Matemática discreta
PURO-UFF - 2009.1
Exercícios - 29/abril/2009

(1) Complete:

$$\{\,6,7,8,\ldots,20\,\} = \{\,x \in \_\_\_ \mid \_\_\_\}$$

(2) Normalmente usamos certas letras para variáveis cujos valores são reais, outras letras para variáveis cujos valores são inteiros, e outras letras para variáveis cujos valores são naturais. Descubra qual é a convenção e melhore a resposta do exercício acima.

Vamos usar a notação $a|b$ para "a divide b"; $2|4$ é verdade, $3|5$ é falso.

(3) Complete:

$$a|b \iff \exists\_ \in \_.\ \_\_\_$$

onde o "___" não envolve divisão, só produto.

(4) Use a expressão que você obteve acima como uma definição formal de divisibilidade,

$$D(a,b) \iff \exists\_ \in \_.\ \_\_\_$$

e agora teste-a:

(5) mostre que $D(10,20)$ é verdadeira.

(6) Um dos "esquemas de prova" da seção 2.9 do Scheinerman corresponde ao que você usou no exercício anterior. Qual?

(7) Mostre que $D(10,10)$ é verdadeira.

(8) Mostre que $D(10,0)$ é verdadeira.

(9) Mostre que $D(0,10)$ é falsa.

(10) Qual dos "esquemas de prova" você usou no exercício anterior?

Defina:
$P(n) = (10n < 2)$,
$Q(n) = (10n \neq 2)$,
$R(n) = (10n > 2)$,
$I(n) = (Q(n) \to Q(n+1))$.

Prove, do modo mais formal que você puder, que:

(11) $P(n) \vee R(n) \leftrightarrow Q(n)$

(12) $P(n) \to Q(n)$

(13) $R(n) \to Q(n)$

(14) $\forall n \in \mathbb{N}.\ R(n) \to R(n+1)$

(15) $\forall n \in \mathbb{N}.\ \neg P(n) \to \neg P(n+1)$

(16) $P(0)$

(17) $I(0)$

(18) $I(1)$

(19) $I(2)$

(20) Tente provar $I(n)$ no caso geral (i.e., para qualquer $n \in \mathbb{N}$). Isto é possível, mas é bem mais difícil do que pode parecer à primeira vista. Anote as tentativas que você fez, e porque elas não deram certo.

(21) Finja que você sabe que $\forall n \in \mathbb{N}.I(n)$. Agora prove formalmente que $\forall n \in \mathbb{N}.Q(n)$, e que $\neg D(10,2)$.

Sejam $A = \{2,3,4\}$ e $B = \{5,6\}$.
Represente estes conjuntos no plano (x,y):
(22) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in A, y \in B\}$
(23) A, como subcojunto do eixo x
(24) B, como subcojunto do eixo y
(25) $\{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in A\}$
(26) $\{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in B\}$
Represente estes conjuntos no plano (x,y):
(27) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in B, y \in A\}$
(28) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in B, y \in A\}$
(29) B, como subcojunto do eixo x
(30) A, como subcojunto do eixo y
(31) $\{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in B\}$
(32) $\{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in A\}$

Usando a notação $(\_,\_)$ para denotar pares ordenados podemos representar um produto de dois conjuntos finitos bidimensionalmente como uma lista de pares:

$$\{1,2\} \times \{3,4\} = \{ \begin{array}{ll} (1,3), & (2,3), \\ (1,4), & (2,4) \end{array} \}$$

e se representamos o segundo conjunto "na vertical" isto fica ainda mais claro:

$$\{1,2\} \times \begin{array}{r} \{3, \\ 4\} \end{array} = \{ \begin{array}{ll} (1,3), & (2,3), \\ (1,4), & (2,4) \end{array} \}$$

repare que a ordem na qual listamos os elementos dos dois conjuntos vai influenciar na ordem "natural" para listarmos os elementos do produto:

$$\{1,2\} \times \begin{array}{r} \{4, \\ 3\} \end{array} = \{ \begin{array}{ll} (1,4), & (2,4), \\ (1,3), & (2,3) \end{array} \}$$

mas repare que os conjuntos em si não mudam.
(33) Porque os conjuntos não mudam se mudamos a ordem dos seus elementos? Explique com as suas palavras ou encontre um trecho do livro do Scheinerman (ou de outro) que justifique isto.
(34) Tente representar $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ bidimensionalmente como uma lista de pares.
(35) Tente representar $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ bidimensionalmente como uma lista de pares.
(36) Encontre uma representação bidimensional para $\{2,3,4\} \times \{5,6\}$ que corresponda ao que você obteve no exercício 22.
(37) Nós às vezes usamos uma representação bidimensional com 0s e 1s para representar funções de conjuntos como o do exercício 36 no conjunto $\{0,1\}$. Descreva a função que é representada por isto aqui: $\begin{smallmatrix}100\\010\end{smallmatrix}$.
(38) Nós às vezes usamos essa mesma representação bidimensional com 0s e 1s para representar *subconjuntos*, além de funções. Descreva o subconjunto que é representado por isto aqui: $\begin{smallmatrix}100\\010\end{smallmatrix}$.

(39) O que é $\{0,1,2,3,4,5,6\}^2$?
(40) Quantos elementos $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ tem? E $\{0,1,2,3,4,5,6\}^2$?

Use a idéia do exercício 38 para representar estes subconjuntos de $\{0,1,2,3,4,5,6\}^2$ como retângulos de 0s e 1s:
(41) $\{(x,y) \in \{0,1,2,3,4,5,6\}^2 \mid x|y\}$
(42) $\{(x,y) \in \{0,1,2,3,4,5,6\}^2 \mid y|x\}$