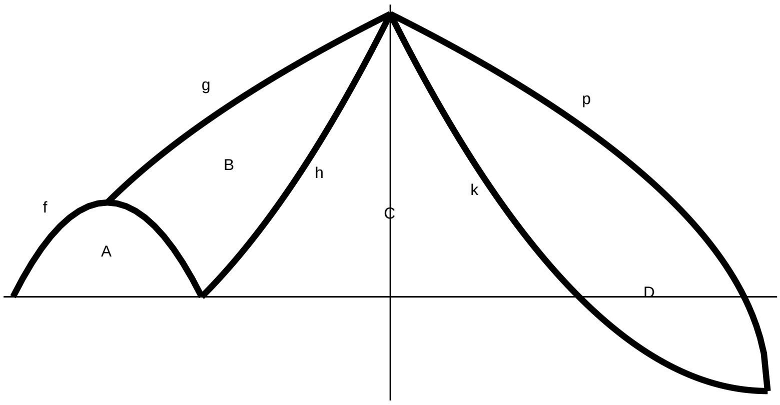
Cálculo Diferencial e Integral II
PURO-UFF - 2009.1
Turma: A1/RCT00017
Professor: Eduardo Ochs
Primeira prova - 22/maio/2009

(1) (Total: 2.5 pontos). Na figura abaixo as regiões A, B, C e D são delimitadas pelas curvas $y = 0$, $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = h(x)$, $y = k(x)$, $y = p(x)$,



onde:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - (x+3)^2 \\ g(x) &= 2\sqrt{x+4} - 1 \\ h(x) &= ((x+4)/2)^2 - 1 \\ k(x) &= ((4-x)/2)^2 - 1 \\ p(x) &= 2\sqrt{4-x} - 1 \end{aligned}$$

a) (1.5 pontos) Expresse as áreas das regiões A, B, C e D como somas e diferenças de integrais. *Neste item não é preciso calcular as integrais.*

b) (1.0 pontos) Calcule as áreas das regiões B e D. Use o método que você quiser, mas não se esqueça de explicar o que você fez!

(2) (Total: 1.5 pontos). Usando integração por partes, encontre primitivas para:

a) (0.5 pontos) $\int x^2 \ln x \, dx$

b) (1.0 pontos) $\int (\operatorname{sen} x) x^2 \ln x \, dx$

(3) (Total: 1.0 pontos). Encontre primitivas para:

a) (0.5 pontos) $\int \frac{1}{(x-2)(x-3)} \, dx$

a) (0.5 pontos) $\int \frac{x+1}{(x-1)^2} \, dx$

(4) (Total: 3.0 pontos). As integrais que conseguimos resolver por substituição trigonométrica em geral são da forma $\int F(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$, onde $F(\alpha,\beta)$ é uma função racional de α e β — por exemplo $F(\alpha,\beta) = \frac{\alpha^2-3\beta}{\alpha-\beta}$ — e a, b e c são constantes. O método pode ser dividido em quatro partes:

(I) Uma substituição $u = x + k$ para transformar $\int F(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ em $\int G(u, \sqrt{a'u^2+c'})\,du$,

(II) $\sqrt{c^2(ax^2 \pm 1)} = c\sqrt{ax^2 \pm 1}$,

(III) a substituição $u = ax$ converte $\sqrt{\pm a^2x \pm 1}$ em $\sqrt{\pm u^2 \pm 1}$,

(IV) a substituição trigonométrica "em si" — três casos diferentes, veja as fórmulas na próxima página.

a) (0.8 pontos) Use o passo I do método para transformar a integral definida $\int_{x=2}^{x=3} \frac{x}{\sqrt{x^2-20x+1000}}dx$ numa outra integral na qual possamos aplicar o passo II. *Dica:* $k = \pm 10$.

b) (0.2 pontos) Use o passo II do método para transformar a integral $\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{4-x^2}}dx$ numa integral na qual possamos aplicar o passo III.

c) (0.5 pontos) Use o passo III do método para converter a integral definida $\int_{x=1/9}^{x=1/6} \frac{\sqrt{1-9x^2}}{3-x}dx$ numa integral na qual possamos aplicar o passo IV.

d) (1.0 pontos) Calcule $\int \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}^5}dt$.

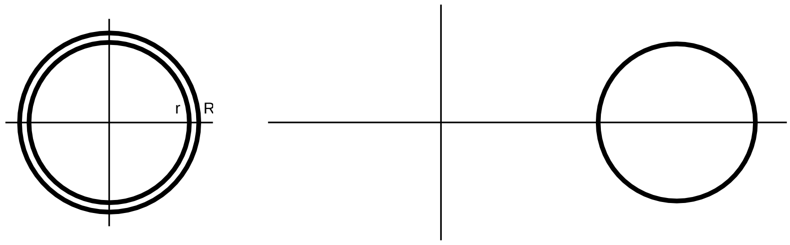
e) (0.5 pontos) Calcule $\int_{t=a}^{t=b} \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}^5}dt$.

Observações & dicas: consulte a tabela de integrais da última página; não é necessário simplificar expressões como "$\arctan \operatorname{sen} \theta$" se elas aparecerem nos itens (d) e (e).

(5) (Total: 2.0 pontos).

Um anel de raio interno r e raio externo R — veja a figura à esquerda abaixo — tem área $\pi(R^2 - r^2)$; um "cilindro com buraco no meio" com raio externo R, raio interno (isto é, raio do buraco) r e altura h tem volume $\pi(R^2 - r^2)h$. Se R está muito próximo de r, digamos, $R = r + \epsilon$, então o volume do cilindro com buraco vai ser $\pi((r + \epsilon)^2 - r^2)h \approx \pi(2\epsilon r)h$. Vamos nos referir a estes cilindros com $R \approx r$ como "cascas cilíndricas".

O círculo da figura à direita abaixo — "C" — tem centro $(3, 0)$ e raio 1; a equação da metade superior da sua circunferência é $f(x) = \sqrt{1 - (x - 3)^2}$. Se girarmos este círculo em torno do eixo y vamos obter um toro. Podemos medir o volume deste toro partindo o círculo C em barrinhas verticais muito estreitas, rodando cada uma delas em torno do eixo y — elas vão virar cascas cilíndricas — e somando os volumes destas cascas cilíndricas.



a) (0.4 pontos) Corte o círculo C entre $x = x_0$ e $x = x_0 + \epsilon$. Qual vai ser a altura da barrinha correspondente a este corte? Qual a sua largura? Quando rodarmos ela em torno do eixo y qual vai ser o raio da casca cilíndrica?

b) (0.4 pontos) Suponha que partimos o intervalo de integração, $[2, 4]$, em n pedaços, usando os pontos $x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_n = 4$. Suponha que cada x_i é muito próximo do x_{i+1} e que cada barrinha entre x_i e x_{i+1} é aproximadamente um retângulo; use isto para obter uma aproximação A_n para a área desta barrinha e uma aproximação V_n para o volume da casca cilíndrica correspondente.

c) (0.6 pontos) Expresse a área total de C — aproximada pelas barrinhas — e o volume total do toro — aproximado pelas cascas cilíndicas — como um somatório.

d) (0.6 pontos) Quando n tender para ∞ e o comprimento de cada barrinha tender a 0 os valores destes somatórios vão tender para os valores de integrais que dão o valor exato da área de C e do volume do toro. Use a fórmula $\sum_{i=0,\ldots,n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i) \approx \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx$ para obter integrais que dão o valor exato da área de C e do volume do toro. *Não é preciso calcular estas integrais, basta expressá-las simbolicamente.*

Algumas fórmulas: quando θ é uma variável,
$s = \operatorname{sen}\theta$
$c = \cos\theta$
$t = \tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{s}{c}$
$z = \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{c}$

Identidades:
$s^2 + c^2 = 1$
$s = \sqrt{1-c^2}$
$c = \sqrt{1-s^2}$
$t^2 + 1 = z^2$
$\sqrt{t^2+1} = z$
$t = \sqrt{z^2-1}$

Derivadas e diferenciais:
$\frac{dc}{d\theta} = \frac{d\cos\theta}{d\theta} = -\operatorname{sen}\theta = -s$
$\frac{ds}{d\theta} = \frac{d\operatorname{sen}\theta}{d\theta} = \cos\theta = c$
$\frac{dt}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\frac{s}{c} = \frac{s'c - sc'}{c^2} = \frac{c^2+s^2}{c^2} = \frac{1}{c^2} = z^2 = 1 + t^2$
$\frac{dz}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}c^{-1} = -c^{-2}c' = -c^{-2}(-s) = \frac{1}{c}\frac{s}{c} = zt$
$dc = -s\,d\theta = -\sqrt{1-c^2}d\theta$
$ds = c\,d\theta = \sqrt{1-s^2}d\theta$
$dt = z^2 d\theta = (1+t^2)d\theta$
$dz = zt\,d\theta$

Integração por partes:
$\int_{x=a}^{x=b} f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x)\big|_{x=a}^{x=b} - \int_{x=a}^{x=b} f(x)g'(x)\,dx$

Mudança de variável:
$\int_{x=a}^{y=b} \frac{dg}{du}\frac{du}{dx}\,dx = \int_{u=u(a)}^{u=u(b)} \frac{dg}{du}\,du$
$\int_{x=a}^{y=b} g'(u(x))u'(x)\,dx = \int_{u=u(a)}^{u=u(b)} g'(u)\,du$
$\int_{x=a}^{y=b} f(u(x))u'(x)\,dx = \int_{u=u(a)}^{u=u(b)} f(u)\,du$

Integrais de $(\operatorname{sen}\theta)^m(\cos\theta)^n$ com um expoente ímpar:
$\int s^n c^{2k+1} d\theta = \int s^n c^{2k} \cdot c\,d\theta = \int s^n(1-s^2)^k\,ds$
$\int c^n s^{2k+1} d\theta = \int c^n s^{2k} \cdot s\,d\theta = -\int c^n(1-c^2)^k\,dc$

Substituição trigonométrica:
$\int F(s, \sqrt{1-s^2})\,ds = \int F(s,c)c\,d\theta$
$\int F(t, \sqrt{1+t^2})\,dt = \int F(t,z)z^2\,d\theta$
$\int F(z, \sqrt{z^2-1})\,dz = \int F(z,t)zt\,d\theta$

Outros:
$\sum_{i=0,\ldots,n-1} f(x_i)(x_{i+1}-x_i) \approx \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx$

Justifique cada uma das suas respostas.
Boa prova!