ (SUBINTERVALOS)
5 PONTOS
$P = \{1, 2.5, 3, 4, 5\}$

PONTOS: $1, 2.5, 3, 4, 5$
$x_0 = 1,\ x_1 = 2.5,\ x_2 = 3,\ x_3 = 4,\ x_4 = 5$

$\Downarrow$

CÁLCULO 2
29/MARÇO/2019

DEF: UMA PARTIÇÃO DO INTERVALO $[a,b]$ E N SUBINTERVALOS É UM CONJUNTO DE $N+1$ PONTOS DE $\mathbb{R}$ CUJO MENOR PONTO É a E O MAIOR PONTO É b.

DEFINIÇÕES (MAIS CURTAS):
ALIÁS, EXEMPLOS:

- $\{2,4,7,8\}$ É UMA PARTIÇÃO DO INTERVALO $[2,8]$ (EM 3 SUBINTERVALOS)
- $\{2,4,7,8\}$ É UMA PARTIÇÃO.

UMA PARTIÇÃO (!!) É UM SUBCONJUNTO FINITO DE $\mathbb{R}$.

UMA VEZ QUE A GENTE ESCOLHE UMA PARTIÇÃO P A GENTE TEM MODOS DE DEFINIR:

- N (NÚMERO DE SUBINTERVALOS)
- a e b (EXTREMIDADES ESQUERDA E DIREITA)
- $[a_1,b_1], [a_2,b_2], \ldots, [a_N,b_N]$ (SUBINTERVALOS)
- $x_0, x_1, \ldots, x_N$.

COMO FAZER:

- PEGUE P
- PONHA SEUS PONTOS EM ORDEM
- CONTE OS PONTOS
- DEFINA N
- DEFINA $x_0, \ldots, x_N$
- DEFINA $a_1, \ldots, a_N$, $b_1, \ldots, b_N$.

ALGUMAS NOTAÇÕES:

$P = \{4,6,7,9,10\}$
$= \{x_0, \ldots, x_4\}$

$N = 4$

i	a_i	b_i
1	4	6
2	6	7
3	7	9
4	9	10

EXERCÍCIO

PARA CADA UM DOS CONJUNTOS "P"s ABAIXO ORDENE SEUS PONTOS, DETERMINE N, E FAÇA A TABELA.

(1) $\{4,6,6,4,7,7,9\}$ $(=\{4,6,7,9\})$
(2) $\{0,3,4,2.5\}$
(3) $\{0,0.5,1,1.5,2\}$

PRA QUE ISSO SERVE?

ESCOLHA UMA PARTIÇÃO P DO INTERVALO $[a,b]$.

ENTÃO OS SOMATÓRIOS:

$\sum_{i=1}^{N} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$ (PONTO ESQUERDO)

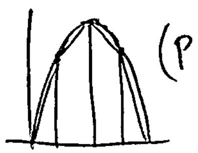
$\sum_{i=1}^{N} f(x_i)(x_i - x_{i-1})$ (PONTO DIREITO)

$\sum_{i=1}^{N} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)(x_i - x_{i-1})$ (PONTO MÉDIO)

$\sum_{i=1}^{N} \frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}(x_i - x_{i-1})$ (TRAPÉZIOS)

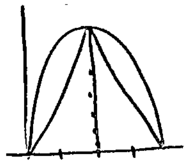
SÃO APROXIMAÇÕES PARA $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$!

COM ESSA NOTAÇÃO FICA FÁCIL MUDAR A PARTIÇÃO P... E ESTA APROXIMAÇÃO POR TRAPÉZIOS, PRA $\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx$,



$(P = \{0,1,2,3,4\})$

É MELHOR QUE ESTA:



$(P = \{0,2,4\})$.

SE A GENTE DEFINIR MAIS QUATRO MÉTODOS DÁ PRA ENTENDER A DEFINIÇÃO PRECISA DE INTEGRAL!

$\sum_{i=1}^{N} \max(f(x_{i-1}), f(x_i))(x_i - x_{i-1})$ (max)

$\sum_{i=1}^{N} \min(f(x_{i-1}), f(x_i))(x_i - x_{i-1})$ (min)

$\sum_{i=1}^{N} \left(\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\right)(x_i - x_{i-1})$ (sup) (??)

$\sum_{i=1}^{N} \left(\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\right)(x_i - x_{i-1})$ (inf) (??)

Cálculo 2
29/março/2019

Exercícios

Vamos usar
$f(x) = 4 - (x-2)^2$
e tentar aproximar
$\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx$
de várias formas.

1) Represente graficamente — como retângulos — a aproximação da integral acima pelo método do max nos seguintes casos:

a) $P = \{0, 2, 4\}$

b) $P = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

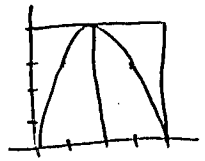
c) $P = \{0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4\}$

2) Idem, mas pelo método do min.

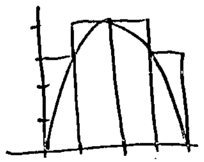
3) Método do max usando esta partição:
$P = \{0, 1, 3, 4\}$.

As suas aproximações pelo método do max estão "acima" da parábola?
As suas aproximações pelo min estão "abaixo" da parábola?

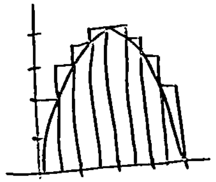
1a



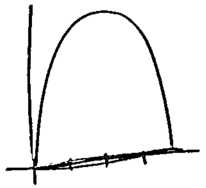
1b



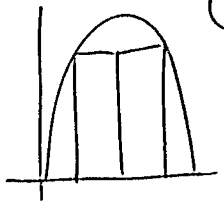
1c



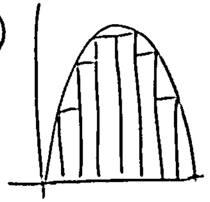
2a



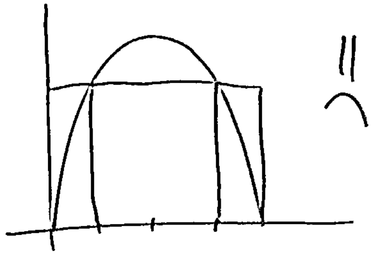
2b



2c



3



$\max(f(1), f(3))$
$= \max(3, 3)$
$= 3$

$\sup_{x \in [1,3]} f(x) = 4$

Definições seguintes — versão informal

$\sup_{x \in [1,3]} f(x)$ é o máximo valor que $f(x)$ atinge quando $x \in [1,3]$.

$\inf_{x \in [1,3]} f(x)$ é o menor valor etc.

Mais definições

$\overline{\int}_P f(x)\,dx$

é a (área da) "aproximação por cima" da $f(x)$ no intervalo $[a,b]$.

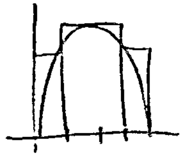
Formalmente:
se P é uma partição de $[a,b]$,

$$\overline{\int}_P f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} \left(\sup_{x \in [\underbrace{a_i}_{x_{i-1}}, \underbrace{b_i}_{x_i}]} f(x) \right) (\underbrace{b_i}_{x_i} - \underbrace{a_i}_{x_{i-1}})$$

E $\underline{\int}_P f(x)\,dx$

é a (área da) "aproximação por baixo" (usando o método do inf).

Se $P = \{0, 1, 3, 4\}$
então
$\overline{\int}_P f(x)\,dx =$



Se alguém quiser algo sobre isso em casa...
Sugestão: seção 5.3 do livro ("Riemann Sums")

C2 3/abril/2019

Hoje:

1. Como visualizar diferenças de somas de retângulos
2. Definição formal de sup e inf
3. Definição de $\overline{\int}_P$, $\underline{\int}_P$, $\int_{x=a}^{x=b}$

Lembre que vimos que a partir de uma partição P nós podíamos encontrar N (o número de intervalos), e a e b (as extremidades esquerda e direita), e fazer uma tabela com os valores dos "a_i"s e "b_i"s...

Por exemplo, se $P=\{\underset{x_0}{1.5}, 2.5, 3, \underset{x_3}{4}\}$

então $N=3$, $a=1.5$, $b=4$, e:

i	a_i	b_i
1	1.5	2.5
2	2.5	3
3	3	4

Uma das novidades de hoje é que vamos incluir colunas novas nessa tabela, com as alturas dos retângulos, e vamos escrever as somas como

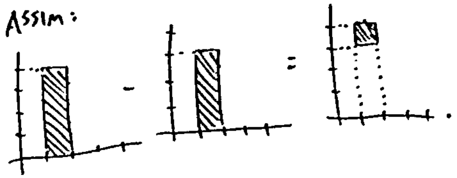
$$\sum_{i=1}^{N} \underbrace{h_i}_{\text{altura}} (b_i - a_i).$$

Como visualizar diferenças de retângulos

... por exemplo, vamos representar graficamente

$$(4\cdot(2-1)) - (3\cdot(2-1))$$

Assim:



Nós só vamos considerar casos em que a primeira soma de retângulos está toda acima da segunda.

Exercícios:

a) Represente graficamente

$$\begin{pmatrix}3\cdot(1-0)+\\4\cdot(3-1)+\\3\cdot(4-3)\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\cdot(1-0)+\\3\cdot(3-1)+\\0\cdot(4-3)\end{pmatrix}$$

b) Represente graficamente

$$\left(\sum_{i=1}^{N} f(a_i)(b_i-a_i)\right) - \left(\sum_{i=1}^{N} f(b_i)(b_i-a_i)\right)$$

para $f(x) = 4-(x-2)^2$ e $P=\{\underset{x_0}{2}, \underset{x_1}{2.5}, \underset{x_2}{3}, \underset{x_3}{3.5}, \underset{x_4}{4}\}$.

2. A definição formal do sup é:

Se $A\subseteq\mathbb{R}$ então $\sup(A)$ é o menor elemento de $[-\infty,+\infty]$ que obedece isto:

$\forall a\in A.\ a\le x.$

Obs: isto é $\{-\infty\}\cup\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$

Exemplos:

$\sup(\{1,2,3\}) = 3$

$\sup([1,3)) = 3$

$\sup(\mathbb{N}) = +\infty$

$\sup(\emptyset) = -\infty$

A definição do inf é:

Se $A\subseteq\mathbb{R}$ então $\inf(A)$ é o maior elemento de $[-\infty,+\infty]$ que obedece isto:

$\forall a\in A.\ x\le a.$

Exemplos:

$\inf((1,3)\cup(4,5)) = 1$

$\inf(\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots\}) = 0$

$\inf(\mathbb{Z}) = -\infty$, $\inf(\emptyset) = +\infty$.

Na aula passada nós usamos estas notações:

$\sup_{x\in[1,3]} f(x)$,

$\inf_{x\in[1,3]} f(x)$ ...

Elas são abreviações:

$$\sup_{x\in[1,3]} f(x) = \sup(f([1,3])) = \sup(\{f(x) \mid x\in[1,3]\}),$$

$$\inf_{x\in[1,3]} f(x) = \inf(f([1,3])) = \inf(\{f(x) \mid x\in[1,3]\}).$$

Convenção (pras tabelas):

$$\overline{h}_i = \sup_{x\in[a_i,b_i]} f(x),$$

$$\underline{h}_i = \inf_{x\in[a_i,b_i]} f(x).$$

ou "$g(x)$" ou "$h(x)$" se estivermos tentando integrar funções chamadas g ou h.

Exercício:

Seja $g(x) =$

Calcule:

a) $\sup_{x\in[1,3]} g(x)$

b) $\sup_{x\in(1,3)} g(x)$

c) $\inf_{x\in[2,4]} g(x)$

d) $\inf_{x\in(2,4)} g(x)$

Represente graficamente:

e) $\sum_{i=1}^{N} \sup_{x\in[a_i,b_i]} g(x)$ para $P=\{0,1,2,3,4\}$

f) $\sum_{i=1}^{N} \sup_{x\in(a_i,b_i)} g(x)$ para $P=\{0,1,2,3,4\}$

g) $\sum_{i=1}^{N} \inf_{x\in[a_i,b_i]} g(x)$ para $P=\{0,1,2,3,4\}$

h) $\left(\sum_{i=1}^{N} \overline{h}_i\cdot(b_i-a_i)\right) - \left(\sum_{i=1}^{N} \underline{h}_i\cdot(b_i-a_i)\right)$

para $P=\{0,1,2,3,4\}$

C2 3/ABRIL/2019

Em muitas situações vai ser muito mais fácil calcular ou estimar a diferença entre duas somas de retângulos do que calcular cada uma das somas de retângulos...

Seja $g(x) = x - 1$.

i) Para $P = \{0,1,2,3,4\}$ represente graficamente

$\overline{\int_P} g(x)\,dx \quad \left(= \sum_{i=1}^{N} \overline{h_i}\cdot(b_i - a_i)\right)$,

$\underline{\int_P} g(x)\,dx \quad \left(= \sum_{i=1}^{N} \underline{h_i}\cdot(b_i - a_i)\right)$,

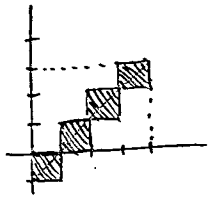
e $\overline{\int_P} g(x)\,dx - \underline{\int_P} g(x)\,dx$.

Calcule no olhômetro a área de

$\overline{\int_P} g(x)\,dx - \underline{\int_P} g(x)\,dx$.

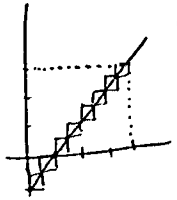
j) Faça a mesma coisa com $P = \{0, 0.5, 1, \ldots, 3.5, 4\}$.

$g(x) =$



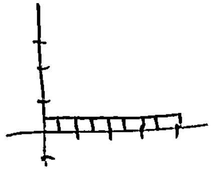
Área da diferença: 4.

$g(x) =$



Área da diferença: $8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$
base, altura

ou, movendo os retângulos todos na vertical pra apoiá-los no eixo x...



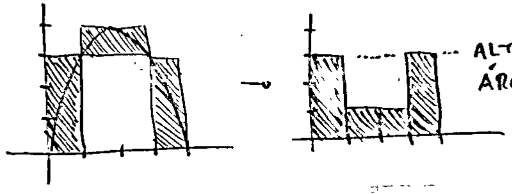
...resultado: um retângulo de base 4 $(= 4 - 0)$ e altura $\frac{1}{2}$ ...

Área: $\frac{1}{2}\cdot(4-0) = 2$ (da diferença)

k) Faça a mesma coisa para $P = \{0, 0.1, 0.2, \ldots, 4\}$ e calcule a área da diferença.

l) Calcule a área da diferença quando todos os intervalos têm largura $\frac{1}{1000}$.

m) Faça a mesma coisa para $f(x) = 4 - (x-2)^2$ e $P = \{0,1,2,3,4\}$.

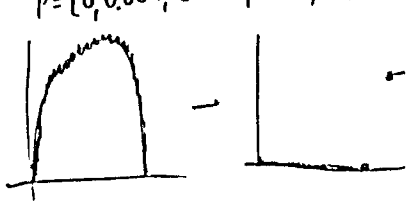


... altura máxima: 3
Área: 8
Área $\leq \underbrace{\text{alt. máxima}}_{3} \cdot \underbrace{\text{base}}_{4}$

n) Idem, mas para $P = \{0, 0.5, 1, \ldots, 4\}$

← alt. máxima: 1.75 (acho)
Área $\leq \underbrace{\text{alt. máxima}}_{1.75} \cdot \underbrace{\text{base}}_{4}$

o) Idem, mas para $P = \{0, 0.001, 0.002, 0.003, \ldots, 4\}$



máximo do módulo da derivada

← alt máxima: $4 \cdot \frac{1}{1000} = 0.004$
Área $\leq 0.004 \cdot$ PAX

Uma função $f(x)$ é integrável no intervalo $[a,b]$ se e só se pra todo $\varepsilon > 0$ existe uma partição P de $[a,b]$ tal que a diferença das duas aproximações é menor que ε... i.e.,

$\overline{\int_P} f(x)\,dx - \underline{\int_P} f(x)\,dx < \varepsilon$

Se $f(x)$ é integrável em $[a,b]$ então definimos

$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \lim_{P\to 0} \overline{\int_P} f(x)\,dx = \lim_{P \to 0} \underline{\int_P} f(x)\,dx$

O que é esse "limite quando as partições ficam cada vez mais finas"???

C2 5/ABRIL/2019

Hoje:
mais idéias sobre partições, definição formal de integral...

Lembre que

$$\overline{\int_P} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} \sup_{x\in[a_i,b_i]} f(x),$$

$$\underline{\int_P} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} \inf_{x\in[a_i,b_i]} f(x)\ldots$$

Digamos que $P_1, P_2, P_3, \ldots$ são partições do intervalo $[a,b]$, e que $P_1 \subset P_2 \subset P_3 \subset \ldots$

A gente diz que nesse caso P_2 <u>refina</u> P_1, P_3 refina P_2, etc...

O que isso quer dizer?

Exemplo:

$P_1 = \{2, 6, 8\}$

$P_2 = \{2, 3, 6, 7, 8\}$

$P_3 = \{2, 3, 6, 7, 7.5, 8\}$

Quando $P_1 \subset P_2$

A partição P_2 <u>subdivide</u> alguns intervalos da P_1...

E isso faz com que

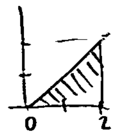
$$\underline{\int_{P_2}} f(x)\,dx \le \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \le \overline{\int_{P_2}} f(x)\,dx$$

$$\rotatebox{90}{$\le$} \qquad\qquad\qquad\qquad \rotatebox{90}{$\ge$}$$

$$\underline{\int_{P_1}} f(x)\,dx \le \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \le \overline{\int_{P_1}} f(x)\,dx$$

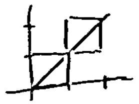
Vamos pegar um exemplo concreto:

$f(x) = x$ =

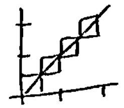


$a=0,\ b=2$

$P_1 = \{0, 2\}$



$P_2 = \{0, 1, 2\}$



$P_3 = \{0, 0.5, 1, 1.5, 2\}$

Definição:

A <u>largura</u> de uma partição é o comprimento do seu <u>maior</u> subintervalo.

Notação: $\|P\|$.

Exemplo: $\|P_1\| = \|\{2, 6, 8\}\| = 4$

$\|P_2\| = \|\{2, 3, 6, 7, 8\}\| = 3$

$\|P_3\| = \|\{2, 3, 6, 7, 7.5, 8\}\| = 3$

Repare que:

$$\underline{\int_{P_1}} f(x)\,dx = 1 \qquad \overline{\int_{P_1}} f(x)\,dx = 3$$

$$\underline{\int_{P_2}} f(x)\,dx = 1.5 \qquad \overline{\int_{P_2}} f(x)\,dx = 2.5$$

$$\underline{\int_{P_3}} f(x)\,dx = ? \qquad \overline{\int_{P_3}} f(x)\,dx$$

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = 2$$

<u>Um caso particular muito importante</u>

Digamos que $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é contínua, e que queremos integrá-la em $[a,b]$.

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx.$$

Digamos que escolhemos partições $P_1, P_2, P_3, \ldots$ do intervalo $[a,b]$ que obedecem isto:

$$\lim_{k\to\infty} \|P_k\| = 0$$

Então...

Lembre que em Cálculo 1 a gente costuma ver pelo menos o enunciado disto... e a demonstração fica num apêndice.

Toda $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua é <u>uniformemente contínua</u> (obs: $[a,b]$ é <u>compacto</u>)

Def: $UC(f, h, v)$

é: $\forall c,d \in [a,b]$.

$|c-d| \le h$ ← distância horizontal

$\to |f(c)-f(d)| \le v$

Exercício:

No nosso exemplo preferido,

$f:[0,4]\to\mathbb{R}$

$x \mapsto 4-(x-2)^2$

Verifique que:

a) $UC(f, 4, 5) = V$

b) $UC(f, 4, 3) = F$,

c) $UC(f, 1, 4) = V$,

d) $UC(f, 1, 2) = F$

C2 5/ABRIL/2019

VOLTANDO...

LEMBRE QUE ESCOLHEMOS $[a,b]$ E UMA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ CONTÍNUA (QUALQUER!)

OOPS, FALTOU A DEFINIÇÃO!

f É UNIFORMEMENTE CONTÍNUA SE E SÓ SE

$\forall v>0.\ \exists h>0.\ UC(f,h,v).$

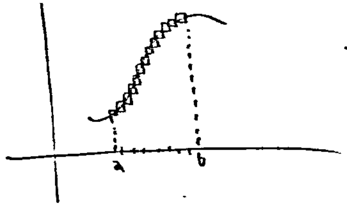
ESCOLHA $\varepsilon>0$.

"ESCOLHA" $v=\frac{\varepsilon}{b-a}$.

SEJA h UM REAL QUE OBEDECE $h>0$, $UC(f,h,v)$.

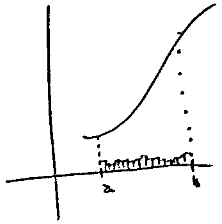
ESCOLHA UMA PARTIÇÃO P DE $[a,b]$ COM $\|P\|\le h$.

... ENTÃO SE FIZERMOS DESENHOS COMO OS DA AULA PASSADA DE DIFERENÇA ENTRE DUAS APROXIMAÇÕES POR RETÂNGULOS, VAMOS TER:



TODOS ESSES RETÂNGULOS VÃO TER ALTURA $\le v$!

E SE A GENTE DESLIZAR TODOS NA VERTICAL PRA APOIÁ-LOS NO EIXO X, VAMOS TER:



E ÁREA DESSE FIGURA FORMADA PELOS RETÂNGULOS DESLIZADOS NA VERTICAL VAI SER MENOR OU IGUAL A

$v\cdot(b-a)$

$=\frac{\varepsilon}{\cancel{b-a}}\cdot\cancel{(b-a)}$

$=\varepsilon$

... ENTÃO

$\overline{\int_P} f(x)\,dx-\underline{\int_P} f(x)\,dx\le\varepsilon$!!!

OU SEJA:

PRA FUNÇÕES $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ CONTÍNUAS A GENTE PODE CONSEGUIR QUE A APROXIMAÇÃO POR CIMA E A POR BAIXO FIQUEM ARBITRARIAMENTE PRÓXIMAS...

PAUSA PRA VER UMA FUNÇÃO NÃO-INTEGRÁVEL

SEJA $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

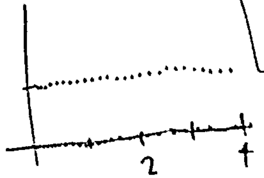
$x\mapsto\begin{cases}1 & \text{se } x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{se } x \text{ irracional.}\end{cases}$

EXERCÍCIO: CALCULEM:

$\overline{\int_{\{2,4\}}} g(x)\,dx$, $\boxed{=2}$

$\underline{\int_{\{2,4\}}} g(x)\,dx$ $\boxed{=0}$.

$g(x)=$



ISSO TAMBÉM ACONTECE SE $P=\{2,2.1,2.2,\dots,4\}$

DEF: $\overline{\int_{x=a}^{x=b}} f(x)\,dx=\inf_{P \text{ PART. DE } [a,b]}\overline{\int_P} f(x)\,dx$

$\underline{\int_{x=a}^{x=b}} f(x)\,dx=\sup_{P \text{ PART. DE } [a,b]}\underline{\int_P} f(x)\,dx$

SE $\overline{\int_{x=a}^{x=b}} f(x)\,dx=\underline{\int_{x=a}^{x=b}} f(x)\,dx$

ENTÃO DIZEMOS QUE f É INTEGRÁVEL EM $[a,b]$, E QUE $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx=\overline{\int_{x=a}^{x=b}} f(x)\,dx$.

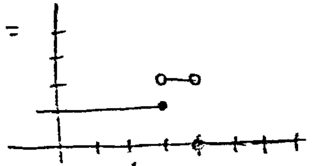
SE $\overline{\int_{x=a}^{x=b}} f(x)\,dx\neq\underline{\int_{x=a}^{x=b}} f(x)\,dx$

ENTÃO DIZEMOS QUE f NÃO É INTEGRÁVEL EM $[a,b]$ E QUE $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ NÃO EXISTE.

EXERCÍCIO:

SEJA $g(x)=\begin{cases}1 & \text{se } x\le 3,\\ 2 & \text{se } 3<x<4,\\ 0 & \text{se } 4\le x;\end{cases}$

ISTO É: $g(x)=$



DEF: $G(a,b)=\int_{x=a}^{x=b} g(x)\,dx$.

CALCULEM (NO OLHÔMETRO MESMO):

a) $G(1,2)$
b) $G(1,3)$
c) $G(1,4)$
d) $G(1,5)$
e) $G(1,1.1)$
f) $G(1,1.2)$
g) $G(1,2.9)$
h) $G(1,3.1)$
i) $G(1,3.9)$
j) $G(1,4.1)$

PRA CASA:

SEJA $h:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$

$x\mapsto G(1,x)$

FAÇA O GRÁFICO DA h.

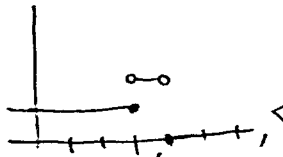
C2 12/abril/2019

Hoje: TFC1!

"Teorema Fundamental do Cálculo"

Na aula passada eu dei essa função-escada aqui:

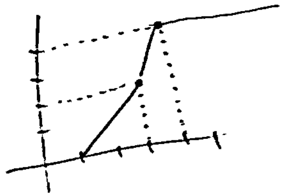
$g(x) =$



Defini $G(b) = \int_{x=1}^{x=b} g(x)\,dx$,

e pedi pra vocês fazerem o gráfico da G...

$G(b) =$



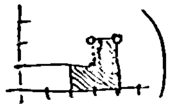
Reparem:
G é contínua
$G'(x) = g(x)$
$G(1) = \int_{x=1}^{x=1} g(x)\,dx = 0$

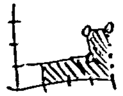
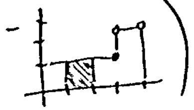
Fato: (apêndice)

$\boxed{\text{Isso vale pra toda } g \text{ integrável!}}$

E lembre que nós demonstramos que toda $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua é integrável...

Obs: olhem pra cá...

$\int_{x=2}^{x=4} g(x)\,dx$ $\Big($ =  $\Big)$

$= \int_{x=1}^{x=4} g(x)\,dx - \int_{x=1}^{x=2} g(x)\,dx$ $\Big($ =  −  $\Big)$

$= G(4) - G(2)$

...então $\int_{x=c}^{x=d} g(x)\,dx = G(d) - G(c)$

e essa G nos permite calcular integrais da g em qualquer intervalo.

Voltando ao exemplo da parábola...

$$f(x) = 4 - (x-2)^2 = \cancel{4} - (x^2 - 4x + \cancel{4}) = -x^2 + 4x$$

Como calcular $\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx$?

Exercício (preliminar):

Pra cada uma das funções abaixo encontre...

(a) $f(x) = 2$, F tal que $F' = f$, G tal que $G' = f$ e $G(2) = 3$

(b) $f(x) = x$, F tal que $F' = f$, G tal que $G' = f$ e $G(3) = 4$

(c) $f(x) = x^2$, idem, com $G(0) = 1$.

(d) $f(x) = \cos x$, idem, com $G(\pi) = 2$.

(e) $f(x) = 3\cos x$, idem, com $G(0) = 3$.

(f) $f(x) = \cos 4x$, idem, com $G(0) = 3$.

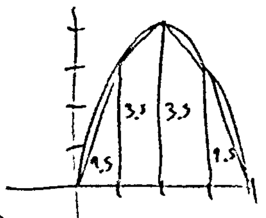
(g) $f(x) = -x^2$, $G(0) = 0$

(h) $f(x) = 4x$, $G(0) = 0$

(i) $f(x) = -x^2 + 4x$, $G(0) = 0$

Uma solução: $F(x) = 2x$
outra solução: $F(x) = 2x + 200$

$F(x)$	$F'(x)$	a	$F(a)$	
$2x$	2	2	4	
$2x-1$	2	2	3	(Resposta da (a): $G(x) = 2x-1$; então $G'(x) = 2$, $G(2) = 3$)
x^3	$3x^2$			
$\frac{1}{3}x^3$	x^2	0	0	
$\frac{1}{3}x^3 + 1$	x^2	0	1	(Resposta da (c))
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$	π	0	
$2 + \operatorname{sen} x$	$\cos x$	π	2	(Resposta da (d))
$-\frac{1}{3}x^3$	$-x^2$	0	0	(Resposta da (g))
$2x^2$	$4x$	0	0	(Resposta da (h))
$-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2$	$-x^2 + 4x$	0	0	(Resposta da (i))



Método pra calcular $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ (para f contínua):

1) Encontre $G(x)$ com $G'(x) = f(x)$
2) Encontre $F(x)$ com $F'(x) = f(x)$ e $F(a) = 0$
3) Vamos ter $F(b) = \int_{x=a}^{x=b} f(x)$,

então calcule $F(b)$.

Exercício: $\int_{x=0}^{x=4} -x^2 + 4x\,dx = ?$

$\int_{x=0}^{x=4} -x^2 + 4x\,dx = ?$

$G(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2$

$F(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2$

$F(b) = \int_{x=0}^{x=b} -x^2 + 4x\,dx$

$$F(4) = -\frac{1}{3}4^3 + 2\cdot 4^2 = -\frac{1}{3}64 + 32 = -\frac{64}{3} + \frac{96}{3} = \frac{32}{3}$$

C2 12/abril/2019

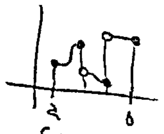
Hoje: TFC1!

"Teorema Fundamental do Cálculo"

TFC1

Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função integrável em $\mathbb{R}$.

(Obs: funções contínuas são integráveis, funções escada também, e coisas como isto,



com um número finito de descontinuidades, também)

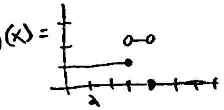
Seja $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função contínua ⇐ ⓪ que obedece:

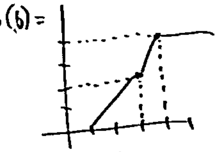
① $F'(x)=f(x)$ (exceto num número finito de pontos)

② $F(a)=0$.

Então: $\forall c\in[a,b]$ vale: $\int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx = F(c)$

Obs: No nosso primeiro exemplo

$g(x)=$


$G(b)=$


g é contínua exceto em $x=3$ e $x=4$.

G é contínua, derivável exceto em $x=3$ e $x=4$.

Vamos reescrever a condição ①...

Digamos que $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ seja integrável e seja contínua exceto num subconjunto $D\subset[a,b]$, D finito.

(No exemplo da g, $D=\{3,4\}$).

Então F é contínua em $[a,b]$ e é derivável em $[a,b]\setminus D$.

Notação

("antiderivadas")

Exemplo: $f(x)=x^2$,

$F(x)=\frac{1}{3}x^3$, $F'(x)=f(x)$.

$F(x)$ é uma antiderivada de $f(x)$.

(Def: $F(x)$ é uma antiderivada de $f(x)$ se e só se $F'(x)=f(x)$).

$\int f(x)\,dx$ é o conjunto de todas as antiderivadas de $f(x)$.

Exemplo (com alguns abusos de linguagem):

$$\int x^2\,dx = \left\{\tfrac{1}{3}x^3,\ 42+\tfrac{1}{3}x^3,\ 200+\tfrac{1}{3}x^3, \ldots\right\} = \left\{\tfrac{1}{3}x^3+C \;\middle|\; C\in\mathbb{R}\right\}$$

Notação:

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C$$

Ex: $\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3+C$

"$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3+C$" quer dizer: "todas as antiderivadas de x^2 são da forma $\frac{1}{3}x^3+C$ para alguma constante $C\in\mathbb{R}$".

Exercício: Complete:

a) $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}+C$

b) $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$

c) $\int \cos 4x\,dx =$

d) $\int \operatorname{sen} x\,dx =$

e) $\int x^2\,dx =$

f) $\int x^3\,dx =$

g) $\int x^2+x^3\,dx =$

C2 12/ABRIL/2019

HOJE: TFC1!

"TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO"

(e) $\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C_1$

(f) $\int x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4 + C_2$

(g) $\int x^2 + x^3\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C_1 + \frac{1}{4}x^4 + C_2$

$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + C$

REPARE QUE A GENTE RESOLVEU $\int_{x=0}^{x=4} -x^2 + 4x\,dx$

FAZENDO: $\int -x^2 + 4x\,dx = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + C$,

$\int_{x=0}^{x=b} -x^2 + 4x\,dx = \left(-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 0\right)[x := b]$

$= \left(-\frac{1}{3}b^3 + 2b^2 + 0\right)$

$\int_{x=0}^{x=4} -x^2 + 4x\,dx = \left(-\frac{1}{3}b^3 + 2b^2\right)[b := 4]$

C2 17/ABR/2019

Hoje:

TFC1 (Revisão), Substituição, TFC, Integração por substituição.

No fim da aula passada nós vimos que se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é integrável e $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ obedece:

1. F é contínua
2. $F'(x)=f(x)$ nos pontos em que f é contínua
3. $F(a)=0$

Então para todo $c\in[a,b]$,

$$\int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx = F(c)$$

$\boxed{\text{TFC1}}$

Exemplo:

$$\int_{x=2}^{x=c} x^2\,dx = \frac13 x^3 + C$$

Aliás, vamos relembrar um truque...

$$\int x^2\,dx = \frac13 x^3 + C$$

"Todas as antiderivadas de x^2 são da forma $\frac13 x^3$"

Exemplo:

$$\int_{x=2}^{x=c} x^2\,dx = \frac13 c^3 + \boxed{C}$$

Pra qual C?

Aliás,

$$\int_{x=0}^{x=c} x^2\,dx = \frac13 x^3$$

Pelo TFC1. $f(x)=x^2$ contínua, $F(x)=\frac13 x^3$ derivável

$$c=0 \Rightarrow \int_{x=0}^{x=c} x^2\,dx = \left(\frac13 x^3\right)[x:=0]=0$$

Notação:

$$\left(\frac13 x^3\right)[x:=0]$$

é o resultado de substituir todos os "x"zes em $\left(\frac13 x^3\right)$ por 0...

O resultado é $\frac13 0^3=0$

$$\int_{x=2}^{x=5} x^2\,dx = \int_{x=0}^{x=5} x^2\,dx - \int_{x=0}^{x=2} x^2\,dx$$

$$= \left(\frac13 x^3\right)[x:=5] - \left(\frac13 x^3\right)[x:=2]$$

$$= \frac13 125 - \frac13 8$$

$$\int_{x=2}^{x=c} x^2\,dx = \frac13 c^3 \boxed{-\frac13 8}$$

$C=-\frac13 8$!!!

O TFC2 é um truque pra gente não precisar encontrar esse C.

$\boxed{\text{TFC2:}}$

Digamos que: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrável, $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ obedece isto: $F'(x)=f(x)$ nos pontos em que f for contínua.

Então: para quaisquer $\alpha,\beta\in[a,b]$

$$\int_{x=\alpha}^{x=\beta} f(x)\,dx = F(\beta)-F(\alpha)$$

(O C sumiu!!!)

Exemplo:

$$\int_{x=2}^{x=c} x^2\,dx = \frac13 c^3 - \frac13 8$$

$$\int_{x=4}^{x=7} x^2\,dx = \left(\frac13 c^3 - \frac13 8\right)[c:=7] - \left(\frac13 c^3 - \frac13 8\right)[c:=4]$$

$$= \frac13 7^3 - \cancel{\frac13 8} - \left(\frac13 4^3 - \cancel{\frac13 8}\right)$$

Técnicas de integração

1. Chutar e testar - Ex: $\int \cos 4x\,dx = \frac14 \operatorname{sen} x$
2.  (S∃I) $\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$

Vamos ver que (S3) é consequência do TFC2!

Exercícios:

g) $f(g(x))\begin{bmatrix} f(u):=\operatorname{sen} u \\ g(x):=4x \end{bmatrix}$

$= \operatorname{sen}(4x)$

$\boxed{\text{OOPS, FALTOU O TFC2'!!!}}$

TFC2':

Se $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ é derivável em quase todo ponto então

$$\int_{x=\alpha}^{x=\beta} F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=\alpha}^{x=\beta}$$

$$= F(\beta)-F(\alpha)$$

OPS: ele aparece na folha como "(TFC2)"

C2 17/ABR/2019

Hoje:
TFC1 (Revisão),
Substituição,
TFC,
Integração
por substituição.

$$(TFC2) = \left(\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} \right)$$

a) $(TFC2)\begin{bmatrix} F(x) := -\cos x \\ a := 0 \\ b := \pi \end{bmatrix} =$

$$\left(\int_{x=0}^{x=\pi} \operatorname{sen} x\,dx = (-\cos x)\Big|_{x=0}^{x=\pi} \right)$$

$\shortparallel$

$(-\cos\pi) - (\cos 0)$
$= 1 - (-1)$
$= 2$

$$\boxed{\int_{x=0}^{x=\pi} \operatorname{sen} x\,dx = 2}.$$

Dicas para os exercícios:

- Tente representar as integrais graficamente, como áreas

Algumas coisas sobre a S1...

Igualdade de cima:

$$(TFC2)\left[F(x) := f(g(x))\right]$$

$$= \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))\,g'(x)\,dx = f(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} \right)$$

Igualdade vertical:

$$f(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} = f(g(b)) - f(g(a))$$

$$f(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} = f(g(b)) - f(g(a))$$

Igualdade de baixo:
ela também pode ser obtida a partir do TFC2 fazendo uma substituição...
Exercício: $\boxed{\text{Qual?}}$

$$(TFC2)\left[\ ?\ \right] =$$

$$\left(f(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \right)$$

Dica: $\begin{bmatrix} x := u \\ ? \end{bmatrix}$

Obs: "Resolver integrais" quase sempre é algo que se faz escolhendo a fórmula adequada e escolhendo a substituição certa... Os próximos exercícios vão ser sobre isso...

A lista tem vários erros de digitação!!! Vou listá-los aqui.

$$(TFC2I) = \left(\int F'(x)\,dx = F(x) \right)$$

i') (S1I) ...
i'') (S1I) ...
k') (S2I)...
k'') (S2I)...
m') (S3I)...

Exercício i):

i) $(S1)\begin{bmatrix} F(u) := \operatorname{sen} u \\ g(x) := 3x+4 \\ a := 1 \\ b := 2 \end{bmatrix}$

$$= \left(\begin{array}{ccc} \operatorname{sen}(3x+4)\Big|_{x=1}^{x=2} & = & \displaystyle\int_{x=1}^{x=2} \cos(3x+4)\cdot 3\,dx \\ \shortparallel & & \\ \operatorname{sen}(u)\Big|_{u=3\cdot 1+4}^{u=3\cdot 2+4} & = & \displaystyle\int_{u=3\cdot 1+4}^{u=3\cdot 2+4} \cos u\,du \end{array} \right)$$

Encontre a substituição que resolve a integral

a) $\displaystyle\int_{x=20}^{x=40} \cos 3x\,dx = \ ?$

$$\left(\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} \right)\begin{bmatrix} F(x) := \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x \\ a := 20 \\ b := 40 \end{bmatrix}$$

b) $\displaystyle\int_{x=3}^{x=4} (x+2)^5\,dx = ?$

$$(TFC2)\begin{bmatrix} F(x) := \frac{1}{6}(x+2)^6 \\ a := 3 \\ b := 4 \end{bmatrix} = \left(\int_{x=3}^{x=4} (x+2)^5\,dx = \frac{1}{6}(x+2)^6\Big|_{x=3}^{x=4} \right)$$

c) $\displaystyle\int_{x=3}^{x=4} (7x+2)^5\,dx = ?$

$\boxed{\text{Pra casa: Resolver o (c) usando (TFC2) e usando (F1) (abaixo).}}$

Dica:
A gente pode usar substituição pra obter fórmulas novas!

d) $(TFC2)\left[F(x) := g(h(x))\right] = ?$

Chame a fórmula nova que você obtiver de F1.

$$(F1) = \left(\int_{x=a}^{x=b} g'(h(x))\,h'(x)\,dx = g(h(x))\Big|_{x=a}^{x=b} \right)$$

C2 24/ABRIL/2019

HOJE: MAIS USOS DA SUBSTITUIÇÃO, ALGUNS TRUQUES PARA A INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO!

A MAIORIA DOS LIVROS DE CÁLCULO TÊM TABELAS DE DERIVADAS E INTEGRAIS...

UMA PARTE DO QUE NÓS VAMOS FAZER AQUI É APRENDER A DEDUZIR A MAIORIA DAS FÓRMULAS DESSAS TABELAS... OU, EM OUTROS TERMOS, VAMOS APRENDER A CRIAR NOSSAS PRÓPRIAS TABELAS DE INTEGRAIS

OBS: A GENTE TÁ USANDO A NOTAÇÃO $\begin{bmatrix} := \\ := \end{bmatrix}$ PRA SUBSTITUIÇÕES, MAS OS LIVROS FAZEM A MESMA COISA USANDO PORTUGUÊS...

P.EX.:

$(S3I)\left[g(x) := x^2\right] =$

$\left(\int f(x^2)\cdot 2x\,dx = \int f(u)\,du\right)(u = x^2)$

VARIÁVEL NOVA!

$(S3I) = \left(\int f(\underbrace{g(x)}_{u})\cdot \overbrace{g'(x)\,dx}^{\frac{du}{\cancel{dx}}\cancel{dx}} = \int f(u)\,du\right)(u = g(x))$

$g'(x) = \frac{d\,g(x)}{dx} = \frac{du}{dx}$

DESTE LADO DA IGUALDADE O "U" É UMA ABREVIAÇÃO PRA FUNÇÃO $g(x)$...

TRUQUE SUJO:

$\frac{du}{\cancel{dx}}\cancel{dx} = du$ (!!!)

① EXERCÍCIO:

ⓐ $(S3I)\left[g(x) := x^K\right]$

ⓑ $(S3I)\left[g(x) := ax+b\right]$

ⓒ $(S3I)\left[g(x) := x-a\right]$

ⓓ $(S3I)\left[g(x) := \text{sen}\, x\right]$

(DICA: GUARDE AS IGUALDADES QUE VOCÊ OBTIVER — VOCÊ ESTÁ COMEÇANDO A FAZER A SUA TABELA DE INTEGRAIS!)

RESULTADO DO EXERCÍCIO ⓐ

ⓔ $(1a)\left[f(x) := \text{sen}\, x\right]$

ⓕ $(1a)\left[f(x) := \frac{1}{K}\text{sen}\, x\right]$

② USE AS IGUALDADES QUE VOCÊ OBTEVE PARA CALCULAR:

ⓐ $\int x^9\, \text{sen}(x^{10})\,dx = \int ?\ du \quad (u = ?)$

ⓑ $\int (3x+4)^{10}\,dx = \int ?\ du \quad (u = ?)$

$(1a) = \left(\int f(x^K)\cdot Kx^{K-1}dx = \int f(u)\,du\right)(u = x^K)$

$(1b) = \left(\int f(ax+b)\cdot a\,dx = \int f(u)\,du\right)(u = ax+b)$

$(1c) = \left(\int f(x-a)\,dx = \int f(u)\,du\right)(u = x-a)$

$(1d) = \left(\int f(\text{sen}\, x)\cos x\,dx = \int f(u)\,du\right)(u = \text{sen}\, x)$

$(1e) = \left(\int \text{sen}(x^K)\cdot Kx^{K-1}dx = \int \text{sen}\, u\,du\right)(u = x^K)$

$(1e) = \left(\int \text{sen}(x^K)\cdot Kx^{K-1}dx = \int \frac{1}{K}\text{sen}\, u\,du\right)(u = x^K)$

$(1f) = \left(\int \frac{1}{K}\text{sen}(x^K)\cdot Kx^{K-1}dx = \int \frac{1}{K}\text{sen}\, u\,du\right)(u = x^K)$

$\left(\int x^{K-1}\text{sen}(x^K)\,dx = \int \frac{1}{K}\text{sen}\, u\,du\right)$

$(TFC2I)\left[F(x) := -\cos x\right] = \left(\int \text{sen}\, x\,dx = -\cos x\right)$

$\int x^{K-1}\text{sen}(x^K)\,dx = \int \frac{1}{K}\text{sen}\, u\,du \quad (u = x^K)$

$= -\frac{1}{K}\cos u$

$= -\frac{1}{K}\cos(x^K)$

(☆) $\left(\int x^{K-1}\text{sen}(x^K)\,dx = -\frac{1}{K}\cos(x^K)\right)$

$(TFC2I)\left[F(x) := -\frac{1}{K}\cos(x^K)\right] = ?$

TRUQUE: PRA CONFERIR SE UMA INTEGRAL ESTÁ CERTA USE O TFC2I, OU O TFC2!!!

C2 24/ABRIL/2019

QUEREMOS RESOLVER O EXERCÍCIO (2a), QUE É:

$$\int x^9 \operatorname{sen}(x^{10})\,dx = \int ?\,du \qquad (u=?)$$

$$(1f')\,[k:=10] =$$

$$\left(\int x^9 \operatorname{sen} x^{10}\,dx = \int \tfrac{1}{10} \operatorname{sen} u\,du\right)(u=x^{10})$$

OBS: $\int x^9 \operatorname{sen}(x^{10})\,dx = \int \frac{1}{10} \operatorname{sen} u\,du \quad (u=x^{10})$

$$= -\tfrac{1}{10}\cos u$$
$$= -\tfrac{1}{10}\cos x^{10}$$

E PRA CONFERIR QUE

$$\int x^9 \operatorname{sen}(x^{10})\,dx = -\tfrac{1}{10}\cos x^{10}$$

PODEMOS FAZER A SUBSTITUIÇÃO

$$\left(\int F'(x)\,dx = F(x)\right)\left[F(x) = -\tfrac{1}{10}\cos x^{10}\right].$$

COMO FAZER ISSO DIRETO USANDO O TRUQUE SUJO $\frac{du}{dx}dx = du$ (E OUTROS)?

$$\begin{aligned}
&\int x^9 \operatorname{sen}(\underbrace{x^{10}}_{u})\,dx = \\
&\int x^9 \operatorname{sen}(u)\,\frac{du}{10\cancel{x^9}} = \\
&\int \tfrac{1}{10}\operatorname{sen} u\,du = \\
&\tfrac{1}{10}\int \operatorname{sen} u\,du = \\
&\tfrac{1}{10}\cdot(-\cos u) = \\
&-\tfrac{1}{10}\cos x^{10}
\end{aligned}
\qquad
\left(\begin{aligned}
&u = x^{10}\\
&\tfrac{du}{dx} = 10x^9\\
&du = 10x^9\,dx\\
&\tfrac{du}{10x^9} = dx
\end{aligned}\right)$$

OU, UM POUCO MAIS LIMPO:

$$\begin{aligned}
&\int x^9 \operatorname{sen}(x^{10})\,dx = \\
&\int \operatorname{sen}(x^{10})\,x^9\,dx = \\
&\int \operatorname{sen}(u)\cdot\tfrac{1}{10}\,du = \\
&\tfrac{1}{10}\int \operatorname{sen} u\,du = \\
&-\tfrac{1}{10}\cos u = \\
&-\tfrac{1}{10}\cos x^{10}
\end{aligned}
\qquad
\left(\begin{aligned}
&u = x^{10}\\
&\tfrac{du}{dx} = 10x^9\\
&du = 10x^9\,dx\\
&\tfrac{1}{10}du = x^9\,dx
\end{aligned}\right)$$

③ CALCULE USANDO OS TRUQUES SUJOS:

ⓐ $\int (3x+4)^{10}\,dx = ?$

ⓑ $\int x \operatorname{sen}(x^2+5)\,dx = ?$

ⓒ $\int \operatorname{sen} x \cos x\,dx = ?$

ⓓ $\int (\operatorname{sen} x)^5 \cos x\,dx = ?$

OBS: LEIAM EM CASA A SEÇÃO 6.1 DO LIVRO!

ⓐ
$$\begin{aligned}
&\int (3x+4)^{10}\,dx = \\
&\int u^{10}\cdot\tfrac{1}{3}\,du = \\
&\tfrac{1}{3}\int u^{10}\,du = \\
&\tfrac{1}{3}\,\tfrac{1}{11}\,u^{11} = \\
&\tfrac{1}{33}(3x+4)^{11}
\end{aligned}
\qquad
\left(\begin{aligned}
&u = 3x+4\\
&\tfrac{du}{dx} = 3\\
&du = 3\,dx\\
&dx = \tfrac{1}{3}du
\end{aligned}\right)$$

$$\int x^k\,dx = \tfrac{1}{k+1}x^{k+1}$$

ⓑ DICA: $u = x^2+5$

$$\begin{aligned}
&\int x \operatorname{sen}(x^2+5)\,dx = \\
&\int \operatorname{sen}(x^2+5)\,x\,dx = \\
&\int (\operatorname{sen} u)\cdot\tfrac{1}{2}\,du = \\
&\tfrac{1}{2}\int \operatorname{sen} u\,du = \\
&-\tfrac{1}{2}\cos u = \\
&-\tfrac{1}{2}\cos(x^2+5)
\end{aligned}
\qquad
\left(\begin{aligned}
&u = x^2+5\\
&\tfrac{du}{dx} = 2x\\
&du = 2x\,dx\\
&\tfrac{1}{2}du = x\,dx
\end{aligned}\right)$$

ⓓ
$$\begin{aligned}
&\int (\operatorname{sen} x)^5 \cos x\,dx = \\
&\int u^5\,du = \\
&\tfrac{1}{6}u^6 = \\
&\tfrac{1}{6}(\operatorname{sen} x)^6
\end{aligned}
\qquad
\left(\begin{aligned}
&u = \operatorname{sen} x\\
&\tfrac{du}{dx} = \cos x\\
&du = \cos x\,dx
\end{aligned}\right)$$

ⓒ
$$\begin{aligned}
&\int \operatorname{sen} x\,\underbrace{\cos x\,dx}_{du} = \\
&\int u\,du = \\
&\tfrac{1}{2}u^2 = \\
&\tfrac{1}{2}(\operatorname{sen} x)^2
\end{aligned}
\qquad
\left(\begin{aligned}
&u = \operatorname{sen} x\\
&\tfrac{du}{dx} = \cos x\\
&\cos x\,dx = du
\end{aligned}\right)$$

C2 26/ABRIL/2019

NA AULA PASSADA NÓS COMEÇAMOS A VER O MÉTODO PRÁTICO DE FAZER INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO...

NÓS USAMOS ALGUMAS GAMBIARRAS QUE EU PROMETI QUE DEPOIS VIRARIAM ABREVIAÇÕES PARA ALGO FORMAL.

DICA: LEIAM A SEÇÃO 6.1 DO LIVRO EM CASA! ELE COMEÇA COM INTEGRAIS INDEFINIDAS...

EXEMPLO:

$$\int (\operatorname{sen} x)^3 (\cos x)^5 \, dx$$

A TÉCNICA QUE A GENTE VAI VER SERVE PRA RESOLVER

$$\int (\operatorname{sen} x)^\alpha (\cos x)^\beta \, dx$$

QUANDO α OU β FOREM ÍMPARES.

QUANDO α E β SÃO PARES ESSA TÉCNICA NÃO FUNCIONA.

TRUQUE: CRIAR VARIÁVEIS NOVAS - EU PREFIRO USAR NOMES "DESCRITIVOS" PRA ELAS AO INVÉS DE SEMPRE USAR U...

MEUS NOMES PREFERIDOS:

$c = \cos x$

$s = \operatorname{sen} x$

$$\int (\underbrace{\operatorname{sen} x}_{s})^3 (\cos x)^5 \, dx =$$

$$\int (\operatorname{sen} x)^3 (\cos x)^4 \cos x \, dx =$$

$$\int (\underbrace{\operatorname{sen} x}_{s})^3 (\underbrace{(\cos x)^2}_{1-s^2})^2 \underbrace{\cos x \, dx}_{ds} =$$

$$\int s^3 (1-s^2)^2 \, ds =$$

$$\int s^3 (s^4 - 2s^2 + 1) \, ds =$$

$$\int s^7 - 2s^5 + s^3 \, ds =$$

$$\int s^7 ds - 2\int s^5 ds + \int s^3 ds =$$

$$\frac{s^8}{8} - 2\frac{s^6}{6} + \frac{s^4}{4} =$$

$$\frac{(\operatorname{sen} x)^8}{8} - \frac{(\operatorname{sen} x)^6}{3} + \frac{(\operatorname{sen} x)^4}{4}$$

$$\left(\begin{array}{l} s = \operatorname{sen} x \\ \frac{ds}{dx} = \cos x \\ \cos x \, dx = ds \\ (\cos x)^2 = 1 - (\operatorname{sen} x)^2 \\ \qquad = 1 - s^2 \end{array} \right)$$

⇑ OS LIVROS COSTUMAM USAR SÓ "$(s = \operatorname{sen} x)$" E DEIXAR O RESTO IMPLÍCITO...

A GENTE VAI USAR ALGO COMO

$$\left(\begin{array}{c} s = \operatorname{sen} x \\ \vdots \end{array} \right)$$

COM VÁRIAS INFORMAÇÕES REDUNDANTES - CONSEQUÊNCIAS DA PRIMEIRA - QUE VÃO DEIXAR AS COISAS MAIS CLARAS

OBS MUITO IMPORTANTE:

VOCÊ NÃO PRECISA ACREDITAR NA CONTA

$$\int (\operatorname{sen} x)^3 (\cos x)^5 dx = \frac{(\operatorname{sen} x)^8}{8} - \frac{(\operatorname{sen} x)^6}{3} + \frac{(\operatorname{sen} x)^4}{4}$$

VOCÊ PODE VERIFICÁ-LA!

$$(TFC2I) = \left(\int F'(x) \, dx = F(x) \right)$$

SEJA $F(x) = \frac{(\operatorname{sen} x)^8}{8} - \frac{(\operatorname{sen} x)^6}{3} + \frac{(\operatorname{sen} x)^4}{4}$

CALCULE $F'(x)$ E COMPARE COM $(\operatorname{sen} x)^3 (\cos x)^5$!

C2 26/ABRIL/2019

EXERCÍCIO: RESOLVA ESSA INTEGRAL USANDO OUTRA SUBSTITUIÇÃO:

$$\left(\begin{array}{l} c = \cos x \\ \frac{dc}{dx} = -\operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x\, dx = -dc \\ (\operatorname{sen} x)^2 = 1-(\cos x)^2 \end{array}\right)$$

$$dc = -\operatorname{sen} x\, dx$$
$$-dc = \operatorname{sen} x\, dx$$

EXEMPLO:
$$\boxed{\int (\operatorname{sen} x)^3 (\cos x)^5 dx}$$

$$\int (\operatorname{sen} x)^3 (\cos x)^5 dx =$$
$$\int (\operatorname{sen} x)^2 (\cos x)^5 \operatorname{sen} x\, dx =$$
$$\int (1-(\cos x)^2)(\cos x)^5 \operatorname{sen} x\, dx =$$
$$\int (1-c^2) c^5 (-1)\, dc =$$
$$\int (c^2-1) c^5\, dc =$$
$$\int c^7 - c^5\, dc =$$
$$\frac{c^8}{8} - \frac{c^6}{6} =$$
$$\frac{(\cos x)^8}{8} - \frac{(\cos x)^6}{6}$$

UMA DAS VANTAGENS DA GENTE NÃO ESCREVER OS LIMITES DE INTEGRAÇÃO É...

$$\int \cos(2x+3)\, dx =$$
$$\int \cos(u) \tfrac{1}{2} du =$$
$$\frac{1}{2} \int \cos(u)\, du$$

$$\left(\begin{array}{l} u = 2x+3 \\ \frac{du}{dx} = 2 \\ du = 2dx \\ dx = \frac{1}{2} du \end{array}\right)$$

$$\int_{x=a}^{x=b} \cos(2x+3)\, dx = \quad (\star)$$
$$\frac{1}{2} \int_{u=2a+3}^{u=2b+3} \cos u\, du$$

(PELO TFC2 !!!)

IDÉIA: E SE QUISERMOS USAR ESTA $(\star)$ NA OUTRA DIREÇÃO?

$$\frac{1}{2} \int_{u=6}^{u=7} \cos u\, du = \int_{x=?}^{x=?} \cos(2x+3)\, dx$$

REPARE:

$$(\star)\begin{bmatrix} a := \frac{6-3}{2} \\ b := \frac{7-3}{2} \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{2} \int_{u=2\left(\frac{6-3}{2}\right)+3}^{u=2\left(\frac{7-3}{2}\right)+3} \cos u\, du = \int_{x=\frac{6-3}{2}}^{x=\frac{7-3}{2}} \cos(2x+3)\, dx \right)$$

$$(\star)\begin{bmatrix} a := \frac{\alpha-3}{2} \\ b := \frac{\beta-3}{2} \end{bmatrix} = \;?$$

$$(\mathrm{TFC2})\begin{bmatrix} a := g^{-1}(\alpha) \\ b := g^{-1}(\beta) \end{bmatrix} = \;?$$

CASA!!!

CASA!!! MUITO IMPORTANTE!

UMA DAS VANTAGENS DA GENTE NÃO ESCREVER OS LIMITES DE INTEGRAÇÃO É QUE A GENTE NÃO PRECISA DISTINGUIR (TF2) DE $(\mathrm{TFC2})\begin{bmatrix} a := g^{-1}(\alpha) \\ b := g^{-1}(\beta) \end{bmatrix}$.

C2 26/ABRIL/2019

PAUSA PRA VER COISAS QUE NÃO SÃO INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO!

A GENTE JÁ VIU COMO INTEGRAR POLINÔMIOS,

COMO INTEGRAR

$\int e^{f(x)} f'(x)\,dx$,

$\int (\operatorname{sen} x)^{\alpha} (\cos x)^{\beta}\,dx$...

PRA INTEGRAR COISAS COMO $\int x^2 e^x\,dx$ A GENTE VAI USAR INTEGRAÇÃO POR PARTES

QUE É ÚTIL BEM RARAMENTE...

E PRA INTEGRAR

$\int \frac{1}{x}\,dx$ E $\int \ln x\,dx$?

LEMBREM QUE SE f E g SÃO INVERSAS — NO SENTIDO QUE

$f(g(x)) = x$ SEMPRE —

ENTÃO $\frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{d}{dx} x = 1$

$$\underset{f'(g(x))\,g'(x)}{\overset{\shortparallel}{}}$$

OU SEJA:

$f'(g(x))\,g'(x) = 1$

$$\boxed{g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}}$$

(!!!)

SABEMOS QUE

$\frac{d}{dx} e^x = e^x$,

$e^{\ln x} = x$,

$\ln(e^x) = x$,

$$\left(g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \right) \begin{bmatrix} g(x) = \ln x \\ f(x) = e^x \end{bmatrix} =$$

$$\left(\ln' x = \frac{1}{e^{\ln x}} \right)$$

$$\boxed{\ln' x = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}}$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int \ln' x\,dx = \ln x$$

$$\int_{x=1}^{x=2} \frac{1}{x}\,dx = (\ln x)\Big|_{x=1}^{x=2} = \ln 2 - \underbrace{\ln 1}_{0}$$

$$\int_{x=1}^{x=e} \frac{1}{x}\,dx = (\ln x)\Big|_{x=1}^{x=e} = \underbrace{\ln e}_{1} - \underbrace{\ln 1}_{0} = 1$$

$f(x) = e^x$

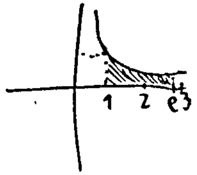
$f(42) = e^{42}$

$f'(x) = e^x$

$f'(200) = e^{200}$

$f'(g(x)) = e^{g(x)}$!

$f'(\ln(x)) = e^{\ln x}$



INTEGRAÇÃO POR PARTES

$$(TFC2I)\left[F(x) := g(x)h(x)\right]$$

$$= \left(\int g'(x)h(x) + g(x)h'(x)\,dx = g(x)h(x) \right)$$

$$\int g'(x)h(x)\,dx + \int g(x)h'(x)\,dx = g(x)h(x)$$

$$\int g'(x)h(x)\,dx = g(x)h(x) - \int g(x)h'(x)\,dx \quad (IPI_{g'h})$$

$$\int g(x)h'(x)\,dx = g(x)h(x) - \int g'(x)h(x)\,dx \quad (IPI_{gh'})$$

ABREVIAÇÃO (TEMPORÁRIA!): $g = g(x)$, $h = h(x)$, $g' = g'(x)$, $h' = h'(x)$

$$(IPI_{g'h}) = \left(\int g'h\,dx = gh - \int gh'\,dx \right)$$

$$(IPI_{gh'}) = \left(\int gh'\,dx = gh - \int g'h\,dx \right)$$

$$(IPI_{gh'})\begin{bmatrix} g(x) := x \\ h(x) := e^x \end{bmatrix} = \left(\int xe^x\,dx = xe^x - \int 1 \cdot e^x\,dx \right)$$

$$\int xe^x\,dx = xe^x - e^x$$

$$\int \underbrace{g}_{x}\,\underbrace{h'}_{e^x}\,dx = \underbrace{g}_{x}\,\underbrace{h}_{e^x} - \int \underbrace{g'}_{1}\,\underbrace{h}_{e^x}\,dx$$

C2 26/ABRIL/2019

ACABAMOS DE VER QUE

$$\int x e^x dx = x e^x - \int 1 \cdot e^x dx$$
$$= x e^x - \int e^x dx$$
$$= x e^x - e^x.$$

E $\int x^2 e^x dx$?

$$\int \underbrace{g}_{x^2} \underbrace{h'}_{e^x} dx = \underbrace{g}_{x^2} \underbrace{h}_{e^x} - \int \underbrace{g'}_{2x} \underbrace{h}_{e^x} dx$$

$$\int x^2 e^x = x^2 e^x - \int 2x e^x dx$$
$$= x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$$
$$= x^2 e^x - 2 (x e^x - e^x)$$

DÁ PRA FAZER ISSO
PRA $\int x^3 e^x dx$,
PRA $\int x^4 e^x dx$ ...

SABEMOS QUE
$\ln' x = \frac{1}{x}$ ...

MAS E $\int \ln x \, dx$?

TRUQUE: ⊙⊙

$$\int \ln x \, dx = ?$$

$$\int \underbrace{1}_{g'} \underbrace{\ln x}_{h} dx = \underbrace{x}_{g} \underbrace{\ln x}_{h} - \int \underbrace{x}_{g} \underbrace{\frac{1}{x}}_{h'} dx$$
$$= x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx$$
$$= x \ln x - \int 1 \, dx$$
$$= x \ln x - x$$

$$\boxed{\int \ln x \, dx = x \ln x - x}$$

C2 3/maio/2019

AVISO: NAS PRÓXIMAS DUAS AULAS - 8/MAIO E 10/MAIO - EU VOU ESTAR NUM CONGRESSO... MAS VOU PASSAR DOIS TRABALHINHOS PRA VOCÊS FAZEREM VALENDO NOTA. SÓ VOU PODER ENVIÁ-LOS NO FIM DE SEMANA, POR E-MAIL!!!

HOJE: SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA!

S.T. É UM TIPO DE INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO QUE É COMPLICADO PRA CARAMBA MAS RESOLVE MUITAS COISAS.

LEMBREM QUE QUANDO A GENTE VAI FAZER UMA SUBSTITUIÇÃO A GENTE FAZ UMAS ANOTAÇÕES INDICANDO A VARIÁVEL NOVA E ALGUMAS OUTRAS COISAS QUE A GENTE VAI SUBSTITUIR... POR EXEMPLO,

$$\int (\operatorname{sen} x)^3 (\cos x)^5 dx \qquad \left(\begin{array}{l} s = \operatorname{sen} x \\ \frac{ds}{dx} = \cos x \\ \cos x\, dx = ds \end{array} \right)$$

$= \ldots$

$$\int (\operatorname{sen} x)^3 (\cos x)^5 dx =$$

$$\int \underbrace{(\operatorname{sen} x)^3}_{s} \underbrace{((\cos x)^2)^2}_{1-s^2} \underbrace{\cos x\, dx}_{ds} =$$

$$\int s^3 (1-s^2)^2 ds$$

OS LIVROS SÓ COSTUMAM ESCREVER "$(s = \operatorname{sen} x)$".

UM TRUQUE (QUE NÃO É PADRÃO MAS ME AJUDA A BEÇA): ESCREVER AS SUBSTITUIÇÕES COM "$\to$"...

$$\int (\operatorname{sen} x)^3 (\cos x)^5 dx = \qquad \left(\begin{array}{l} s = \operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x \to s \\ \frac{ds}{dx} = \cos x \\ \cos x\, dx \to ds \\ (\cos x)^2 \to 1 - s^2 \end{array} \right)$$

A SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA VAI USAR ISSO MAS COM UM TRUQUE EXTRA...

$$\int x \sqrt{1-x^2}\, dx = ?$$

$\overset{\shortparallel}{?}$ COMO É QUE A GENTE SE LIVRA DISSO?

RENOMEANDO...

$$\int s \sqrt{1-s^2}\, ds =$$

$$\int \operatorname{sen} \theta \cos \theta \cos \theta\, d\theta$$

$$\left(\begin{array}{l} s \to \operatorname{sen} \theta \\ \sqrt{1-s^2} = \sqrt{1-(\operatorname{sen}\theta)^2} \\ \quad = \cos \theta \\ \sqrt{1-s^2} \to \cos \theta \\ \frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \operatorname{sen} \theta = \cos \theta \\ ds \to \cos \theta\, d\theta \end{array} \right)$$

E AGORA?

$$\int s \sqrt{1-s^2}\, ds = \qquad (s = \operatorname{sen} \theta)$$

$$\int \operatorname{sen} \theta (\cos \theta)^2 d\theta = \qquad (c = \cos \theta)$$

?

EXERCÍCIOS:

1. FAÇA TODO O "BLOQUINHO DE SUBSTITUIÇÕES" ASSOCIADO AO "$(c = \cos \theta)$"
2. TRANSFORMEM $\int \operatorname{sen} \theta (\cos \theta)^2 d\theta$ NUMA INTEGRAL EM c,
3. RESOLVAM ESSA INTEGRAL,
4. VOLTE PARA A VARIÁVEL θ,
5. VOLTE PARA A VARIÁVEL s.

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{l} c = \cos \theta \\ \cos \theta \to c \\ \frac{dc}{d\theta} = -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta\, d\theta \to (-1)\, dc \\ (\operatorname{sen} \theta)^2 \to 1 - c^2 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \int (\cos \theta)^2 \operatorname{sen} \theta\, d\theta = \int c^2 (-1)\, dc$$

$$\Rightarrow = -\int c^2 dc = -\frac{c^3}{3}$$

$$\Rightarrow = -\frac{(\cos \theta)^3}{3}$$

$$\Rightarrow = -\frac{(\cos \operatorname{arcsen} s)^3}{3}$$

EM SUBSTITUIÇÕES TRIGONOMÉTRICAS ÀS VEZES A GENTE VAI CHEGAR A COISAS COMO $\cos \operatorname{arcsen} s$... COMO É QUE A GENTE SIMPLIFICA ELAS?

LEMBRE QUE QUANDO A GENTE FAZ UMA SUBSTITUIÇÃO - P.EX., $u = 2x+3$ - A GENTE ÀS VEZES PENSA QUE x E u "VARIAM JUNTOS" SEMPRE OBEDECENDO

$u = 2x+3$

$u - 3 = 2x$

$\frac{u-3}{2} = x$

ESTAMOS FAZENDO ALGO ASSIM AGORA, MAS COM $s = \operatorname{sen} \theta$, $c = \cos \theta$, $s = \sqrt{1-c^2}$, $c = \sqrt{1-s^2}$, $\theta = \operatorname{arcsen} s$,

C2 3/MAIO/2019

RELAÇÕES ENTRE
c, s, θ, CONTINUAÇÃO...

$c = \cos\theta$ $\quad \theta = \text{arccos}\, c$

$s = \text{sen}\,\theta$ $\quad \theta = \text{arcsen}\, s$

$c = \sqrt{1-s^2}$

$s = \sqrt{1-c^2}$

$$\cos \text{arcsen}\, s = \cos\theta = c = \sqrt{1-s^2}$$

NA VERDADE A GENTE TEM VÁRIOS TIPOS DE SUBSTITUIÇÕES TRIGONOMÉTRICAS...
OS PRINCIPAIS SÃO:

1. $s = \text{sen}\,\theta$, $\sqrt{1-s^2} = \cos\theta$
2. $t = \tan\theta$, ...
3. $z = \sec\theta$, ...

EU COSTUMO USAR SEMPRE
$s = \text{sen}\,\theta$,
$t = \tan\theta$,
$z = \sec\theta$ PRA NÃO ME PERDER...

$\tan\theta = \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$ $\qquad \sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$

$t = \dfrac{s}{c}$ $\qquad z = \dfrac{1}{c}$

$$t^2 = \frac{s^2}{c^2} = \frac{1-c^2}{c^2} = \frac{1}{c^2} - \frac{c^2}{c^2} = \frac{1}{c^2} - 1 = z^2 - 1$$

$z^2 = \dfrac{1}{c^2}$

$$t^2 = z^2 - 1$$
$$1 + t^2 = z^2$$
$$1 = z^2 - t^2$$

FÁCIL DE LEMBRAR:

$$z^2 = \frac{1}{c^2} = \frac{s^2+c^2}{c^2} = \frac{s^2}{c^2} + \frac{c^2}{c^2} = t^2 + 1$$

$$t = \sqrt{z^2-1}$$
$$z = \sqrt{1+t^2}$$
$$\tan\theta = \sqrt{(\sec\theta)^2 - 1}$$
$$\sec\theta = \sqrt{1 + (\tan\theta)^2}$$

PRA QUE ISSO SERVE?

$$\int x^\alpha \sqrt{1-x^2}^{\,\beta}\, dx = ?$$

$$\int \underbrace{s}_{\text{sen}\,\theta}^{\alpha} \underbrace{\sqrt{1-s^2}}_{\cos\theta}^{\,\beta} \underbrace{ds}_{\overset{?}{\cos\theta\, d\theta}} = ?$$

$$\int x^\alpha \sqrt{1+x^2}^{\,\beta}\, dx = ?$$

$$\int \underbrace{t}_{\tan\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}}^{\alpha} \underbrace{\sqrt{1+t^2}}_{\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}}^{\,\beta} \underbrace{dt}_{?}$$

$$\int x^\alpha \sqrt{x^2-1}^{\,\beta}\, dx = ?$$

$$\int \underbrace{z}_{\sec\theta}^{\alpha} \underbrace{\sqrt{z^2-1}}_{\tan\theta}^{\,\beta} \underbrace{dz}_{?}$$

EXERCÍCIO:

1. $\dfrac{dz}{d\theta} = ?$ $\qquad \dfrac{d}{d\theta}(\cos\theta)^{-1} = ?$
2. $\dfrac{dt}{d\theta} = ?$ $\qquad \dfrac{d}{d\theta}\dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = ?$

DICA:

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{g(x)} = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$$

$$\frac{d}{dx} g(x)^{-1} = -g(x)^{-2} g'(x)$$

?

$$\frac{d}{d\theta}\frac{s}{c} = \frac{s'c - sc'}{c^2} = \frac{cc+ss}{c^2} = \frac{1}{c^2}$$

$$\frac{d}{d\theta} t = z^2$$

$$\frac{dt}{d\theta} = z^2$$

$$\boxed{dt = z^2\, d\theta}$$

$$\frac{d}{d\theta}\frac{1}{c} = -\frac{c'}{c^2} = -\frac{-s}{c^2} = \frac{s}{c^2} = \frac{1}{c}\cdot\frac{s}{c}$$

$$\frac{d}{d\theta} z = zt$$

$$\frac{dz}{d\theta} = zt$$

$$\boxed{dz = zt\, d\theta}$$

ENTÃO:

$$\begin{pmatrix} s \to \text{sen}\,\theta \\ \sqrt{1-s^2} \to \cos\theta \\ ds \to \cos\theta\, d\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t \to \tan\theta \\ \sqrt{1+t^2} \to \sec\theta \\ dt \to (\sec\theta)^2 d\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z \to \sec\theta \\ \sqrt{z^2-1} \to \tan\theta \\ dz \to \sec\theta \tan\theta\, d\theta \end{pmatrix}$$

C2 3/MAIO/2019

EXERCÍCIO:

REPARE QUE DÁ PRA FAZER UMA FÓRMULA GERAL PRA "RESOLVER" — ALIÁS, "SIMPLIFICAR" — INTEGRAIS DO TIPO

$$\int s^\alpha \sqrt{1-s^2}^\beta ds \ldots$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\int s^\alpha \sqrt{1-s^2}^\beta ds = \\ &\int (\operatorname{sen}\theta)^\alpha (\cos\theta)^\beta \cos\theta \, d\theta = \\ &\int (\operatorname{sen}\theta)^\alpha (\cos\theta)^{\beta+1} d\theta\end{aligned}}$$

FAÇA ALGO PARECIDO PARA:

(a) $\int t^\alpha \sqrt{1+t^2}^\beta dt$,

(b) $\int z^\alpha \sqrt{z^2-1}^\beta dz$.

USANDO Z, T, C, S COMO ~~ABREVIAÇÕES~~ PARA $\sec\theta$, $\tan\theta$, $\cos\theta$, $\operatorname{sen}\theta$ EM ALGUNS LUGARES, TEMOS:

$$\int t^\alpha \underbrace{\sqrt{1+t^2}}_{z}{}^\beta \underbrace{dt}_{z^2 d\theta}$$

$$= \int t^\alpha z^\beta z^2 \, d\theta$$

$$= \int t^\alpha z^{\beta+2} d\theta$$

$$= \int \left(\frac{s}{c}\right)^\alpha \left(\frac{1}{c}\right)^{\beta+2} d\theta$$

$$= \int s^\alpha c^{-\alpha-\beta-2} d\theta$$

$\boxed{\text{C2 17/maio/2019}}$

Hoje: frações parciais – e truques pra visualizar polinômios e pra fazer contas com polinômios de cabeça!

Em sistemas de computação algébrica existem duas operações mais ou menos inversas uma da outra...

$f := \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+3}$

$\text{together}(f) = \frac{x+3}{(x-2)(x+3)} + \frac{x-2}{(x-2)(x+3)}$

$= \frac{2x+1}{(x-2)(x+3)}$

$= \frac{2x+1}{x^2+x-6}$

$g := \frac{2x+1}{x^2+x-6}$

$\text{apart}(g) = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+3}$

"together" junta várias frações com denominadores simples numa só, e retorna uma fração só – uma "função racional", que é algo da forma $\frac{p(x)}{q(x)}$ onde $p(x)$, $q(x)$ são polinômios).

A "apart" "desmonta" frações (funções racionais) com denominadores complicados em frações com denominadores simples.

$$\boxed{\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+3}} \underset{\text{APART (DIFÍCIL)}}{\overset{\text{TOGETHER (FÁCIL)}}{\rightleftarrows}} \boxed{\frac{2x+1}{x^2+x-6}}$$

$$\int \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+3}\,dx = \int \frac{1}{x-2}\,dx + \int \frac{1}{x+3}\,dx$$
$$= \ln|x-2| + \ln|x+3|$$

(A gente ainda não viu o porquê desse "11").

Alguns truques com polinômios

Vamos ver dois jeitos de visualizar polinômios no curso... O de hoje é pra polinômios em uma variável.

$$4x^3 + 10x^2 + 9 = \boxed{\begin{array}{c|c|c|c} 4 & 10 & 0 & 9 \end{array}}$$

coef do x^0 — coef do x^1 — coef do x^2 — coef do x^3

$$= \boxed{\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 4 & 10 & 0 & 9 \end{array}}$$

Truque: contas com polinômios escritos desse jeito são como contas com números sem "vai 1"!

Exemplos:

$$\begin{array}{r} \boxed{\begin{array}{c|c|c|c} 6 & 7 & 8 & 9 \end{array}} \\ + \quad \boxed{\begin{array}{c|c|c} 10 & 20 & 30 \end{array}} \\ \hline \boxed{\begin{array}{c|c|c|c} 6 & 17 & 28 & 39 \end{array}} \end{array}$$

$6x^3 + 7x^2 + 8x + 9$
$+10x^2 + 20x + 30$
$= 6x^3 + 17x^2 + 28x + 39$

$$\begin{array}{r} \boxed{\begin{array}{c|c|c|c} 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}} \\ * \quad \boxed{\begin{array}{c|c|c} 4 & 10 & 200 \end{array}} \\ \hline \boxed{\begin{array}{c|c|c|c} 400 & 600 & 800 & 1000 \end{array}} \\ \boxed{\begin{array}{c|c|c|c|c} 20 & 30 & 40 & 50 & 0 \end{array}} \\ \boxed{\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 8 & 12 & 16 & 20 & 0 & 0 \end{array}} \\ \hline \boxed{\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 8 & 32 & 146 & 660 & 850 & 1000 \end{array}} \end{array}$$

$(2x^3 + 3x^2 + 4x + 5)$
$\cdot\ (4x^2 + 10x + 200)$
$= (2x^3 + 3x^2 + 4x + 5) \cdot 200$
$+ (2x^3 + 3x^2 + 4x + 5) \cdot 10x$
$+ (2x^3 + 3x^2 + 4x + 5) \cdot 4x^2$

Exercícios:

$$\begin{array}{r} \boxed{\begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}} \\ * \quad \boxed{\begin{array}{c|c} 1 & 2 \end{array}} \\ \hline ? \end{array} \qquad \begin{array}{r} \boxed{\begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}} \\ * \quad \boxed{\begin{array}{c|c} 1 & -1 \end{array}} \\ \hline \end{array}$$

Agora algo mais difícil: divisão de polinômios.

E ainda por cima: com resto!

Se $p(x) = \boxed{\begin{array}{c|c|c|c} 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}}$

e $q(x) = \boxed{\begin{array}{c|c|c} 4 & 10 & 200 \end{array}}$

então $p(x) \cdot q(x) =$

$$\boxed{\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 8 & 32 & 446 & 660 & 850 & 1000 \end{array}}$$

e se $r(x) = \boxed{\begin{array}{c|c} -850 & 0 \end{array}}$

então $p(x) \cdot q(x) + r(x)$

$$= \boxed{\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 8 & 32 & 446 & 660 & 0 & 1000 \end{array}} = \alpha(x)$$

Repare que este "resto" $r(x)$ tem grau 1, e $q(x)$ tem grau 2.

Vamos aprender a dividir qualquer polinômio $\alpha(x)$ por um polinômio $q(x)$, obter um resultado $p(x)$ e um resto $r(x)$ com grau menor que o grau do $q(x)$. Formalmente: $\alpha(x) = p(x) \cdot q(x) + r(x)$

$$\begin{array}{l|l} \alpha(x) & q(x) \\ \cline{2-2} \vdots & p(x) \\ r(x) & \end{array}$$

C2 17/MAIO/2019

$d(x)$ $\quad$ $q(x)$

8	32	446	660	0	1000

÷

4	10	200

2	3	4	5

$= p(x)$

Passos da divisão:

− [8 | 20 | 400 | ◌ | ◌ | ◌] $= [4|10|200] * [2|0|0|0]$

[12 | 46 | 660 | 0 | 1000]

− [12 | 30 | 600] $= [4|10|200] * [3|0|0]$

[16 | 60 | 0 | 1000]

− [16 | 40 | 800] $= [4|10|200] * [4|0]$

[20 | −800 | 1000]

− [20 | 50 | 1000] $= [4|10|200] * [5]$

[−850 | 0]

$r(x)$

EXERCÍCIOS:

1. DIVIDA [1 | 0 | 0 | 0 | 0] POR [1 | 2 | 3] (COM RESTO).

2. CALCULE TOGETHER $\left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+5}\right)$ USANDO A NOTAÇÃO DE CAIXINHAS. VEJA O QUE VOCÊ CONSEGUE FAZER DE CABEÇA (SEM ERRAR!! ☺).

3. CALCULE TOGETHER $\left(1000 + 100x + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+5}\right)$

P/ CASA! DICA: O RESULTADO É UMA FUNÇÃO RACIONAL <u>IM</u>PRÓPRIA.

RESP: $=$ $\dfrac{[3 | 10 | -4]}{[1 | 5 | -4 | -20]}$

[3 | 10 | −4] ← GRAU 2

[1 | 5 | −4 | −20] ← GRAU 3

TERMINOLOGIA:

UMA FUNÇÃO RACIONAL $\frac{p(x)}{q(x)}$ É "PRÓPRIA" QUANDO $\text{GRAU}(p(x)) < \text{GRAU}(q(x))$.

A GENTE SOMOU 3 FUNÇÕES RACIONAIS PRÓPRIAS E O RESULTADO FOI UMA OUTRA FUNÇÃO RACIONAL PRÓPRIA! PORQUÊ??? PENSE EM CASA!!!

C2 17/maio/2019

O jeito conceitualmente fácil de fazer o "apart" em frações racionais próprias é por resolução de sistemas.

Exemplo: $\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5}$

e queremos descobrir os valores de $A, B \in \mathbb{R}$.

$$\text{together}\left(\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5}\right) = \frac{A \cdot \boxed{1|5} + B \cdot \boxed{1|-2}}{\boxed{1|3|-10}}$$

$$= \frac{\boxed{A|5A} + \boxed{B|-2B}}{\boxed{1|3|-10}}$$

$$= \frac{\boxed{A+B|5A-2B}}{\boxed{1|3|-10}}$$

Como é que a gente encontra A e B?

Queremos:

$$\frac{\boxed{2|3}}{\boxed{1|3|-10}} = \frac{\boxed{A+B|5A-2B}}{\boxed{1|3|-10}}$$

Ou seja, queremos $A, B \in \mathbb{R}$ tais que $A+B=2$, $5A-2B=3$.

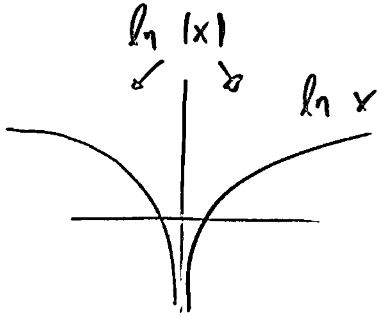
Resp: $A=1$, $B=1$,

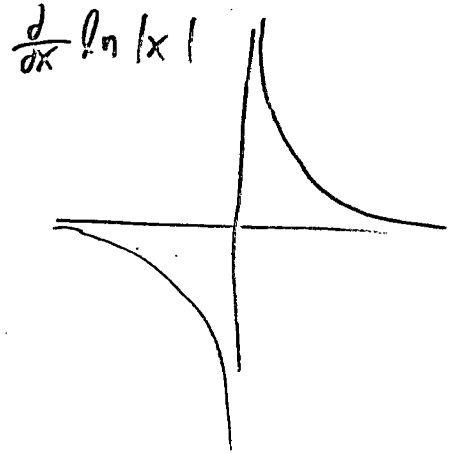
$$\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+5}$$

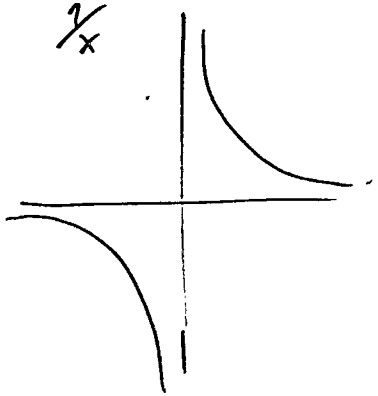
$$\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,dx = \int \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+5}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{x+2}\,dx + \int \frac{1}{x+5}\,dx$$

$$= \ln|x+2| + \ln|x+5|.$$

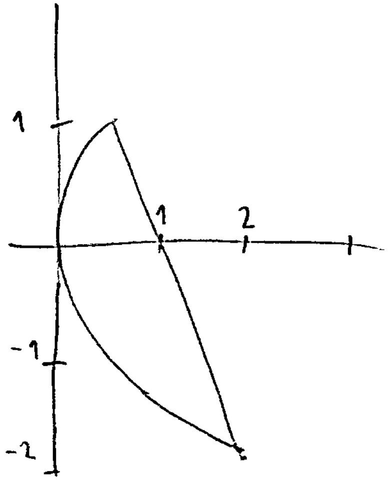


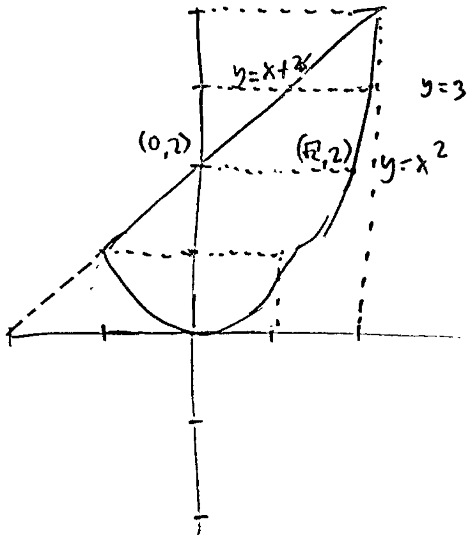




C2 22/maio/2019

Dúvidas!





y=3 LARGURA DO CORTE EM y=2

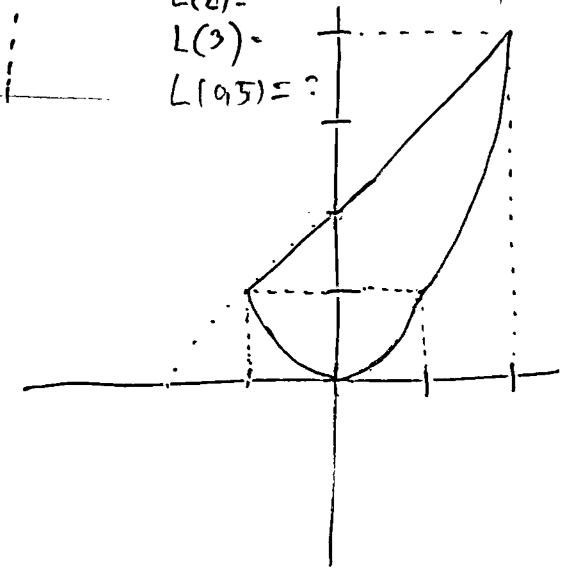
$L(0)=0$

$L(1)=2$

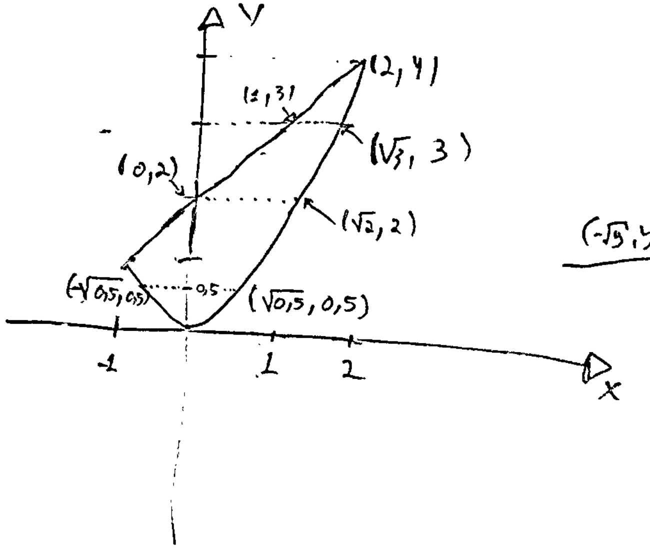
$L(2)=$

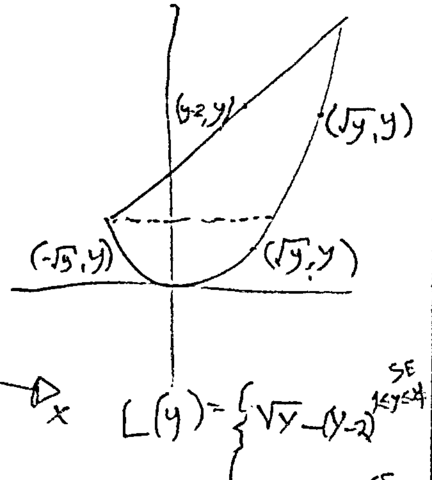
$L(3)=$

$L(0,5)=?$



$$\int_{y=0}^{y=4} L(y)\,dy = \int_{y=0}^{y=1} L(y)\,dy + \int_{y=1}^{y=4} L(y)\,dy = \int_{y=0}^{y=1} 2\sqrt{y}\,dy + \int_{y=1}^{y=4} \sqrt{y}-(y-2)\,dy$$



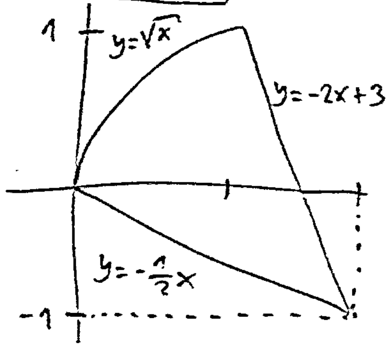


$$L(y)=\begin{cases} \sqrt{y}-(y-2) & \text{SE } 1\le y\le 4 \\ \sqrt{y}-(-\sqrt{y}) & \text{SE } 0\le y\le 1 \end{cases}$$

C2 22/maio/2019

Dúvidas!

P1: 5/junho!



$f(x)=\sqrt{x}$

$g(x)=-\frac{1}{2}x$

$$\int_0^1 f(x)-g(x)\,.dx$$

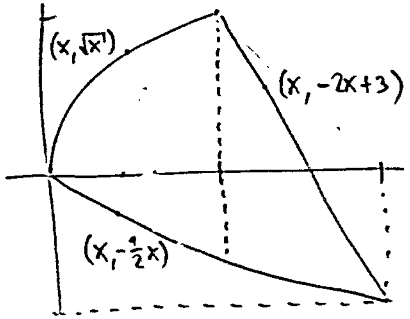
$$+\int_1^2 h(x)-g(x)\,.dx:$$

H(3) = altura do corte em x=3

H(0)=

H(1)=

H(2)=

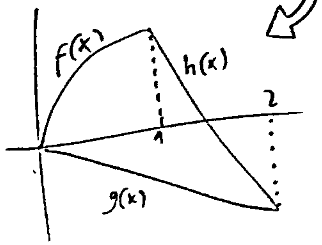


Sejam $f(x)=\sqrt{x}$,

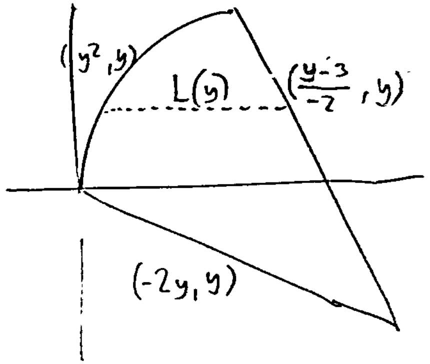
$g(x)=-\frac{1}{2}x$,

$h(x)=-2x+3$.

Então a figura fica

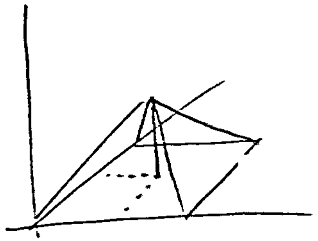


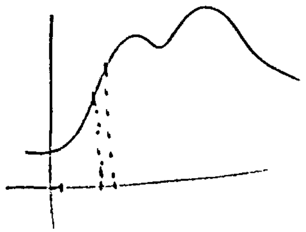
$$\text{e}\quad H(x)=\begin{cases} f(x)-g(x) & \text{se } 0\leq x\leq 1 \\ h(x)-g(x) & \text{se } 1\leq x\leq 2 \end{cases}$$

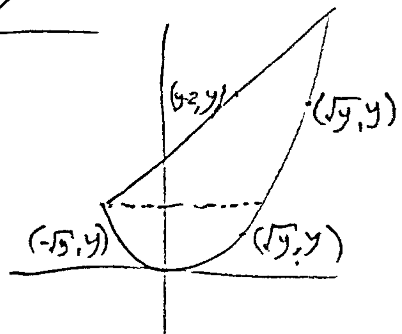


$$L(y)=\begin{cases} \frac{y-3}{-2}-y^2 & \text{se } 0\leq y\leq 1 \\ \frac{y-3}{-2}-(-2y) & \text{se } -1\leq y\leq 0 \end{cases}$$

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\,\text{sen}\,\theta$$







$$L(y)=\begin{cases} \sqrt{y}-(y-2) & \text{se } 1\leq y\leq 4 \\ \sqrt{y}-(-\sqrt{y}) & \text{se } 0\leq y\leq 1 \end{cases}$$

C2 24/maio/2019

Hoje: a fórmula
$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$
e um monte de aplicações dela!
Ela nos dá um jeito rápido de deduzir um monte de identidades trigonométricas que podem ser demonstradas usando só números reais, mas que dão um trabalhão...

1ª parte:
Aproximações por polinômios (vai ser uma introdução às idéias da série de Taylor).

A série de Taylor nos permite calcular $f(2)$ a partir de $f(0), f'(0), f''(0), f^{(3)}(0), \ldots$

Def: se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (suave) então $\mathrm{Derivs}(f) = \underbrace{(f, f', f'', f''', f^{(4)}, \ldots)}_{\text{sequência de funções!}}$

① Exerc:
Calcule Derivs(f) nos seguintes casos:

(a) $f(x) = x^2$
(b) $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
(c) $f(x) = e^x$
(d) $f(x) = e^{2x}$
(e) $f(x) = \mathrm{sen}\, x$
(f) $f(x) = \cos x$

Vamos dar um jeito de nos referir a termos específicos da Derivs(f)...

$\mathrm{Derivs}(f) = (f_0, f_1, f_2, f_3, \ldots)$

Operação nova:
$\mathrm{Derivs}_0(f) = (f(0), f'(0), f''(0), f'''(0), \ldots)$

Pra me referir a termos desta sequência, que agora é uma sequência de números, vou usar notações como: $\mathrm{Derivs}_0(f) = (a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$

O caso mais difícil é o (b):

$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$
$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$
$f'''(x) = 24ax + 6b$
$f''''(x) = 24a$
$f^{(5)}(x) = 0$
$f^{(6)}(x) = 0 \ldots$

② Exerc:
Calcule $\mathrm{Derivs}_0(f)$ nos casos (a)...(f) do exercício 1.

③ Encontre $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ tais que
$\mathrm{Derivs}_0(ax^4+bx^3+cx^2+dx+e) = (5, 6, 7, 8, 9, 0, 0, 0, \ldots)$.

2b $\mathrm{derivs}_0(ax^4+bx^3+cx^2+dx+e)$
$= (e, d, 2c, 6b, 24a, 0, 0, 0, 0, \ldots)$

③ Se $\mathrm{derivs}_0(ax^4+bx^3+cx^2+dx+e)$
$= (5, 6, 7, 8, 9, 0, 0, 0, \ldots)$

Então $e = 5$,
$d = 6$,
$2c = 7 \Rightarrow c = \frac{7}{2}$,
$6b = 8 \Rightarrow b = \frac{8}{6}$,
$24a = 9 \Rightarrow a = \frac{9}{24}$

Uma notação melhor pros coeficientes de um polinômio:

$f(x) = \underbrace{a_0 x^0}_{a_0 \cdot 1 = a_0} + \underbrace{a_1 x^1}_{a_1 \cdot x} + a_2 x^2 + \ldots + \underbrace{a_n x^n}_{\text{o polinômio tem grau } n}$

Se $f(x) = 4x^3$
então os coeficientes dele são:
$a_0 = 0$,
$a_1 = 0$,
$a_2 = 0$,
$a_3 = 4$,
$a_4 = 0$
$\vdots$

Se a gente aplica derivs_0 nesse polinômio —
$f(x) = a_0 x^0 + \ldots + a_n x^n$
a gente obtém:
$\mathrm{derivs}_0(f) = (f(0), f'(0), f''(0), \ldots)$
$= (\underbrace{1a_0}_{0!}, \underbrace{1a_1}_{1!}, \underbrace{2a_2}_{2!}, \underbrace{6a_3}_{3!}, \underbrace{24a_4}_{4!}, \ldots)$

Com isso a gente obter os coeficientes do polinômio a partir das derivadas dele!

$f(x) = f(0)x^0 + f'(0)x^1 + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \ldots$
$= \frac{f(0)}{0!}x^0 + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots$

O que acontece se a gente tenta adaptar essa idéia pra $f(x) = e^x$?

$\boxed{\text{C2 } 24/\text{maio}/2019}$

Hoje: a fórmula
$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$
e um monte de aplicações dela!
Ela nos dá um jeito rápido de deduzir um monte de identidades trigonométricas que podem ser demonstradas usando só números reais, mas que dão um trabalhão...

1ª parte:
Aproximações por polinômios (vai ser uma introdução às ideias da série de Taylor).

A série de Taylor nos permite calcular $f(2)$ a partir de $f(0), f'(0), f''(0), f^{(3)}(0), \ldots$

Def: se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (suave) então $\operatorname{Derivs}(f) = \underbrace{(f, f', f'', f''', f^{(4)}, \ldots)}_{\text{sequência de funções!}}$

1) Exerc:
Calcule $\operatorname{Derivs}(f)$ nos seguintes casos:

a) $f(x) = x^2$
b) $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
c) $f(x) = e^x$
d) $f(x) = e^{2x}$
e) $f(x) = \operatorname{sen} x$
f) $f(x) = \cos x$

Vamos dar um jeito de nos referir a termos específicos da $\operatorname{Derivs}(f)$...

$\operatorname{Derivs}(f) = (f_0, f_1, f_2, f_3, \ldots)$

Operação nova:
$\operatorname{Derivs}_0(f) = (f(0), f'(0), f''(0), f'''(0), \ldots)$

Pra me referir a termos desta sequência, que agora é uma sequência de números, vou usar notações como: $\operatorname{Derivs}_0(f) = (a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$

A versão honesta do que a gente acabou de descobrir é:

$$e^x \cong \underbrace{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}}_{\text{Aproximação por polinômio de ordem 4}}$$

Estas duas funções "coincidem até ordem 4 em $x=0$"...

$f(x)$ $\qquad$ $g(x)$

$f(0) = g(0)$
$f'(0) = g'(0)$
$f''(0) = g''(0)$
$f'''(0) = g'''(0)$
$f''''(0) = g''''(0)$
$f'''''(0) \neq g'''''(0)$
$\quad 1 \qquad\qquad 0$

$$e^x \cong \underbrace{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}}_{\text{Aproximação por polinômio de ordem 5 — dá uma aproximação melhor que a anterior!}}$$

Versão "de grau infinito":

$$\left.\begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \\ &= \lim_{N \to \infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} x^k \end{aligned}\right\} \text{Série de Taylor da } e^x.$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \\ &= \lim_{N \to \infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \end{aligned}$$

Exercício:

a) $\operatorname{sen} x = \underline{0}\,x^0 + \underline{1}\,x^1 + \underline{0}\,x^2 + \underline{\tfrac{-1}{3!}}\,x^3 + \underline{0}\,x^4 + \underline{\tfrac{1}{5!}}\,x^5 + \ldots$
b) $\cos x = \underline{1}\,x^0 + \underline{0}\,x^1 + \underline{\tfrac{-1}{2!}}\,x^2 + \underline{0}\,x^3 + \underline{\tfrac{1}{4!}}\,x^4 + \underline{0}\,x^5 + \ldots$
c) $e^{ax} = \underline{1}\,x^0 + \underline{a}\,x^1 + \underline{\tfrac{a^2}{2!}}\,x^2 + \underline{\tfrac{a^3}{3!}}\,x^3 + \underline{\tfrac{a^4}{4!}}\,x^4 + \underline{\tfrac{a^5}{5!}}\,x^5 + \ldots$
d) $42 \operatorname{sen} x =$
e) $e^{ix} = i^0 x^0 + i^1 x^1 + \frac{i^2}{2!} x^2 + \frac{i^3}{3!} x^3 + \frac{i^4}{4!} x^4 + \ldots$
$\quad = x^0 + i x^1 - \frac{1}{2!} x^2 - \frac{i}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} x^4 + \ldots$
f) $i \operatorname{sen} x =$

$\boxed{\text{Tentem ver que } e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x}$

Lembrem que:
$i^2 = -1 \qquad i^0 = 1$
$i^3 = i(i^2) = -i$
$i^4 = (i^2)(i^2) = 1$
$i^5 = i(i^4) = i$
$\vdots$

C2 24/maio/2019

Revisão de complexos:

$(a+ib)+(c+id) =$

$(a+c)+i(b+d)$

$(a+ib)(c+id) =$

$(ac-bd)+(ad+bc)i$

$Re(a+ib) = a$

$Im(a+ib) = b$ (ou ib?)

Conjugação

Todo $z \in \mathbb{C}$ pode ser escrito na forma $a+ib$, onde $a,b \in \mathbb{R}$, de um único modo;

Se $z = a+ib$
então $\bar{z} = a-ib$ (DEF!)

"o conjugado de z", ou "z conjugado"

Exemplo:

$\overline{(3+4i)} = (3-4i)$

$(3+4i)+\overline{(3+4i)} =$

$(3+\cancel{4i})+(3-\cancel{4i}) = 6$

$(a+ib)+\overline{(a+ib)} = 2a$

$\Uparrow$

$2 \cdot Re(a+ib)$

$(a+ib)-\overline{(a+ib)} =$

$(\cancel{a}+ib)-(\cancel{a}-ib) = 2ib$

Se $z = a+ib$
então $z+\bar{z} = 2a$, $z-\bar{z} = 2ib$

$a = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $b = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

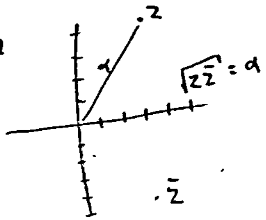
$(a+ib)\overline{(a+ib)} =$

$(a+ib)(a-ib) =$

a^2+b^2

$(3+4i)\overline{(3+4i)} = 3^2+4^2 = 5^2$

DEF: $||z|| = \sqrt{z\bar{z}}$



Convenção:

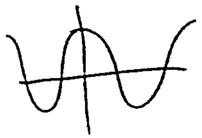
mudar $x \to \theta$
(pra enfatizar que é um ângulo)

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta} \quad (☆)$$

$\Downarrow$ Isto vale pra qualquer $\theta \in \mathbb{R}$.

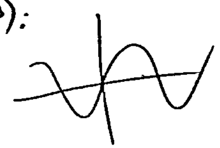
$(☆)[\theta := -\theta] = (e^{-i\theta} = \cos -\theta + i \operatorname{sen} -\theta)$ (☆☆)

cos é uma função par (como x^2):



$\Rightarrow \cos -\theta = \cos\theta$

sen é uma função ímpar (como x^3):



$\Rightarrow \operatorname{sen} -\theta = -\operatorname{sen}\theta$

$e^{-i\theta} = \underbrace{\cos\theta}_{\text{real}} - i \underbrace{\operatorname{sen}\theta}_{\text{real}}$

$e^{-i\theta} = \overline{(e^{i\theta})}$

$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$

$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \operatorname{sen}\theta$

Lembre que na parte sobre substituições trigonométricas a gente inventou umas variáveis/abreviações...

$c = \cos\theta$

$s = \operatorname{sen}\theta$

Novidade:

$E = e^{i\theta}$

Repare que $e^a e^b = e^{a+b}$

$e^{i\theta} e^{-i\theta} = e^{i\theta - i\theta} = e^0 = 1$

$e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}} = E^{-1} = \bar{E}$

$E = c+is$

$E^{-1} = c-is$

$c = \frac{E+E^{-1}}{2}$

$s = \frac{E-E^{-1}}{2i}$

Aplicação:

$\int (\cos\theta)^2 (\operatorname{sen}\theta)^4 \, d\theta =$

$\int \left(\frac{E+E^{-1}}{2}\right)^2 \left(\frac{E-E^{-1}}{2i}\right)^4 d\theta =$

$\int$(alguma soma de exponenciais) $d\theta$

C2 29/maio/2019

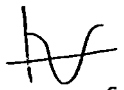
Hoje: mais sobre o truque do $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$, um truque pra frações parciais ("método de Heaviside")

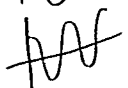
$E = e^{i\theta}$
$c = \cos\theta$
$s = \mathrm{sen}\,\theta$

Somas de senos e cossenos são fáceis de integrar...

Ex:

$$\int \cos 2x + \mathrm{sen}\,5x \, dx$$

$\cos x =$ 

$\cos 2x =$ 

$\mathrm{sen}\,x =$ 

$\mathrm{sen}\,5x =$ 

Produtos e potências de sen e cos são difíceis de integrar - mas podem ser convertidos pra somas!

$$c = \frac{E + E^{-1}}{2} = \frac{1}{2}\left(E^1 + 0E^0 + E^{-1}\right)$$

$$s = \frac{E - E^{-1}}{2i} = \frac{1}{2i}\underbrace{\left(E^1 + 0E^0 - E^{-1}\right)}_{\text{quase polinômios em } E\text{, mas com algumas potências negativas...}}$$

Truque - representação com caixinhas:

$\boxed{a\,|\,b\,|\,c.\,|\,d\,|\,e}$ é um "polinômio em E, e o "." indica um "ponto decimal"... $aE^2 + bE + c + dE^{-1} + eE^{-2}$.

Exercício: calcule:

$$\left(\frac{1}{2}\boxed{1\,|\,.\,|\,1}\right)^4 = ? = \frac{1}{16}\underset{E^4 \quad E^2 \quad E^0 \quad E^{-2} \quad E^{-4}}{\boxed{1\,|\,0\,|\,4\,|\,0\,|\,6.\,|\,0\,|\,4\,|\,0\,|\,1}}$$

Podemos separar esse resultado em:

$$\frac{1}{16}\left(E^4 + E^{-4} + 4(E^2 + E^{-2}) + 6E^0\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(2\cos 4\theta + 4(2\cos 2\theta) + 6 \cdot 1\right)$$

Isto é fácil de integrar!

Treinem em casa e façam o problema 1 da P1 de 2018.2

OBS:

$$\Big(\underbrace{\frac{1}{2i}\boxed{1\,|\,0.\,|\,-1}}_{\mathrm{sen}\,\theta\ !!}\Big)^3 = \left(\frac{1}{2i}\right)^3 \cdot \boxed{1\,|\;\,|\,-3\,|\;\,|\,3.\,|\;\,|\,-1}$$

Outro assunto: Método de Heaviside (pra resolver o "apart" sem usar sistemas)...

Digamos que

$$f(x) = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}$$

onde $A, B, C, a, b, c \in \mathbb{R}$ e a, b, c são diferentes entre si.

Então:

$$(x-a)f(x) = \frac{(x-a)A}{x-a} + \frac{(x-a)B}{x-b} + \frac{(x-a)C}{x-c}$$

$$\lim_{x\to a}(x-a)f(x) = \lim_{x\to a}\left(\frac{(x-a)A}{x-a}\right) + \lim_{x\to a}\left(\frac{(x-a)B}{x-b}\right) + \lim_{x\to a}\left(\frac{(x-a)C}{x-c}\right)$$

$$= A + 0 + 0 = A$$

Agora digamos que

$$\underset{\text{já sabíamos}}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} = \underbrace{\boxed{\frac{\overset{\text{novidade: poli de grau 2}}{p(x)}}{(x-a)(x-b)(x-c)}}}_{g(x)}$$

Então $A = \lim_{x\to a}(x-a)f(x) = \lim_{x\to a}(x-a)\,g(x)$

Exemplo: digamos que

$A = ?$,
$B = ?$,
$C = ?$,
$a = 2$, $b = -2$, $c = 5$,
$p(x) = 3x^2 + 4$

$$f(x) = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-5} = \underbrace{\boxed{\frac{\overset{=p(x)}{3x^2+4}}{(x-2)(x+2)(x-5)}}}_{g(x)}$$

$$A = \lim_{x\to 2}(x-2)\,g(x) = \lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(3x^2+4)}{\cancel{(x-2)}(x+2)(x-5)} = \lim_{x\to 2}\frac{3x^2+4}{(x+2)(x-5)} = \frac{3\cdot 2^2 + 4}{(2+2)(2-5)} = -\frac{4}{3}$$

$\boxed{\text{C2 29/MAIO/2019}}$

À QUESTÃO 3 DA
P1 DE 2018.2 É

$$\int \frac{x^3}{x^2+7x+12}\,dx = ?$$

$$\frac{x^3}{(x+3)(x+4)} = ax + b + \frac{cx+d}{(x+3)(x+4)}$$

$$\begin{array}{rl}
\boxed{1 \mid 0 \mid 0 \mid 0} & \Big|\ \boxed{1 \mid 7 \mid 12} \\
-\ \boxed{1 \mid 7 \mid 12} & \quad \boxed{1 \mid -7} \\
\hline
\boxed{-7 \mid -12 \mid 0} & \\
-\ \boxed{-7 \mid -49 \mid -84} & \\
\hline
\boxed{37 \mid 84} &
\end{array}$$

$$\frac{\boxed{1 \mid 0 \mid 0 \mid 0}}{\boxed{1 \mid 7 \mid 12}} = \frac{\boxed{1 \mid -7}\cdot\boxed{1 \mid 7 \mid 12} + \boxed{37 \mid 84}}{\boxed{1 \mid 7 \mid 12}}$$

$$= \boxed{1 \mid -7} + \frac{\boxed{37 \mid 84}}{\boxed{1 \mid 7 \mid 12}}$$

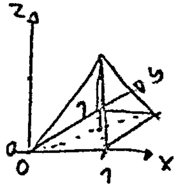
$$= x - 7 + \frac{37x+84}{(x+3)(x+4)} = x - 7 + \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+4}$$

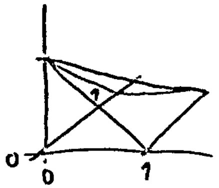
C2 31/maio/2019

A idéia básica por trás das "aplicações da integral"...

Vocês viram como medir áreas. Volumes são fáceis - exemplo:

Pirâmide:





$z \to$ área do corte (por um plano horizontal) da pirâmide no plano com aquele valor de z.

Esse corte vai ser sempre um quadro de lado $L(z)$ e área $L(z)^2$.

$z \to L(z)$

z	$L(z)$
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0

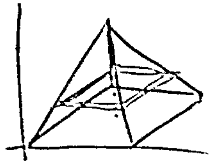
Def: $L(z) = 1-z$

$\text{Área}(z) = (1-z)^2$

$$\text{Volume} = \int_{z=0}^{z=1} \text{Área}(z)\,dz = (\text{casa!}) = \frac{1}{3}$$

Outro jeito de argumentar:

A gente vai dividir o intervalo de integração - $[0,1]$ (em z) - usando uma partição



O volume de cada fatia é aproximadamente a altura dela vezes a área dela (aliás, a área do corte).

Exemplo: entre $z=0$ e $z=0.1$:

Área em $z=0$ $= 1$

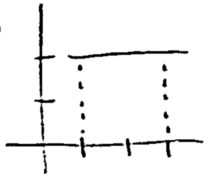
Área em $z=0.1$ $= (1-0.1)^2 = (0.9)^2 = 0.81$

Como calcular comprimentos de curvas?

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua.

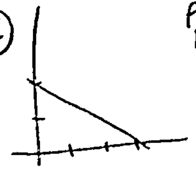
Notação: $L_a^b(f)$ vai ser o comprimento da curva $\{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ entre $x=a$ e $x=b$.

Exemplos:

① 

$f(x)=2$

$L_1^3(f) = ?$

② 

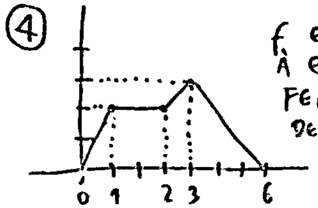
$f(x)$ é uma reta

$L_0^3(f) = ?$

③ 

$f(x) = \sqrt{1-x^2}$

$L_{-1}^1(f) = ?$

④ 

f é a função à esquerda, feita de segmentos de reta.

Descubra:

a) $L_0^1(f)$
b) $L_1^2(f)$
c) $L_0^2(f)$
d) $L_0^{0.5}(f)$
e) $L_{0.9}^1(f)$
f) $L_2^3(f)$
g) $L_3^6(f)$
h) $L_0^6(f)$

⑤ Digamos que f é uma reta no intervalo $[x_0, x_1]$ e que $c \in (x_0, x_1)$.

Defina: $y_0 = f(x_0)$,
$y_1 = f(x_1)$,
$\Delta x = x_1 - x_0$
$\Delta y = y_1 - y_0$

Mostre que

$$L_{x_0}^{x_1}(f) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \Delta x \sqrt{1 + f'(c)^2}.$$

Dica: $f'(c) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

C2 31/MAIO/2019

NO EXERCÍCIO 4

A GENTE CALCULOU O COMPRIMENTO DE UMA CURVA FEITA DE SEGMENTOS DE RETA.

SEJA $P_0 = \{0, 1, 2, 3, 6\}$.

P_0 É UMA PARTIÇÃO DE $[0,6]$ QUE CONTÉM TODOS OS PONTOS EM QUE A f "MUDA DE DERIVADA".

6) VERIFIQUE QUE:

a) $L_0^6(f) = \sum_{i=1}^{N} (x_i - x_{i-1}) \sqrt{1 + f'\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)^2}$

PARA A PARTIÇÃO P_0.

b) VERIFIQUE QUE ISTO TAMBÉM VALE PARA QUALQUER PARTIÇÃO $P \supset P_0$ DO INTERVALO $[0,6]$.

c) VERIFIQUE - OU "CONVENÇA-SE" - DE QUE SE ESCOLHEMOS UMA PARTIÇÃO $P \supset P_0$ DE $[0,6]$ MUITO FINA ENTÃO O SOMATÓRIO ACIMA DÁ O MESMO RESULTADO QUE

$$\int_{x=0}^{x=6} \sqrt{1+f'(x)^2}\, dx.$$

CASA.
OPS: VOU MANDAR PELO TELEGRAM O LINK DE UMA VIDEO-AULA SOBRE ISTO.

C2 7/jun/2019

Hoje: uma questão da prova; cálculo de áreas de superfícies de rotação; introdução a EDOs.

$\int (\text{sen } 3x)^2(\cos 4x)^2\, dx = ?$

$\int (\text{sen } 3\theta)^2(\cos 4\theta)^2\, d\theta = ?$

$(\text{sen } 3\theta)^2(\cos 4\theta)^2 =$

$\left(\frac{1}{2i}(E^3-E^{-3})\right)^2\left(\frac{1}{2}(E^4+E^{-4})\right)^2 =$

$-\frac{1}{16}(E^3-E^{-3})^2(E^4+E^{-4})^2 =$

$-\frac{1}{16}(E^6-2+E^{-6})(E^8+2+E^{-8}) =$

$-\frac{1}{16}(E^{14}+\dots+E^{-14}) =$

$-\frac{1}{16}(E^{14}+E^{-14}+\dots) =$

$-\frac{1}{16}(2\cos 14\theta+\dots)$

$\text{sen } \theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{1}{2i}(E-E^{-1})$

$\cos \theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2}(E+E^{-1})$

$\text{sen } 3\theta = \frac{e^{3i\theta}-e^{-3i\theta}}{2i} = \frac{1}{2i}(E^3-E^{-3})$

$\cos 4\theta = \frac{e^{4i\theta}+e^{-4i\theta}}{2} = \frac{1}{2}(E^4+E^{-4})$

$\left(\frac{1}{2i}\right)^2 = -\frac{1}{4}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

Vamos pular volumes de superfícies de rotação.

Áreas de superfícies de rotação

Exemplo: Seja $S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\leq 1\}$.

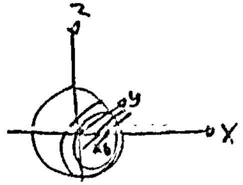
A superfície dela é dada por: $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$

Qual é a área dessa esfera?

Dica: na lápide do Arquimedes puseram esse desenho aqui:

⇐ Ele provou que a área da esfera é igual à da parte curva do cilindro!

$\text{Área}_a^b(S) =$



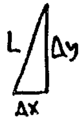
$\text{Área}(S) = \int_{x=-1}^{x=1} \text{Área}_x(S)\, dx$!!

?

$= \sum_{i=1}^{N} \text{Área}_{x_{i-1}}^{x_i}(S)$

Como a gente calcula $\text{Área}_{x_{i-1}}^{x_i}(S)$?

Lembrem que na parte sobre comprimento de curvas a gente viu:

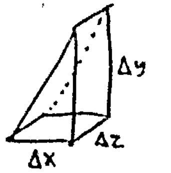


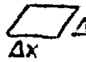
$L = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

$= \Delta x\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} = \Delta x\sqrt{1+f'(x)}$

Vamos fazer algo parecido pra superfícies de revolução.

Mas antes disso:





: base

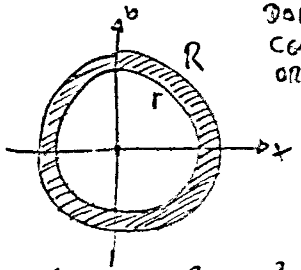
"parte inclinada" $L\cdot\Delta z$

Truque: a área da parte inclinada é $\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\cdot\left(\text{área da base}\right)$

área da base $= \Delta x\cdot\Delta z$

C2 7/jun/2019

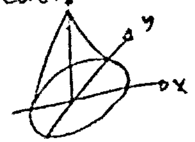
Hoje: uma questão da prova; cálculo de áreas de superfícies de rotação; introdução a EDOs.



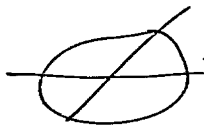
Dois círculos centrados na origem...
Externo: raio R
Interno: raio r.

Área: $\pi R^2 - \pi r^2$
$= \pi(R^2 - r^2)$

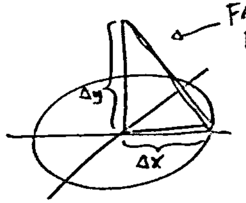
Versão inclinada - área de um ~~pedaço de~~ cone...



Área do cone:



← Raio R; Área πR^2.

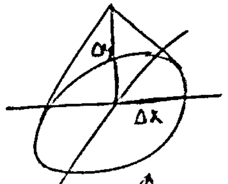


← Fatia muito fina do cone

← Fatia muito fina (base) ⇐ Área: α ⇐ Isto é metade de um retângulo

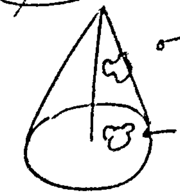
⇑

Área: $\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\cdot\alpha$



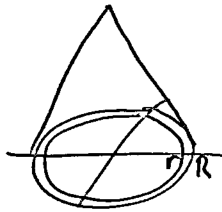
← $\boxed{\text{Cone: Área: } \pi(\Delta x)^2\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}}$

← Base: Área: $\pi(\Delta x)^2$



Área do Mickey no cone: $M\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$

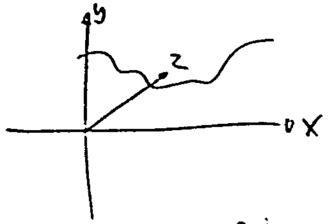
Área do Mickey na base: $\boxed{M}$



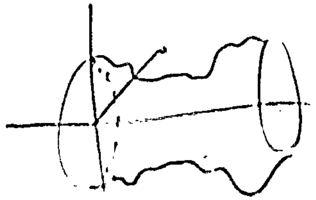
Área no cone: $\pi(R^2-r^2)\cdot\sqrt{1\cdot\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$

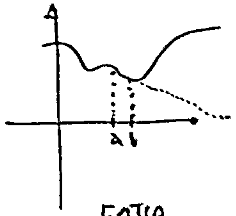
Área na base: $\pi(R^2-r^2)$

Sólidos de rotação:

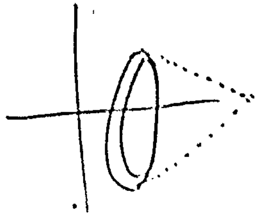


Rodando essa curva em torno do eixo x temos:

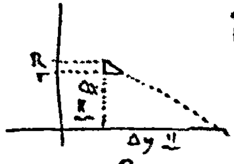




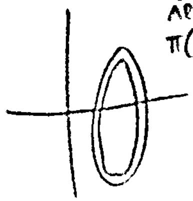
Fatia
⇓
pedaço de cone



⇒



Sabendo R e r a gente sabe que este pedaço de círculo tem área $\pi(R^2-r^2)$



Passo difícil (depois passo um vídeo pra vocês sobre isso!)

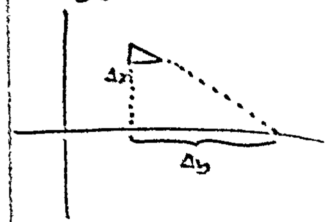
Esse pedaço de círculo é a projeção no plano $x=a$ de um pedaço de cone...

A área do pedaço de cone pode ser calculada do jeito de antes se a gente usar a terminologia Δx e Δy do jeito esperto...

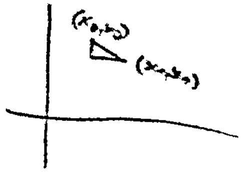
C2 7/JUN/2019

HOJE: UMA QUESTÃO DA PROVA; CÁLCULO DE ÁREAS DE SUPERFÍCIES DE ROTAÇÃO; INTRODUÇÃO A EDOS.

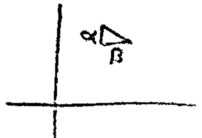
DESENHO 1:



DESENHO 2:



DESENHO 3:



$\frac{\Delta y}{\Delta x} = ?$

$\| \quad \frac{\beta}{\alpha}$

AQUI O β É $|x_1 - x_0|$ E O α É $|y_1 - y_0|$

O FATOR MULTIPLICADOR É

$$\sqrt{1 + \left(\frac{|x_1 - x_0|}{|y_1 - y_0|}\right)^2}$$

QUE, PULANDO VÁRIOS PASSOS, VAI SER:

$$\sqrt{1 + \frac{1}{f'(x)^2}} \quad !!! \ldots$$

$$\text{Área}_a^b(S) = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{1 + \frac{1}{f'\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)^2}} \, |x_i^2 - x_{i-1}^2| \, \pi \cdot (x_i - x_{i-1})$$

$$= \int_{x=a}^{x=b} \ldots \, dx \quad \|$$

INTRODUÇÃO ÀS EDOS

EDOs

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

(EXISTE UMA COISA BEM MAIS COMPLICADA CHAMADA "EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS")

EQUAÇÃO QUADRÁTICA:

$x^2 + 7x + 12 = 0$

$x = ?$

x^2 É O "TERMO RUIM" QUE TORNA TUDO DIFÍCIL E EXIGE TÉCNICAS NOVAS.

EQUAÇÃO DIFERENCIAL: (ORDINÁRIA; EDO)

EXEMPLO SIMPLES:

$f'(x) = 3x^2$

$f(x) = ?$

ISSO A GENTE JÁ VIU COMO RESOLVER!

EXEMPLOS MAIS COMPLICADOS:

(a) $f'(x) = f(x)$

(b) $f'(x) = 4f(x)$

(c) $f'(x) = -\frac{1}{f(x)}$

(d) $f''(x) + f'(x) - 6f(x) = 0$

COMO RESOLVER ISTO?

MÉTODO 0: CHUTAR E TESTAR!

SEJAM:

$f_1(x) = e^x$

$f_2(x) = e^{2x}$

$f_3(x) = e^{3x}$

$f_4(x) = e^{4x}$

$f_5(x) = e^{-2x}$

$f_6(x) = e^{-3x}$

$f_7(x) = \sqrt{1 - x^2}$

$f_8(x) = \sqrt{4 - x^2}$

EXERCÍCIO: QUAIS DAS FUNÇÕES ACIMA SÃO SOLUÇÕES DAS EDOS (a), (b), (c), (d)?

C2 7/JUN/2019

Hoje: uma questão da prova; cálculo de áreas de superfícies de rotação; introdução a EDOs.

As EDOs (a), (b) e (d) têm uma característica engraçada...

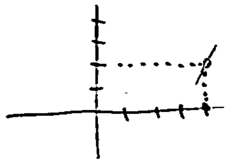
Se g e h são soluções delas então:

- $g+h$ também é
- $g+g$ também é
- $3g$ também é
- kg também é $(k \in \mathbb{R})$

Isso vai ter a ver com Álgebra Linear - vamos poder tratar essas soluções como vetores!

Lembrem que se $f(4)=2$ e $f'(4)=3$

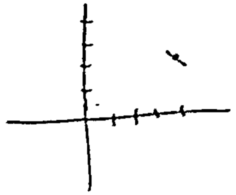
então:



Vamos adaptar esta idéia pra (c).

Se f é solução da (c) e $f(4)=2$

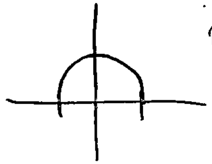
então: $f'(4) = -\frac{1}{f(4)} = -\frac{1}{2}$



⇐ plano (x,y)

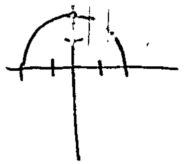
No ponto $(x,y)=(4,2)$ nós descobrimos que as soluções que passam por aquele ponto têm coef. angular $-\frac{1}{2}$ naquele ponto.

$f_7 =$



Passa pelo ponto $(0,1)$

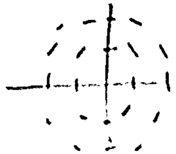
$f_8 =$



Passa pelos pontos $(0,2)$, e $(\sqrt{2},\sqrt{2})$.

Pra casa: entenda a idéia daqui e faça o gráfico do "campo de direções" da EDO (c).

O resultado vai ser:



Exemplos mais complicados:

(a) $f'(x) = f(x)$

(b) $f'(x) = 4f(x)$

(c) $f'(x) = -\frac{1}{f(x)}$

(d) $f''(x) + f'(x) - 6f(x) = 0$

Como resolver isto?

Método 0: chutar e testar!

Sejam:

$f_1(x) = e^x$

$f_2(x) = e^{2x}$

$f_3(x) = e^{3x}$

$f_4(x) = e^{4x}$

$f_5(x) = e^{-2x}$

$f_6(x) = e^{-3x}$

$f_7(x) = \sqrt{1-x^2}$

$f_8(x) = \sqrt{4-x^2}$

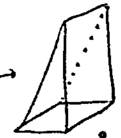
Exercício: quais das funções acima são soluções das EDOs (a), (b), (c), (d)?

C2 12/JUN/2019

HOJE:
- UM EXERCÍCIO PRA CASA SOBRE ÁREAS DE SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO
- EDOS COM VARIÁVEIS SEPARÁVEIS

NÓS USAMOS ISSO - DE UM JEITO CONFUSO - PRA ENCONTRAR ÁREAS DE PEDAÇOS DE CONES...

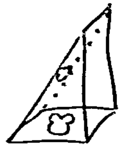
AULA PASSADA:



← NO PLANO XY

ESSA FACE INCLINADA SE FOR PROJETADA VIRA ESSE QUADRADO

ÁREA DA FACE INCLINADA = ÁREA DA FACE HORIZONTAL $\cdot \underbrace{\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}}_{\text{FATOR MULTIPLICADOR}}$



ÁREA DO MICKEY INCLINADO (CUJA PROJEÇÃO É O MICKEY HORIZONTAL) = ÁREA DO MICKEY HORIZONTAL $\cdot \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$

FACE HORIZONTAL

$F_H = \{(x,y,0) \mid x,y \in [0,1]\}$

FACE INCLINADA

$F_I = \{(x,y,\underbrace{2x}) \mid x,y \in [0,1]\}$

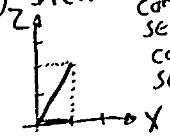
(1) EXERCÍCIO:

$\underbrace{ÁREA(F_I)}_{?} = \underbrace{ÁREA(F_H)}_{?} \cdot \underbrace{\sqrt{1+\underset{?}{\alpha}^2}}_{?}$

(MAIS DIFÍCIL) (FÁCIL)

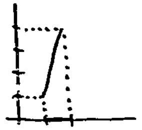
QUAL É O FATOR MULTIPLICADOR NESTE CASO?

(2) DICA:



COMPRIMENTO SEG. INCLINADO = COMPRIMENTO SEG. HORIZONTAL $\cdot \underbrace{\sqrt{1+\underset{2}{\alpha}^2}}_{\sqrt{5}}$

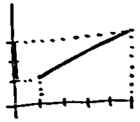
(3) VARIAÇÃO DA DICA:



$\underbrace{\begin{pmatrix}\text{COMPR. SEG.}\\ \text{INCLINADO}\end{pmatrix}}_{\sqrt{10}} = \underbrace{\begin{pmatrix}\text{COMPR.}\\ \text{SEG.}\\ \text{HORIZONTAL}\end{pmatrix}}_{1} \cdot \underbrace{\sqrt{1+\underset{3}{\alpha}^2}}_{\sqrt{10}}$

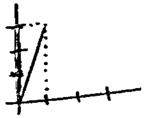
(4) MAIS TRÊS VARIAÇÕES:

(a)



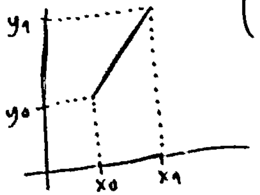
$\underbrace{\begin{pmatrix}\text{COMPR.}\\ \text{SEG.}\\ \text{INCLINADO}\end{pmatrix}} = \underbrace{\begin{pmatrix}\text{COMPR.}\\ \text{SEG.}\\ \text{VERTICAL}\end{pmatrix}} \cdot \underbrace{\sqrt{1+\alpha^2}}$

(b)



$\underbrace{\begin{pmatrix}\text{COMPR.}\\ \text{SEG.}\\ \text{INCLINADO}\end{pmatrix}} = \underbrace{\begin{pmatrix}\text{COMPR.}\\ \text{SEG.}\\ \text{VERTICAL}\end{pmatrix}} \cdot \underbrace{\sqrt{1+\alpha^2}}$

(c)

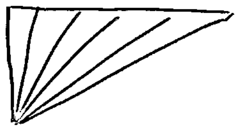


$\begin{pmatrix}\text{COMPR.}\\ \text{SEG.}\\ \text{INCLINADO}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{COMPR.}\\ \text{SEG.}\\ \text{HORIZONTAL}\end{pmatrix} \cdot \underbrace{\sqrt{1+\underset{?}{\alpha}^2}}_{?}$

$\begin{pmatrix}\text{COMPR.}\\ \text{SEG.}\\ \text{INCLINADO}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{COMPR.}\\ \text{SEG.}\\ \text{VERTICAL}\end{pmatrix} \cdot \underbrace{\sqrt{1+\underset{?}{\beta}^2}}_{?}$

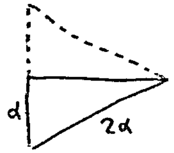
PRA CASA! IMPORTANTE!!!

DICA:



NESSA FIGURA A GENTE TEM UM SEGMENTO VERTICAL E VÁRIOS SEGMENTOS INCLINADOS...
EM QUAL DESSES SEGMENTOS INCLINADOS O FATOR MULTIPLICADOR É:
- MAIOR?
- 2?
- 1

MAIS DICA:
TRIÂNGULO EQUILÁTERO:



AQUI O FATOR MULTIPLICADOR É 2.

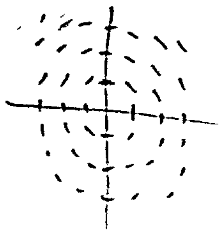
C2 12/jun/2019

Hoje:
- Um exercício pra casa sobre áreas de superfícies de revolução
- EDOs com variáveis separáveis

Nossa EDO preferida de hoje:

$$f'(x) = -\frac{x}{f(x)} \qquad (☆)$$

Obs: o campo de direções dela é:



A (☆) pode ser reescrita como:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \qquad (\text{se } y=f(x))$$

Vamos tentar isolar tudo que tem x de um lado e tudo que tem y do outro.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$
$$dy = -\frac{x}{y}\,dx$$
$$y\,dy = -x\,dx$$
$$\int y\,dy = \int -x\,dx$$
$$\underbrace{\int y\,dy}_{\frac{y^2}{2}+C_2} = \underbrace{-\int x\,dx}_{-\left(\frac{x^2}{2}+C_1\right)}$$
$$\frac{y^2}{2}+C_2 = -\frac{x^2}{2}-C_1$$
$$\frac{y^2}{2}+\frac{x^2}{2} = -C_1-C_2$$

$$y^2+x^2 = 2(-C_1-C_2) = C_3$$

Se as gambiarras estiverem certas as soluções da (☆) são as soluções de $y^2+x^2=C_3$.

Exemplos:

$y^2+x^2=1 \Rightarrow$

$y^2+x^2=4 \Rightarrow$

$y^2=1-x^2 \Rightarrow$

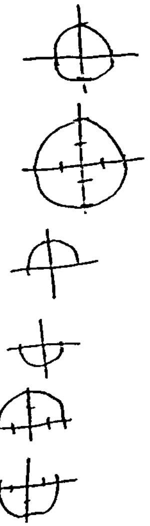
$y=\sqrt{1-x^2} \Rightarrow$

$y=-\sqrt{1-x^2} \Rightarrow$

$y^2=4-x^2 \Rightarrow$

$y=\sqrt{4-x^2} \Rightarrow$

$y=-\sqrt{4-x^2} \Rightarrow$



Como a gente generaliza isso?

Obs: em EDOs as "fórmulas" melhores "começam pelo meio" — de um ponto em que é fácil obter a solução e a EDO (o problema original) $\leftarrow f'(x) = -\frac{x}{f(x)}$ ou $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

No nosso exemplo $y = \pm\sqrt{C_3 - x^2}$

Caso particular:

$$y\,dy = -x\,dx \Rightarrow \int y\,dy = \int -x\,dx$$
$$\Downarrow$$
$$y^2+x^2 = C_3$$

Caso geral:

$$g(y)\,dy = f(x)\,dx \Rightarrow \underbrace{\int g(y)\,dy}_{G(y)+C_2} = \underbrace{\int f(x)\,dx}_{F(x)+C_1}$$
$$G(y)-F(x) = C_1-C_2 = C_3$$
$$G(y) = C_3+F(x)$$
$$y = G^{-1}(C_3+F(x))$$

Exercício:

$$\boxed{e^{2y}\,dy = x^3\,dx} \quad (☆☆) \Rightarrow \int e^{2y}\,dy = \int x^3\,dx$$

$$\frac{1}{2}e^{2y} = \frac{x^4}{4}+C_3$$
$$e^{2y} = \frac{x^4}{2}+C_4$$
$$\ln(e^{2y}) = \ln\left(\frac{x^4}{2}+C_4\right)$$
$$2y = \ln\left(\frac{x^4}{2}+C_4\right)$$
$$\underbrace{y}_{f(x)} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^4}{2}+C_4\right)$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{2}+C_4\right)^{-1}\left(\frac{4}{2}x^3\right) = x^3\left(\frac{x^4}{2}+C_4\right)^{-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{e^{2y}}$$

$$(☆☆☆) \quad f'(x) = \frac{x^3}{e^{2f(x)}} = x^3 e^{-2f(x)}$$

Testando:

$$x^3\left(\frac{x^4}{2}+C_4\right)^{-1} \stackrel{?}{=} x^3 e^{-2\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^4}{2}+C_4\right)\right)} = x^3 e^{-\ln\left(\frac{x^4}{2}+C_4\right)} = x^3\left(\frac{x^4}{2}+C_4\right)^{-1}$$

C2 12/JUN/2019

Hoje:
- Um exercício pra casa sobre áreas de superfícies de revolução
- EDOs com variáveis separáveis

Introdução ao método para resolver EDOs como esta aqui:

$f''(x) + 5f'(x) + 6f(x) = 0$

A gente vai ver funções como vetores.

Vetores como funções

$\vec{v} = (4, 7, 42, 99, 200)$

$\vec{v}_1 = 4$

$\vec{v}_3 = 42$

$\vec{v}_4 = 99$

A operação "$\vec{v}_\cdot$" recebe um número de 1 a 5 e retorna uma componente do $\vec{v}$.

Ess operação é parecida com:

```
foo () {
  char a[5];
  printf("%d\n", a[2]);
}
```

Notação λ — lambda minúsculo

O "λ" nos permite criar funções sem nome.

$(\lambda x.\ 10\cdot x)$ ⇐ isto é uma função que espera um argumento; quando ela recebe um argumento ela "chama ele de x" e retorna $10\cdot x$.

$(10\cdot x)[x := 2+3]$

$= 10\cdot(2+3)$

$= 10\cdot 5$

$= 50$

foo(2+3)

$(\lambda x. 10\cdot x)(2+3)$

$(\lambda x.10\cdot x)(2+3) = 10\cdot(2+3)$

$(\lambda x.\ 10\cdot x)(2+3)$

$= (10\cdot x)[x := 2+3]$

$= 10\cdot(2+3)$

$= 10\cdot 5$

$= 50$

Exercícios:

a) $(\lambda x.\ 10\cdot x+4)(3)$

b) $(\lambda x.\ x^2)(3+4)$

c) $(\lambda x.\ 8)(2)$

d) $(\lambda x.\ 10\cdot x)((\lambda x.\ x+2)(3))$

e) $(\lambda x.10\cdot x)((\lambda x.\ x+2)(a))$

C2 19/JUN/2019

Hole: D!

C2 19/JUN/2019

Hoje: D!

Na aula passada nós começamos a ver notação λ... Ela vai nos ajudar a distinguir números de funções constantes. Ela não é usada em livros de cálculo, e depois a gente vai ver como apagar os "λ"s.

Lembrem:
$(\lambda x.4)(10) = (4)[x:=10] = 4$

Função constante!

Hoje vamos ver algumas operações que recebem funções e retornam outras funções.

MARCAR P2, VR, VS!

$(\lambda f.f(f(10)))\underbrace{(\lambda x.x^2)}_{f}$
$= (f(f(10)))[f:=(\lambda x.x^2)]$
$= (\lambda x.x^2)((\lambda x.x^2)(10))$
$= (\lambda x.x^2)(10^2)$
$= (10^2)^2$

$(\lambda x.x^2)(10) = 10^2$
$(\lambda y.y^2)(10) = 10^2$

Se a gente vê $(\lambda x.x^2)$ e $(\lambda y.y^2)$ como funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ elas são a mesma função! "x^2"

$(\lambda f.\lambda x.f'(x))(\lambda x.\text{sen}\, x)$
$= (\lambda x.f'(x))[f:=\lambda x.\text{sen}\, x]$
$= (\lambda x.\cos(x))$

$(\lambda f.\lambda x.f'(x))$ espera receber uma função f e retorna f'.

Def: $D = (\lambda f.\lambda x.f'(x))$.

Exemplos:
$D(\lambda x.x^3) = (\lambda x.3x^2)$
$D(\lambda x.e^{4x}) = (\lambda x.4e^{4x})$
$D(\lambda x.42) = (\lambda x.0)$
$D(42) =$!! erro
$D(D(\lambda x.e^{4x})) = D(\lambda x.4e^{4x}) = \lambda x.16e^{4x}$

$Df = f'$
$D(Df) = f''$

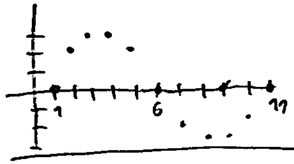
Lembrem que eu disse que funções iam ser como vetores...

Se $\vec{V} = (2,3,42,99)$
$\vec{V}_3 = 42$

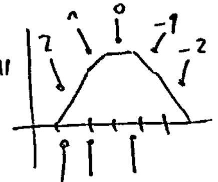
Se $f = (\lambda x.10x)$
$f(42) = 420$
$f(99) = 990$
"extraindo as componentes 42 e 99 da f"...
Dá pra calcular $f(-20)$, $f(\pi)$, $f(e^2)$.

Uma idéia (esboço!) de como derivar funções vistas como vetores...

$g: \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$

$g =$


$\vec{g} = (0,2,3,3,2,0,-2,-3,-3,-2,0)$

g "="


Se a g for vista como uma série de segmentos de reta a gente consegue pensar na derivada de cada segmento...

$2 = g(2)-g(1)$
$1 = g(3)-g(2) = \vec{g}_3 - \vec{g}_2$
$0 = g(4)-g(3) = \vec{g}_4 - \vec{g}_3$

Se $\vec{h}$ é essa "derivada", $\vec{h}_1 = \vec{g}_2 - \vec{g}_1$, $\vec{h}_2 = \vec{g}_3 - \vec{g}_2$

Exercício:
$\vec{h} = \underbrace{\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}}_{M} \vec{g}$

Que matriz é esta?

Chutar e testar:
$\begin{pmatrix} 2 & 3 & & \\ 4 & 3 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \; 0 \; 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{g}_1 \\ \vec{g}_2 \\ \vec{g}_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\vec{g}_1+3\vec{g}_2 \\ 4\vec{g}_1+3\vec{g}_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & & & \\ & -1 & 1 & & \\ & & -1 & 1 & \\ & & & -1 & \ddots \end{pmatrix}$

C2 19/JUN/2019

MARCAR P2, VR, VS!

Hoje: D!

Como melhorar isto?

$(Mf)(x) = f(x+1) - f(x)$

Outra M melhor ainda:

$(M_\varepsilon f)(x) = \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}$

Dá pra pensar que a operação D que a gente viu, que funciona assim: $Df = f'$

é o limite, quando $\varepsilon \to 0$, das operações M_ε — que a gente conseguiu interpretar como matrizes.

Exercícios:

ⓐ $G = \lambda f.\, f'' + f$

$G(\lambda x.\, x^3) = ?$

$G(\lambda x.\, \operatorname{sen} x) = ?$

$G(\lambda x.\, 4\cos x) = ?$

Se $f = \lambda x. x^3$

então $f' = \lambda x. 3x^2$

$f'' = \lambda x. 6x$

O que é $f'' + f$?

A gente sabe somar vetores...

Se $\vec{v} = (3,4,5)$

e $\vec{w} = (30,40,50)$

então $\vec{v} + \vec{w} = (33,44,55)$

$(\vec{v}+\vec{w})_1 = \vec{v}_1 + \vec{w}_1$

$(\vec{v}+\vec{w})_2 = \vec{v}_2 + \vec{w}_2$

$(\vec{v}+\vec{w})_3 = \vec{v}_3 + \vec{w}_3$

$(\vec{v}+\vec{w})_i = \vec{v}_i + \vec{w}_i$

Quando a gente escreve $\vec{v} + \vec{w}$ esse "+" é uma operação nova... ela é definida "componente a componente".

Pra calcular $\vec{v} + \vec{w}$ calcule todos os $\vec{v}_i + \vec{w}_i$ e forme um vetor com eles.

No $G = \lambda f.\, f'' + f$ esse "+" também é "componente a componente"...

$(f'' + f)(x) = \underbrace{f''(x) + f(x)}_{\text{calcule isso pra todos os "x"zes e monte uma função nova.}}$

$(g+h)(x) = g(x) + h(x)$

$g + h = \lambda x.\, g(x) + h(x)$

Em $G = \lambda f.\, f'' + f$

$\Uparrow$

Isto é como a soma de vetores.

Agora sabemos somar funções "como vetores"...

ⓑ $H = \lambda f.\, f' - 4f$

$H(\lambda x.\, x^2) = ?$

$H(\lambda x.\, e^{4x}) = ?$

$H(\lambda x.\, e^{-4x}) = ?$

$H(\lambda x.\, 99 e^{4x}) = ?$

$(-4f)(x) = -4f(x)$

Em $H = \lambda f.\, f + \underbrace{(-4)f}_{\text{isto é como multiplicar o "vetor" } f \text{ pelo escalar } 4.}$

OBS: $10\,\overline{(3,4,5)} = \overline{(30,40,50)}$: multiplicação por escalar

$\overline{(3,4,5)} \cdot \overline{(1,2,3)} = 3\cdot 1 + 4\cdot 2 + 5\cdot 3$: produto escalar

A gente também tinha o produto cruzado — que só existe em $\mathbb{R}^3$, e essa operação aqui, $\overline{(3,4,5)} \cdot \overline{(1,2,3)} = \overline{(3\cdot 1, 4\cdot 2, 5\cdot 3)}$ não tinha nome porque não tinha utilidade em GA.

Voltando:

$G = \lambda f.\, f'' + f$

$= \lambda f.\, D(Df) + f$

$= \lambda f.\, (DD)f + If$

$= \lambda f.\, (DD + I)f$

$\Uparrow$

"matriz" identidade

$\lambda f.\, f'' - 4f$

$= \lambda f.\, (DD - 4I)f$

Em álgebra linear estamos acostumados a escrever $\underbrace{-4I}_{\text{matriz}}$ como -4... é um "abuso de linguagem" comum.

$\lambda f.\, f'' - 4f$

$= \lambda f.\, (DD - 4)f$

$\boxed{\text{C2 19/JUN/2019}}$

$\boxed{\text{MARCAR P2, VR, VS!}}$

Hoje: D!

Esta operação,

$\lambda f.(DD-4)f$,

recebe um "vetor" f e retorna o produto da "matriz" $(DD-4)$ pelo "vetor" f.

Em Álgebra Linear a gente às vezes escreve operações deste tipo como só a matriz delas...

$\lambda f.(DD-4)f$ "=" $(DD-4)$.

Em AL matrizes nem sempre comutam.

Exercício:

© Sejam $B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ e $C=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$. Calculem BC, CB.

$$BC=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$
$$CB=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

Em geral,

$$(A+B)(C+D)=AC+AD+BC+BD$$

Se $a,b,c,d\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(aD+b)(cD+d) &= (aD)(cD)+(aD)d+b(cD)+bd\\ &= acD^2+(ad+bc)D+bd\end{aligned}$$

... e aqui tudo comuta (não vou provar — acreditem em mim!)

$$(D-3)(D+2)=D^2-D-6$$
$$(D+2)(D-3)=D^2-D-6$$

EDO: Encontre $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que

$$f''-f'-6f=0$$
$$\forall x\in\mathbb{R}.\ f''(x)-f'(x)-6f(x)=0$$

$$f''-f'-6f=0 \qquad (*)$$
$$= (D^2-D-6)f$$
$$= (D+2)(D-3)f$$
$$= (D-3)(D+2)f$$

As soluções "básicas" da EDO $(*)$ são as soluções de

$(D+2)f=0$ e de

$(D-3)f=0$

que são da forma $\lambda x.e^{kx}$... $\Leftarrow$ "soluções básicas"

$$\begin{aligned}(D+2)(\lambda x.e^{kx}) &= D(\lambda x.e^{kx})\\ &\quad +2(\lambda x.e^{kx})\\ &= (\lambda x.ke^{kx})\\ &\quad +(\lambda x.2e^{kx})\\ &= \lambda x.\underbrace{(k+2)}_{\text{const}}e^{kx}\\ &= \underbrace{(k+2)}_{\text{const}}(\lambda x.e^{kx})\end{aligned}$$

$\Rightarrow k+2=0$

$\Rightarrow k=-2$

$(D+2)(\lambda x.e^{kx})=(\lambda x.0) \Rightarrow k=-2$

$(D-3)(\lambda x.e^{kx})=(\lambda x.0)$

$\Rightarrow k=3$

Essas funções,

$f_1=(\lambda x.e^{-2x})$ e

$f_2\ (\lambda x.e^{3x})$

são "básicas" no sentido de que elas formam uma base pro espaço vetorial das soluções !! !! !! !!

no sentido de:

$$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$$
$$(D^2-D-6)(\alpha f_1+\beta f_2)=0=\lambda x.0$$

Dá provar — mas eu não vou provar !! — que todas as soluções da EDO $(*)$ são dessa forma, $\alpha f_1+\beta f_2$

$\boxed{\text{C2 19/JUN/2019}}$

MARCAR P2, VR, VS!

Hoje: D!

P2:	5/JUL
VR:	10/JUL
VS:	12/JUL

Como a gente resolve EDOs como estas?

$$f'' + f = 0 \qquad (\star\star)$$

$$(D^2+1)f$$

$$(D+i)(D-i)f$$

Soluções básicas:

$$f_1 = \lambda x.\, e^{ix}$$

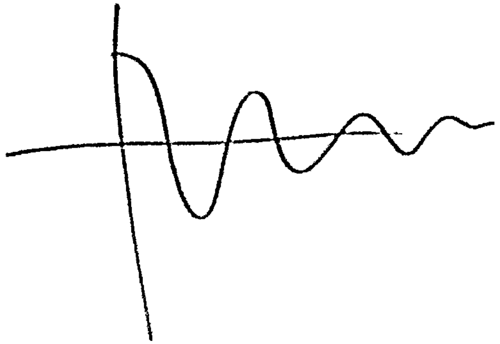
$$f_2 = \lambda x.\, e^{-ix}$$

Soluções básicas reais:

$$\tfrac{1}{2}(f_1+f_2) = \left(\lambda x.\, \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right) = (\lambda x.\cos x)$$

$$\tfrac{1}{2i}(f_1-f_2) = \left(\lambda x.\, \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right) = (\lambda x.\operatorname{sen} x)$$

E quando as raízes de $(D^2+bD+c)f=0$ forem coisas como: $4i$ e $-4i$? $2+3i$ e $2-3i$?



C2 19/JUN/2019

Hoje: D!

MARCAR P2, VR, VS!

P2. 3/JUL
VR. 10/JUL
VS: 12/JUL

Como a gente resolve EDOs como estas?

$$f'' + f = 0 \qquad (AA)$$

$$(D^2+1)f$$

$$(D+i)(D-i)f$$

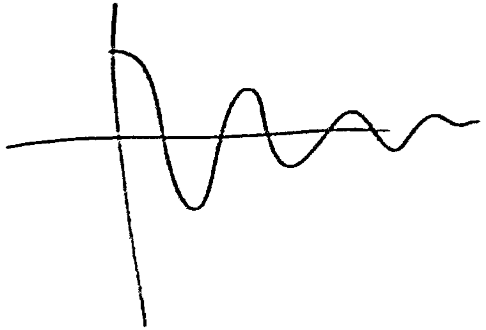
Soluções básicas:

$$f_1 = \lambda x.\, e^{ix}$$
$$f_2 = \lambda x.\, e^{-ix}$$

Soluções básicas reais:

$$\frac{1}{2}(f_1+f_2) = \left(\lambda x.\, \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right) = (\lambda x.\cos x)$$
$$\frac{1}{2i}(f_1-f_2) = \left(\lambda x.\, \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right) = (\lambda x.\operatorname{sen} x)$$

E quando as raízes de $(D^2+bD+c)f=0$ forem coisas como: $4i$ e $-4i$? $2+3i$ e $2-3i$?



C2 26/JUN/2019

Hoje: EDOs da forma $f''+\alpha f'+\beta f=0$ com soluções da forma $e^{ax}\cos bx$ e $e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx$; ①

Problemas de valor inicial para EDOs lineares com coeficientes constantes; ②

Introdução a EDOs exatas. ③

Dica: dá pra estudar pra essa matéria pelas P2s, VRs e VSs dos semestres anteriores!

Pra gente entender o ① é melhor a gente começar pelo meio do caminho.

Meio: qual é a EDO que tem soluções básicas $f_1=e^{(2+3i)x}$ e $f_2=e^{(2-3i)x}$?

$f''+\_f'+\_f=0$ ⇐ exercício

Quem são α e β aqui?...

$$f''+\alpha f'+\beta f=0$$
$$\| \quad (D^2+\alpha D+\beta)f$$
$$\| \quad (D+\_)(D+\_)f$$

Dica: preencha pra ter soluções básicas $f_1=e^{(2+3i)x}$ e $f_2=e^{(2-3i)x}$.

Esta EDO tem as soluções básicas acima:

$$(D-(2+3i))(D-(2-3i))f=0$$
$$\| \quad \begin{pmatrix} D^2 \\ -(2+3i)D \\ -(2-3i)D \\ +\underbrace{(2+3i)(2-3i)}_{4+9=13} \end{pmatrix} f$$
$$\| \quad (D^2-4D+13)f$$
$$\| \quad f''-4f'+13f \quad (☆)$$

E aqui?

$$f''+\alpha f'+\beta f=0$$
$$\| \quad (D^2+\alpha D+\beta)f$$
$$\| \quad (D+\_)(D+\_)f$$

Dica: preencha pra ter soluções básicas $f_1=e^{4x}$ e $f_2=e^{-5x}$

$$(D-4)(D+5)f=0$$
$$(D-4)(D+5)(\lambda x.e^{-5x})=0$$
$$(D+5)(D-4)(\lambda x.e^{4x})=0$$

f_1 e f_2 são soluções básicas de:

$$(D-4)(D+5)f=0$$
$$\| \quad (D^2+D-20)f$$
$$\| \quad f''+f'-20f$$
$$f''+\underset{\alpha}{\underset{\|}{1}}f'\underset{\beta}{\underset{\|}{-20}}f=0$$

Se as soluções básicas de $f''-4f'+13f=0$ (☆) são $f_1=e^{(2+3i)x}$ e $f_2=e^{(2-3i)x}$ então as soluções básicas reais da (☆) vão ser:

$$f_3=\frac{f_1+f_2}{2}$$
$$f_4=\frac{f_1-f_2}{2i}$$

Exercício: calcule f_3 e f_4.

$$f_3=\frac{e^{(2+3i)x}+e^{(2-3i)x}}{2} = \frac{e^{2x}e^{3ix}+e^{2x}e^{-3ix}}{2} = e^{2x}\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2} = e^{2x}\cos 3x$$

Obs: às vezes ao invés de dar as soluções básicas da EDO eu vou dar algo assim...

$$f''-2f'+10f=0$$

e vocês vão ter que usar Bhaskara pra fatorar o $(D^2-2D+10)$!

$$f_4=\frac{e^{(2+3i)x}-e^{(2-3i)x}}{2i}$$
$$=\frac{e^{2x}e^{3ix}-e^{2x}e^{-3ix}}{2i}$$
$$=e^{2x}\left(\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i}\right)$$
$$=e^{2x}\frac{1}{2i}\left(\cos 3x+i\,\mathrm{sen}\,3x-(\cos(-3x)+i\,\mathrm{sen}(-3x))\right)$$
$$=e^{2x}\frac{1}{2i}\left(\cos 3x+i\,\mathrm{sen}\,3x-(\cos 3x-i\,\mathrm{sen}\,3x)\right)$$
$$=e^{2x}\frac{1}{2i}\left(\cancel{\cos 3x}+i\,\mathrm{sen}\,3x-(\cancel{\cos 3x}-i\,\mathrm{sen}\,3x)\right)$$
$$=e^{2x}\frac{1}{2i}(i\,\mathrm{sen}\,3x+i\,\mathrm{sen}\,3x)=e^{2x}\,\mathrm{sen}\,3x$$

$$e^{ix}=\cos x+i\,\mathrm{sen}\,x$$
$$e^{ikx}=\cos kx+i\,\mathrm{sen}\,kx$$

C2 26/JUN/2019

HOJE: EDOS DA FORMA $f''+\alpha f'+\beta f=0$ COM SOLUÇÕES DA FORMA $e^{ax}\cos bx$ E $e^{ax}\operatorname{sen} bx$; ①

PROBLEMAS DE VALOR INICIAL PARA EDOS LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES; ②

INTRODUÇÃO A EDOS EXATAS. ③

ASSUNTO ②

LEMBREM QUE AS SOLUÇÕES BÁSICAS DE UMA EDO LINEAR COM COEFS CONSTANTES FORMAM UMA BASE - NO SENTIDO DE ÁLGEBRA LINEAR - PRO ESPAÇO DAS SOLUÇÕES DA EDO ← ESPAÇO VETORIAL!

EXEMPLO:

$(D-2)(D+5)f=0$

$\overset{\shortparallel}{(D^2+3D-10)f}$

$\overset{\shortparallel}{f''+3f'-10f}$

SOLUÇÕES BÁSICAS:

$f_1=e^{2x}$,

$f_2=e^{-5x}$.

SOLUÇÃO GERAL: COMBINAÇÕES LINEARES DISSO!

$f=\alpha e^{2x}+\beta e^{-5x}$

DIGAMOS QUE QUEREMOS ENCONTRAR UMA SOLUÇÃO f QUE OBEDEÇA:

Ⅰ $f(0)=3$

Ⅱ $f'(0)=4$

EXERCÍCIO (MAIS BÁSICO):

$f_1(0)=1$

$f_2(0)=1$

$f_1'(0)=2$

$f_2'(0)=-5$

$$f(0)=\alpha\cdot e^{2\cdot 0}+\beta e^{-5\cdot 0}$$
$$=\alpha\cdot 1+\beta\cdot 1$$
$$=\alpha+\beta$$
$$f'(x)=2\alpha e^{2x}-5\beta e^{-5x}$$
$$f'(0)=2\alpha e^{2\cdot 0}-5\beta e^{-5\cdot 0}$$
$$=2\alpha-5\beta.$$

EXERCÍCIO: ENCONTRE α E β QUE FAÇAM:

$f(0)=3$ E

$f'(0)=4$

$\alpha+\beta=3$

$2\alpha-5\beta=4$

$\beta=3-\alpha$

$2\alpha-5(3-\alpha)=4$

$2\alpha-15+5\alpha=4$

$7\alpha=19$

$\alpha=\frac{19}{7}$

$\beta=3-\alpha$

$=3-\frac{19}{7}$

$=\frac{21}{7}-\frac{19}{7}$

$=\frac{2}{7}$

(ISSO TÁ CERTO?

$\alpha+\beta=\frac{19}{7}+\frac{2}{7}=\frac{21}{7}=3$!!

$2\alpha-5\beta=\frac{38}{7}-\frac{10}{7}=\frac{28}{7}=4$!!)

INTRODUÇÃO A EDOS EXATAS

IDÉIA: EDOS EXATAS SÃO UM POUQUINHO MAIS GERAIS QUE EDOS COM VARIÁVEIS SEPARÁVEIS...

VARIÁVEIS SEPARÁVEIS:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$
$$y\,dy=-x\,dx$$
$$\int y\,dy=\int -x\,dx$$
$$\overset{\shortparallel}{\frac{y^2}{2}+C_1} \qquad \overset{\shortparallel}{-\frac{x^2}{2}+C_2}$$

$\ldots \Rightarrow x^2+y^2=C_3$

SOLUÇÕES: CURVAS DE NÍVEL DE $x^2+y^2=$ CONSTANTE.

$$\int h(y)dy=\int g(x)dx$$
$$\overset{\shortparallel}{H(y)+C_1} \qquad \overset{\shortparallel}{G(x)+C_2}$$
$$G(x)-H(y)=C_3$$

SOLUÇÕES: CURVAS DE NÍVEL DE $G(x)-H(y)=$ CONSTANTE $=C_3$

$-H(y)=C_3-G(x)$

$H(y)=G(x)-C_3$

$y=H^{-1}(G(x)-C_3)$

C2 26/JUN/2019

Hoje: EDOs da forma $f''+\alpha f'+\beta f=0$ com soluções da forma $e^{ax}\cos bx$ e $e^{ax}\operatorname{sen} bx$; (1)

Problemas de valor inicial para EDOs lineares com coeficientes constantes; (2)

Introdução a EDOs exatas. (3)

As soluções de uma EDO exata vão ser curvas de nível de funções $F(x,y)$ que não necessariamente vão poder ser "separadas" em $F(x,y)=G(x)-H(y)$.

Um truque pra isso não ficar complicado demais...

Só vamos usar funções $F(x,y)$ que são polinômios em duas variáveis — e uma notação em caixinhas pra eles, diferente da anterior.

Antes:

$f(x)=2x^4+3x+5$

$= \boxed{2}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{3}\boxed{5}$

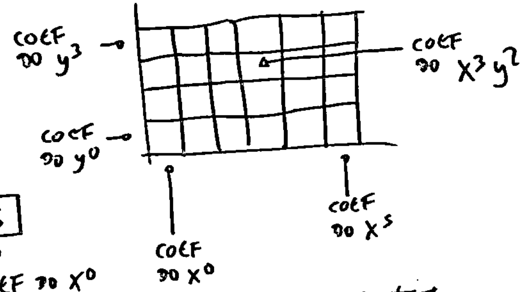
coef do x^4, coef do x^1, coef do x^0

Exemplo:

$$F(x,y)=2x^3y^2+3xy^3+4xy+6x^5+7y^2+8x+9$$

Como a gente arruma isso?

Notação bidimensional!



$F(x,y)=$

	3				
7			2		
	4				
9	8				6

Derivadas parciais

Notação: $\frac{\partial}{\partial x}F$ e $\frac{\partial}{\partial y}F$ ao invés de $\frac{d}{dx}F$, etc.

$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y)$ vai ser "derivar $F(x,y)$ em x fingindo que o y é constante";

$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y)$ vai ser "derivar $F(x,y)$ em y fingindo que o x é constante".

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^3y^4)=3x^2y^4$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^3y^4)=x^3\cdot 4y^3$$

Exercício: Usando a $F(x,y)$ da terceira coluna,

a) Calcule $\frac{\partial}{\partial x}F(x,y)$

b) Calcule $\frac{\partial}{\partial y}F(x,y)$

c) Represente $\frac{\partial}{\partial x}F(x,y)$ na notação de caixinhas

d) Represente $\frac{\partial}{\partial y}F(x,y)$ na notação de caixinhas.

e) $\frac{\partial}{\partial x}$

					10

$= ?$

f) $\frac{\partial}{\partial y}$

					10

$= ?$

C2 28/jun/2019

Hoje: último item da matéria... EDOs exatas!!!

Nós de novo vamos começar pelo meio. Digamos que queremos encontrar a EDO cujas soluções são as curvas de nível de $(y-2)^3 \cdot (4+x^5+x^6) - x^3 = C$

isto é, $F(x,y) := (y-2)^3(4+x^5+x^6) - x^3 = C$

isto é, $F(x,y) = (y^3-6y^2+12y-8)(4+x^5+x^6)-x^3 = C$

isto é, $F(x,y) = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 12 \\ -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & & & & & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} & & & 1 \end{bmatrix} = C$

$$= \begin{bmatrix} 4 & & & & & 1 & 1 \\ -24 & & & & & -6 & -6 \\ 48 & & & & & 12 & 12 \\ -32 & & & -1 & & -8 & -8 \end{bmatrix} = C$$

ou, indo por outra direção,

$(y-2)^3(4+x^5+x^6) - x^3 = C$

$(y-2)^3(4+x^5+x^6) = x^3 + C$

$(y-2)^3 = \frac{x^3+C}{4+x^5+x^6}$

$y-2 = \sqrt[3]{\frac{x^3+C}{4+x^5+x^6}}$

$y = 2 + \sqrt[3]{\frac{x^3+C}{4+x^5+x^6}}$

O que acontece quando $x=10$, $y=5$?

$5 = 2 + \sqrt[3]{\frac{10^3+C}{4+10^5+10^6}}$

$= 2 + \sqrt[3]{\frac{10^3+C}{1100004}}$

$\underset{3}{\underset{\shortparallel}{5-2}} = \sqrt[3]{\frac{10^3+C}{1100004}}$

$27 = \frac{10^3+C}{1100004}$

$27 \cdot 1100004 - 10^3 = C$

- Se $x=10$ e $y=5$ então $C = 27 \cdot 1100004 - 10^3 = C_1$
- A solução $y=f(x)$ que passa pelo ponto $(x,y)=(10,5)$ é a que tem $C=C_1$... ou seja,

$$y = 2 + \sqrt[3]{\frac{x^3+C_1}{4+x^5+x^6}}.$$

Agora vamos encontrar uma EDO cujas soluções são as curvas de nível de $F(x,y)=C$.

Mas vamos temporariamente trabalhar com algo mais simples...
$G(x,y) = x^2y^3$

Vamos procurar uma EDO cujas soluções são as curvas de nível de $G(x,y)=C$.

Soluções disso: $y=g(x)$ tais que

$G(x,g(x)) = C$

$\shortparallel$

$x^2g(x)^3$

$x^2g(x)^3 = C$

$g(x)^3 = \frac{C}{x^2}$

$g(x) = \sqrt[3]{\frac{C}{x^2}}$

Qual é a solução disso que passa pelo ponto $(x,y)=(4,5)$?

$(x,\overset{y}{g(x)}) = (4,5) \Rightarrow x=4$, $g(4)=5$, $C=?$

$5 = \sqrt[3]{\frac{C}{4^2}}$

$5^3 = \frac{C}{4^2}$

$C = 5^3 4^2$

Agora algo mais abstrato...

Seja $H(x,y)$ uma função qualquer de duas variáveis. Se a curva $y=h(x)$ percorre uma curva de nível da H, então:

$H(x,h(x)) = C$

$\frac{d}{dx} H(x,h(x)) = 0$

Um pouco de Cálculo 3:

$\frac{d}{dt} F(g(t),h(t)) =$
$F_x(g(t),h(t))\,g'(t) +$
$F_y(g(t),h(t))\,h'(t)$

Obs: $F_x = \frac{\partial}{\partial x}F$

$F_y = \frac{\partial}{\partial y}F$

$\frac{\partial}{\partial x}(x^2y^3) = 2xy^3$

$\frac{\partial}{\partial y}(x^2y^3) = x^2 \cdot 3y^2$

C2 28/jun/2019

Hoje: último item da matéria... EDOs exatas!!!

Nós de novo vamos começar pelo meio. Digamos que queremos encontrar a EDO cujas soluções são as curvas de nível de $(y-2)^3 \cdot (4+x^3+x^6) - x^3 = C$

isto é, $F(x,y) := (y-2)^3(4+x^3+x^6) - x^3 = C$

isto é, $F(x,y) = (y^3-6y^2+12y-8)(4+x^3+x^6)-x^3 = C$

isto é, $F(x,y) = \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline -6 \\ \hline 12 \\ \hline -8 \\ \hline\end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 4 & & & & & 1 & 1 \\ \hline\end{array} - \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & & 1 \\ \hline\end{array} = C$

$= \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 4 & & & & & 1 & 1 \\ \hline -24 & & & & & -6 & -6 \\ \hline 48 & & & & & 12 & 12 \\ \hline -32 & & & -1 & & -8 & -8 \\ \hline\end{array} = C$

Como é que a gente calcula $\frac{d}{dx}H(x,h(x))$?

$\frac{d}{dt}F(g(t),h(t)) = F_x g' + F_y h'$

Se $g(t)=t$, isto vira:

$\frac{d}{dt}F(\underbrace{g(t)}_{t},h(t)) = F_x \underbrace{g'}_{1} + F_y h'$

$\frac{d}{dt}F(t,h(t)) = F_x + F_y h'$

$\frac{d}{dx}F(x,h(x)) = F_x + F_y h'$

$\frac{d}{dx}H(x,h(x)) = H_x + H_y h'$

$H(x,h(x)) = \text{constante}$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}H(x,h(x)) = 0$
$\qquad \| $
$\quad H_x + H_y h'$

Se $y = h(x)$,

$\frac{d}{dx}H(x,y) = 0$
$\qquad \|$
$H_x + H_y \frac{dy}{dx}$

$H_x + H_y \frac{dy}{dx} = 0$

Gambiarra:

$H_x\,dx + H_y\,dy = 0$

Exercício:

Digamos que $G(x,y) = x^2y^3$.

Calcule G_x e G_y e expanda a expressão abaixo:

$G_x dx + G_y dy = 0.$

$\boxed{(2xy^3)dx + (x^2 \cdot 3y^2)dy = 0}$

Um problema típico de EDOs exatas tem esta cara aqui:

"Verifique que a EDO abaixo é exata e resolva-a: $(2xy^3)dx + (x^2 \cdot 3y^2)dy = 0$"

Como resolver uma questão dessas?

(1) Defina H_x e H_y:

$\underbrace{(2xy^3)}_{H_x}dx + \underbrace{(x^2 \cdot 3y^2)}_{H_y}dy = 0$

(2a) Verifique que a H abaixo existe

(3) Encontre uma função H que obedece

$\frac{\partial}{\partial x}H = \underbrace{H_x}_{\text{acima}}$ e $\frac{\partial}{\partial y}H = \underbrace{H_y}_{\text{acima}}$

Exercício:

Para cada um dos casos abaixo encontre duas funções "H" diferentes que obedecem as condições dadas - ou diga que é impossível.

(a) $H_x = \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & \\ \hline & \\ \hline\end{array}$, $H_y = \begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline & 3 \\ \hline\end{array}$ $\Rightarrow H(x,y) = 3xy$, $H(x,y) = 3xy + 42$

(b) $H_x = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \\ \hline & \\ \hline\end{array}$, $H_y = \begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline & 4 \\ \hline\end{array}$ $\Rightarrow$ não dá!

Teorema (de Young):

Pra qualquer $H:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suave temos $H_{xy} = H_{yx}$.

Exemplo: se $H = x^2y^3$

então $H_x = 2xy^3$,

$H_{xy} = 2x \cdot 3y^2$

$H_y = x^2 \cdot 3y^2$

$H_{yx} = 2x \cdot 3y^2$

(2b) Verifique que

$\frac{\partial}{\partial y}\underbrace{H_x}_{\text{dada}} = \frac{\partial}{\partial x}\underbrace{H_y}_{\text{dada}}$

Exemplo (b):

Se $H_x = y$ e $H_y = 4x$,

$\frac{\partial}{\partial y}H_x \stackrel{?}{=} \frac{\partial}{\partial x}H_y$
$\quad \| \qquad\qquad \|$
$\frac{\partial}{\partial y}y \qquad \frac{\partial}{\partial x}4x$

O "$\stackrel{?}{=}$" é falso!

C2 28/JUN/2019

HOJE: ÚLTIMO ITEM DA MATÉRIA... EDOS EXATAS!!!

NÓS DE NOVO VAMOS COMEÇAR PELO MEIO. DIGAMOS QUE QUEREMOS ENCONTRAR A EDO CUJAS SOLUÇÕES SÃO AS CURVAS DE NÍVEL DE $(y-2)^3 \cdot (4+x^5+x^6) - x^3 = C$

ISTO É, $F(x,y) = (y-2)^3(4+x^5+x^6) - x^3 = C$

ISTO É, $F(x,y) = (y^3-6y^2+12y-8)(4+x^5+x^6)-x^3 = C$

ISTO É, $F(x,y) = \begin{array}{|c|}\hline 1\\ \hline -6\\ \hline 12\\ \hline -8\\ \hline\end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 4 & & & & & 1 & 1\\ \hline\end{array} - \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & & 1\\ \hline\end{array} = C$

$= \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 4 & & & & & 1 & 1\\ \hline -24 & & & & & -6 & -6\\ \hline 48 & & & & & 12 & 12\\ \hline -32 & & & -1 & & -8 & -8\\ \hline\end{array} = C$

UM JEITO MAIS FORMAL DE ESCREVER A (2b) É:

SEJA (☆) ESTA EDO:

$(2xy^3)\,dx + (x^2 \cdot 3y^2)\,dy = 0$

(2c) VERIFIQUE QUE A EDO (☆) É EXATA.

$\frac{\partial}{\partial y}(2xy^3) \overset{?}{=} \frac{\partial}{\partial x}(x^2 \cdot 3y^2)$

EXERCÍCIO:

SEJA (☆☆) A EDO ABAIXO:

$(3x^2y^4)\,dx + (x^3 \cdot 4y^3)\,dy = 0$

(a) MOSTRE QUE ELA É EXATA

(b) ENCONTRE $H(x,y)$ COM $H_x(x,y) = 3x^2y^4$, $H_y(x,y) = x^3 \cdot 4y^3$,

(c) DÊ A SOLUÇÃO GERAL DESTA EDO,

(d) DÊ A SOLUÇÃO QUE PASSA PELO PONTO $(5,6)$.

$\Rightarrow H(x,y) = x^3y^4$

$\Rightarrow x^3y^4 = C$

$y^4 = \frac{C}{x^3}$

$y = \sqrt[4]{\frac{C}{x^3}}$

$\boxed{\text{C2 } 3/\text{JUL}/2019}$

EDO: $\underbrace{(2xy^3)}_{M}dx + \underbrace{3(x^2+3)}_{N}y^2\,dy = 0$

a)

$$\frac{\partial M}{\partial y} \stackrel{?}{=} \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\frac{\partial(2xy^3)}{\partial y} = 6xy^2$$

$$\|$$

$$\frac{\partial\, 3(x^2+3)y^2}{\partial x} = 6xy^2 \text{, ok!}$$

$F = x^3y^4$

$F_x = 3x^2y^4$

$F_y = x^3 \cdot 4y^3$

b) $F = ?$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N$$

$$\int \frac{\partial F}{\partial x}dx = \int 2xy^3\,dx$$

$$F = \frac{2x^2}{2}\cdot y^3 + \theta(y) = c$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial(x^2y^3)}{\partial y} + \theta'(y) = N$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3x^2y^2 + \theta'(y) = 3(x^2+3)y^2$$

$$\theta'(y) = \cancel{3x^2y^2} + 9y^2 - \cancel{3x^2y^2}$$

$$\theta(y) = \int 9y^2\,dy = 3y^3$$

$$\boxed{F = x^2y^3 + 3y^3} = c$$

$F_x = \ldots ?$

$F_y = \ldots ?$

$$y^3(x^2+3) = c$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{c}{(x^2+3)}}$$

$\boxed{\text{C2 3/JUL/2019}}$

EDO: $\underbrace{(2xy^3)}_{M}\,dx + \underbrace{3(x^2+3)}_{N}\,y^2\,dy = 0$

a)

$$\frac{\partial M}{\partial y} \overset{?}{=} \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\frac{\partial (2xy^3)}{\partial y} = 6xy^2$$

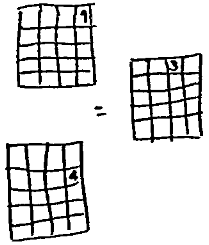
$$\parallel$$

$$\frac{\partial\, 3(x^2+3)y^2}{\partial x} = 6xy^2 \text{, ok!}$$

$F = x^3y^4 =$

$F_x = 3x^2y^4$

$F_y = x^3 \cdot 4y^3 =$



b) $F = x^2y^3 + 3y^3$

$$\frac{\partial F}{\partial x} \overset{?}{=} M \;\Big|\; \frac{\partial F}{\partial x} = 2xy^3 + 0 = 2xy^3 + 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} \overset{?}{=} N \;\Big|\; \frac{\partial F}{\partial y} = 3x^2y^2 + 9y^2 = 3(x^2+3)y^2$$

$$\int \frac{\partial F}{\partial x}\,dx = \int 2xy^3\,dx$$

$$F = \frac{2x^2}{2}y^3 + \theta(y) = C$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial x^2y^3}{\partial y} + \theta'(y) = N$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3x^2y^2 + \theta'(y) = 3(x^2+3)y^2$$

$$\theta'(y) = \cancel{3x^2y^2} + 9y^2 - \cancel{3x^2y^2}$$

$$\theta(y) = \int 9y^2\,dy = 3y^3$$

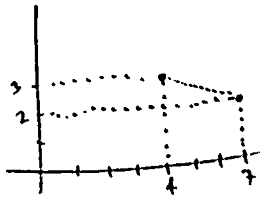
$$\boxed{F = x^2y^3 + 3y^3} = C$$

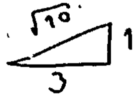
$F_x = \ldots ?$

$F_y = \ldots ?$

$$y^3(x^2+3) = C$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{C}{(x^2+3)}}$$





$C(4,3) =$
$\{(4,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2+z^2 = 3^2\}$

$\sqrt{10} \approx 3.1$

FATORES MULTIPLICADORES:

$\frac{\sqrt{10}}{1} = \sqrt{10}$

$\frac{\sqrt{10}}{3} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{9}} = \sqrt{\frac{10}{9}} = \sqrt{1.111\ldots} \approx 1.05$

TRABALHO SOBRE ÁREAS DE SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO - VALE 0.5 PONTOS NA VR OU NA VS (QUE VÃO TER QUESTÕES SOBRE ISSO), O QUE FOR MAIS VANTAJOSO PRA VOCÊS.

SEJAM: $P(x,y) = (x,y)$

$C(x,R) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2+z^2 = R^2\}$.

1. CALCULE AS DISTÂNCIAS:
   a) $d(P(4,2), P(7,2))$
   b) $d(P(4,3), P(7,3))$
   c) $d(P(4,2), P(4,3))$
   d) $d(P(4,3), P(7,2))$
2. CALCULE AS ÁREAS DOS PEDAÇOS DE CONES ENTRE:
   a) $C(4,2)$ e $C(7,2)$
   b) $C(4,3)$ e $C(7,3)$
   c) $C(4,2)$ e $C(4,3)$