Matemática Discreta
PURO - UFF
8 de Abril de 2009
Prof: Eduardo Ochs

Mais sobre as regras dos quantificadores em Dedução Natural

Um modo de dar um significado preciso (uma "semântica") para as regras dos quantificadores em Dedução Natural é encarar cada sequente como uma afirmação sobre subconjuntos — "$P, Q \vdash R$" passa a significar: "o conjunto dos pontos (do nosso universo de discurso) para os quais as proposições P e Q são verdadeiras está contido no conjunto dos pontos para os quais a proposição R é verdadeira".

Vamos usar algumas abreviações:

$$\begin{array}{ll}
\{a \mid \ldots\} & := \{a\in A \mid \ldots\} \\
\{a,b \mid \ldots\} & := \{(a,b)\in A\times B \mid \ldots\} \\
Pa & := P(a) \\
Qab & := Q(a,b) \\
Ra & := R(a)
\end{array}$$

Então:

$$\dfrac{\begin{array}{c}Pa\\ \vdots \\ Qab\end{array}}{\forall b\in B.\ Qab}\forall I \qquad \dfrac{Pa \vdash Qab}{Pa \vdash \forall b\in B.\ Qab} \qquad \dfrac{\{a,b \mid Pa\} \subseteq \{a,b \mid Qab\}}{\{a \mid Pa\} \subseteq \{a \mid \forall b\in B.\ Qab\}}$$

$$\dfrac{\exists b\in B. Qab \quad \begin{array}{c}Pa \quad [Qab]^1\\ \vdots \\ Ra\end{array}}{Ra}\exists E;1 \qquad \dfrac{Pa,\ Qab \vdash Ra}{Pa,\ \exists b\in B. Qab \vdash Ra} \qquad \dfrac{\{a,b \mid Pa \land Qab\} \subseteq \{a,b \mid Ra\}}{\{a \mid Pa \land \exists b\in B. Qab\} \subseteq \{a \mid Ra\}}$$

E se $b_0 \in B$,

$$\dfrac{\forall b\in B.\ Qab}{Qab_0}\forall E \qquad \dfrac{}{\forall b\in B.\ Qab \vdash Qab_0} \qquad \dfrac{}{\{a \mid \forall b\in B.\ Qab\} \subseteq \{a \mid Qab_0\}}$$

$$\dfrac{Qab_0}{\exists b\in B.\ Qab}\exists I \qquad \dfrac{}{Qab_0 \vdash \exists b\in B.\ Qab} \qquad \dfrac{}{\{a \mid Qab_0\} \subseteq \{a \mid \exists b\in B.\ Qab\}}$$

Porque queremos regras para os quantificadores?
(De volta a um velho tema)

Lembre que temos um modo de testar se um sequente proposicional é uma tautologia: basta testarmos todas as atribuições possíveis de valores de verdade para as suas variáveis — se para toda atribuição o sequente for "verdadeiro" então ele é uma tautologia...

Por exemplo,

$$A,\ A\to B,\ B\to C,\ C\to D,\ D\to E \vdash E$$

é uma tautologia, e "basta" testarmos as 32 atribuições possíveis para ver isto...

Mostrar que um sequente <u>não é</u> uma tautologia pode ser bem mais rápido. Basta encontrarmos — por sorte, intuição, ou por algum dos métodos que veremos depois — uma atribuição que o torna falso (i.e., que o "falsifica").

Por exemplo, $P:=0$, $Q:=1$, $R:=1$ falsifica este sequente:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
P & \lor & Q, & & Q & \to & R & \vdash & P & \land & R \\
0 & & 1 & & 1 & & 1 & & 0 & & 1 \\
 & 1 & & & & 1 & & & & 0 &
\end{array}$$

Alguns sequentes em lógica de 1ª ordem (i.e., com quantificadores) podem ser falsificados com atribuições fáceis de descrever — por exemplo,

$A:=\{2,3\}$, $B:=\{5,4\}$, $A\times B = \{(2,5),(3,5),(2,4),(3,4)\}$,

$P(2,5):=1$, $P(3,5):=0$, $P(2,4):=0$, $P(3,4):=1$ (i.e., $P:=\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}$)

falsifica:

$$\underbrace{\forall x\in A.\ \underbrace{\exists y\in B.\ \underbrace{Pxy}_{\substack{10\\01}}}_{11}}_{1} \vdash \underbrace{\exists y\in B.\ \underbrace{\forall x\in A.\ \underbrace{Pxy}_{\substack{10\\01}}}_{\substack{0\\0}}}_{0}$$

Mas mostrar que um certo sequente em lógica de 1ª ordem é sempre verdadeiro — de algum modo inteligível, que reflita o nosso raciocínio — exige outras técnicas...

Matemática Discreta
PURO - UFF
8 de Abril de 2009
Prof: Eduardo Ochs

Uma derivação grande em Dedução Natural

Vamos provar - por indução - que:

$\forall n \in \mathbb{N}.\ \mathrm{par}(n) \lor \mathrm{impar}(n)$

onde "par(n)" e "impar(n)" são abreviações para:

$$\mathrm{par}(n) := \exists k \in \mathbb{N}.\ n = 2k$$
$$\mathrm{impar}(n) := \exists k \in \mathbb{N}.\ n = 2k+1$$

Vamos dividir a derivação para $\forall n \in \mathbb{N}.\ \mathrm{par}(n) \lor \mathrm{impar}(n)$ em várias subárvores, e usar a convenção de que barras duplas representam vários passos que não estamos escrevendo explicitamente.

$$\frac{\mathrm{par}(n)}{\mathrm{impar}(n+1)} \quad := \quad \dfrac{\exists k \in \mathbb{N}.\ n = 2k \qquad \dfrac{\dfrac{[n = 2k]^1}{n+1 = 2k+1}}{\exists k \in \mathbb{N}.\ n+1 = 2k+1}}{\exists k \in \mathbb{N}.\ n+1 = 2k+1}\ \exists E;1$$

$$\frac{\mathrm{impar}(n)}{\mathrm{par}(n+1)} \quad := \quad \dfrac{\exists k \in \mathbb{N}.\ n = 2k+1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[n = 2k+1]^2}{n+1 = 2k+2}}{n+1 = 2(k+1)}}{\exists k \in \mathbb{N}.\ n+1 = 2k}}{\exists k \in \mathbb{N}.\ n+1 = 2k}\ \exists E;2$$

$$\frac{}{\mathrm{par}(0)} \quad := \quad \dfrac{\dfrac{}{0 = 2 \cdot 0}}{\exists k \in \mathbb{N}.\ 0 = 2k}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\mathrm{par}(0)}}{\mathrm{par}(0) \lor \mathrm{impar}(0)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\mathrm{par}(n) \lor \mathrm{impar}(n)]^4 \qquad \dfrac{\dfrac{[\mathrm{par}(n)]^3}{\mathrm{impar}(n+1)}}{\mathrm{par}(n+1) \lor \mathrm{impar}(n+1)} \qquad \dfrac{\dfrac{[\mathrm{impar}(n)]^3}{\mathrm{par}(n+1)}}{\mathrm{par}(n+1) \lor \mathrm{impar}(n+1)}}{\mathrm{par}(n+1) \lor \mathrm{impar}(n+1)}\ \lor E;3}{\mathrm{par}(n) \lor \mathrm{impar}(n) \to \mathrm{par}(n+1) \lor \mathrm{impar}(n+1)}\ {\to}I;4}{\forall n \in \mathbb{N}.\ \mathrm{par}(n) \lor \mathrm{impar}(n) \to \mathrm{par}(n+1) \lor \mathrm{impar}(n+1)}}{\forall n \in \mathbb{N}.\ \mathrm{par}(n) \lor \mathrm{impar}(n)}\ \mathrm{ind}$$

Exercício (trabalhoso mas importante!):
entenda cada passo da derivação acima.